Die harmonische Reihe.

Ein Beitrag zur algebraischen Analysis.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

von der philosophischen Facultät

der

vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

verfasst von

Heinrich Simon

aus Berlin.

HALLE 1886.

MEINEN ELTERN.

Die harmonische Reihe.

Ein Beitrag zur algebraischen Analysis.

Einleitung.

Die Reihentheorie bedient sich zur Begründung ihrer Sätze vielfach des fremdartigen Hilfsmittels der bestimmten Integrale. Es mag in manchen Fällen schwer scheinen, dieses Hilfsmittel durch die Methoden der algebraischen Analysis zu ersetzen — die Behauptung, dass ein solcher Ersatz wünschenswert sei, wird aber kaum vielem Widerspruche begegnen. Bezeichnet Herr *Thomae*[1]) es doch geradezu als „eine Forderung der Wissenschaft, dass sie die Resultate, die sie auf elementarem Wege erhalten *kann,* auch auf diesem zu erhalten suchen *muss,* wofern damit nur nicht übergrosse Weitläufigkeiten verbunden sind". Mit letzterer Einschränkung ist wohl der Haupteinwand berührt, den man jener Forderung entgegenstellen kann: Ist Reinheit der Methode ein berechtigter Anspruch der Aesthetik der Wissenschaft, so ist es doch Eleganz und Kürze nicht minder, und wo beide in Widerstreit geraten, wird im einzelnen Falle der Geschmack zu entscheiden haben, welcher von ihnen dem anderen unterzuordnen sei. Lässt sich aber beiden zugleich genügen, so wird ein Versuch in dieser Richtung keiner weiteren Rechtfertigung bedürfen.

Zu solchem Versuche forderte nun die harmonische Reihe besonders auf.

[1]) „Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe". Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. XXVI. (1881) S. 315.

Dieselbe wird in ihrer einfachsten Gestalt, als Reihe der reciproken natürlichen Zahlen, gerade in den Elementen der Reihenlehre häufig herangezogen. Sie pflegt als der erste Beleg dafür angeführt zu werden, dass die unbegrenzte Abnahme der Glieder allein nicht hinreicht, um eine unendliche Reihe convergent zu machen; sie liefert, mit wechselnden Vorzeichen versehen, das einfachste Beispiel einer convergenten alternirenden Reihe; an ihr wird endlich seit *Dirichlet*[1]) die bedingte Convergenz erläutert und mit den Mitteln der algebraischen Analysis nachgewiesen, dass eine veränderte Anordnung der Glieder von Einfluss auf die Summe sein kann.

Allein damit sind die Eigenschaften der Reihe nur an der Oberfläche gestreift.

Denn zunächst lässt sich das Unendlichwerden der harmonischen Reihe in Beziehung setzen zu dem des Logarithmus; im engsten Zusammenhange hiermit steht dann die *Gauss*sche Funktion $\Psi(z)$, die als Specialfall die *Euler*sche Constante enthält, und mit deren Hilfe die annähernde Summirung der endlichen Reihe möglich wird. Das Umordnungsproblem endlich, welches, in Ermangelung des massgebenden Grenzwertes eines n-gliedrigen, unendlich fernen Reihen-Ausschnitts, nur für einige wenige Specialfälle behandelt zu werden pflegt — und das in einer Weise, die den wahren Sachverhalt mehr verhüllt als aufklärt, — lässt sich mit Hilfe des gedachten Grenzwertes allgemeiner und klarer lösen.

Die hierher gehörigen Sätze sind, wie eine Übersicht der einschlägigen Literatur weiterhin zeigen wird, an den verschiedensten Stellen zerstreut und fast ausschliesslich mit Hilfe der Infinitesimalrechnung hergeleitet. Insbesondere werden zur Ermittelung der Wertänderung der alternirenden harmonischen Reihe für den Fall, dass man auf p positive Glieder immer q negative folgen lässt, überall bestimmte Integrale herangezogen, so dass Herr *Pringsheim*[2]) ein anderes Beispiel vorschlägt, bei dem die Integrale entbehrlich sind. Letzteres ist nun aber, wie sich zeigen wird, auch bei der

---

[1]) Abhandlg. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1837. S. 48.

[2]) „Über die Wertveränderungen bedingt convergenter Reihen u. Produkte". Math. Annalen, Bd. XXII. (1883) S. 459.

harmonischen Reihe der Fall, und damit ist das Umordnungsproblem der algebraischen Analysis in allgemeinerer Gestalt zugänglich gemacht, als man zunächst erwarten sollte. Denn ein noch zu erwähnender Satz von Herrn *Schlömilch* führt die Wertänderung, die eine ganz *beliebige* convergente alternirende Reihe bei der gedachten Umstellung der Glieder erfährt, auf die Wertänderung der *harmonischen* Reihe zurück, und dieser Satz lässt sich ohne Mühe für den Fall verallgemeinern, dass die Zahlen p und q variabel gemacht werden.

Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, dass von den allgemein üblichen, bequemen Ausdrücken „Umstellung der Glieder", „veränderte Anordnung" u. s. w. hier nur unter dem Vorbehalt Gebrauch gemacht wird, dass dieselben, wie schon Herr *Natani*[1]) hervorhebt, „im uneigentlichen Sinne zu verstehen" seien.

Was als Veränderung der Anordnung bezeichnet wird, ist eigentlich die Bildung einer neuen Reihe aus *ausgewählten* Gliedern der ursprünglichen und läuft auf das *Fortlassen einer i. A. unendlichen Anzahl unendlich ferner Glieder* hinaus.

Bei dieser Auffassung ist das logische Paradoxon hinfällig, dass die Reihenfolge der Summanden von Einfluss auf die Summe sein könne, oder, wenn man lieber will, es lässt sich der Begriff der Addition auch auf den Fall unendlich vieler Summanden übertragen, ohne das Vertauschungsgesetz aufzugeben. Um den Betrag jenes fortgelassenen Ausschnitts muss sich nun offenbar die Reihensumme (algebraisch) vermindern. Damit ist denn unmittelbar klar, dass eine solche Fortlassung bei *absolut* convergenten Reihen keine Veränderung der Summe bewirken kann, weil die Convergenz einer aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe eben durch das *Verschwinden jeder* unendlich grossen Anzahl unendlich ferner Glieder *definirt* ist. Eine Veränderung der Summe kann also nur bei *bedingt* convergenten Reihen vorkommen und wird gleichzeitig mit jenem Ausschnitte einen endlichen oder unendlich grossen Wert haben, in welchem letzteren

[1]) Mathemat. Wörterbuch (begonnen v. *L. Hoffmann*). Art. „Reihe". Bd. VI. S. 272.

Falle die neue Reihe divergirt. Auch bei bedingt convergenten Reihen ist indessen das Verschwinden des fraglichen Ausschnitts nicht ausgeschlossen, wie das Beispiel der Reihe

$$\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{2f(2)} + \frac{1}{3f(3)} - \frac{1}{4f(4)} + - \cdots$$

zeigt, wo $f(n)$ eine beliebige, mit n unendlich werdende Funktion bedeutet. Leitet man aus ihr eine neue Reihe dadurch ab, dass man auf je ein positives Glied zwei negative Glieder folgen lässt, so entnimmt man aus den $4n$ ersten Gliedern zwar sämmtliche $2n$ negativen, aber nur die ersten n positiven Glieder. Der fortgelassene n-gliedrige Ausschnitt

$$\frac{1}{(2n+1)f(2n+1)} + \frac{1}{(2n+3)f(2n+3)} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)f(4n-1)}$$

liegt zwischen

$$\frac{n}{(2n+1)f(2n+1)} \quad \text{und} \quad \frac{n}{(4n-1)f(4n-1)},$$

hat also für $n = \infty$ die Null zur Grenze, so dass die vorgenommene Umstellung die Summe der Reihe, trotz ihrer nur bedingten Convergenz, unverändert lässt.

Der oben gegen die übliche Behandlungsweise ähnlicher specieller Umordnungen der harmonischen Reihe gerichtete Vorwurf bezieht sich darauf, dass nirgends von diesem Ausschnitt die Rede ist, der doch für jede endliche Gliederzahl den greifbaren Unterschied der beiden Anordnungen darstellt, und dessen Grenzwert leicht elementar zu finden ist.

Literatur.

Euler behandelt die endliche harmonische Reihe als Beispiel zu seiner Summenformel[1]). Die nach ihm benannte Constante c tritt dabei als Integrationsconstante auf. Die hier, Gleichung (22) für die allgemeine, Gleichung (28) für die specielle harmonische Reihe, gegebene Näherungsformel stimmt mit dem Anfang der *Euler*schen halbconvergenten Entwickelung überein. (Vgl. Formel 28 a.)

---

[1]) Differential-Rechnung. II. § 142 ff.

Eulers Summation scheint das erste wirkliche Resultat in der Theorie der harmonischen Reihe zu sein. Er zählt sie auch bereits neben der Fakultät $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$ zu den „inexplicablen" Funktionen, während *Joh. Bernouilli* noch auf die Summirung durch einen geschlossenen Ausdruck hoffte und *Leibnitz* um einen solchen anging[1]. Als *Bernouilli* später in einer älteren Abhandlung *Leibnitz'* die Behauptung fand, man könne beliebig viele Glieder der harmonischen Reihe summiren, wiederholte er seine Bitte[2], *Leibnitz* musste indessen zugeben, er habe sich damals geirrt[3]. —

Die Untersuchung der verallgemeinerten Fakultät $\Pi(z)$ führt *Gauss*[4] dazu, die logarithmische Ableitung derselben als besondere Funktion $\Psi(z)$ einzuführen, wobei $-\Psi(0)$ die *Euler*sche Constante ist. Gleichzeitig wird für $\Psi(z)$ der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty}\left[\ln n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \cdots - \frac{1}{z+n}\right] = \sum_{1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+k} + \ln\frac{k+1}{k}\right)$$

gewonnen, dessen Zusammenhang mit der harmonischen Reihe ersichtlich ist.

Aus beiden Quellen fliessen eine Anzahl Eigenschaften von $\Psi(z)$. Statt dieser ist hier (§ 5) die ganz ähnliche Funktion

$$C_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n} - \ln(z+n)$$

definirt, für deren Grenzwert $C(z)$ die Beziehung

$$C(z) = -\Psi(z-1),\ \Psi(z) = -C(z+1)$$

stattfindet. Die Eigenschaften von $C(z)$ lassen sich leicht

---

[1]) *Leibnitz'* Mathemat. Werke, herausgeg. v. *Gerhardt*, III. S. 160. Brief vom 2. Febr. 1695. — Die bezügliche Stelle ist auch in *Grunerts* Archiv, Bd. XXVI S. 109 abgedruckt.

[2]) Brief vom 12. Sept. 1696. A. a. O. S. 327.

[3]) Briefe vom 6. Okt. u. 6. Nov. 1696. — Vgl. a. die Einleitung *Gerhardts* zum Briefwechsel, a. a. O. S. 119.

[4]) „Disquis. generales circa seriem infinitam etc." § 30. Comment. soc. Gotting. II. 1813. — Werke, III.

aus dieser Definition allein und ohne Hilfe höherer Rechnung ableiten (§ 6).

Herr *Thomae* berührt in seiner schon erwähnten Abhandlung über die *Gauss*sche Reihe die Funktion $\Psi(z)$ nur flüchtig und beschränkt sich auf die Herleitung des Satzes, dass

$$\Psi(n) - ln\, n = H(n) = \frac{1}{2n} + \frac{\Theta(n)}{n},$$

wo $\Theta(n)$ mit wachsendem n verschwindet.

Eine ziemlich vollständige Theorie der Reihe giebt Herr *Natani*[1]). Mit Hilfe bestimmter Integrale wird gezeigt, dass die Differenz

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \cdots + \frac{1}{a+(n-1)b} - \frac{1}{b}\, ln\,(a+nb)$$

sich mit wachsendem n einem Grenzwerte $\varphi(a, b)$ nähert. Nach *Gauss'* Bezeichnung wäre also $b\,\varphi(a, b) = -ln\, b - \Psi\left(\frac{a-b}{b}\right)$.

Es wird eine schwach convergirende Reihe für $\varphi(a, b)$ entwickelt und daraus in $\varphi(1,1)$ die *Euler*sche Constante gewonnen. Die Summe der alternirenden Reihe wird durch die Funktion φ ausgedrückt. Die positiven und negativen Glieder dieser Reihe werden in Gruppen von p bezw. q Gliedern zu einer neuen Reihe zusammengefasst, die Summe derselben wird auf die der ursprünglichen Reihe zurückgeführt, und der Betrag der Wertänderung, die hier, wie es scheint, zum ersten Male als Ausschnitt einer divergenten Reihe dargestellt ist, durch ein bestimmtes Integral ermittelt.

Bevor auf die übrigen Behandlungen des Umordnungsproblems eingegangen wird, sind noch einige Arbeiten zu nennen, die darauf ausgehen, die endliche Reihe näherungsweise zu summiren.

Herr *Catalan* leitet[2]) durch bestimmte Integrale die Einschliessung

$$c + ln\, n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} < 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < c + ln\, n + \frac{1}{2n}$$

her, wo c die *Euler*sche Constante bedeutet. Die Überein-

---

[1]) Math. Wörterbuch. Art. „Reihe" S. 284 ff.

[2]) „Sur la série harmonique". Comptes Rendus de l'Acad. fr. 1856. II. S. 628.

stimmung der unteren Grenze mit den ersten Gliedern der *Euler*schen Reihe wird merkwürdigerweise nicht hervorgehoben.

An einer anderen Stelle [1]) werden aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals Sätze abgeleitet, wonach Summen zwischen Integrale eingeschlossen werden. Bei der Anwendung auf die harmonische Reihe ergeben sich Formeln von geringer Annäherung bei ziemlich umständlicher Rechnung. So wird die Summe der ersten tausend Glieder noch in der ersten Dezimalstelle falsch.

Auf elementarem Wege gehen dagegen die Herren *Mansion* und *Cesaro* vor. Der erstere gelangt [2]) mit Hilfe der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel zu der Einschliessung

$$\frac{1}{2n} < \sum_{n}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - ln\frac{k+1}{k}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}.$$

Die eingeschlossene Reihe convergirt demnach, und ihre Summe c liegt, für $n=1$, zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$. Daraus ergiebt sich weiter, dass

$$c + ln\, n + \frac{1}{2n+1} < 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < c + ln\, n + \frac{1}{2n}.$$

Herr *Cesaro* gewinnt (dem Jahrbuch über die Fortschritte der Math. 1881. S. 199 zufolge) in einer mir nicht zugänglich gewesenen Arbeit [3]) die Formeln

$$ln\,(n + \tfrac{1}{2}) + 0{,}57 < 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < ln\,(n + \tfrac{1}{2}) + 0{,}60$$

und

$$1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = c + ln\,\sqrt{n\,(n+1)} + \frac{\Theta}{6\,n\,(n+1)} \quad (0 < \Theta < 1).$$

Eine (andere?) Herleitung der letzteren Formel giebt er noch in einer neueren Note [4]), wobei

$$c = 1 - \tfrac{1}{2}\, ln\, 2 - \tfrac{1}{3}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \tfrac{1}{5}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^5} - \cdots$$

---

[1]) „Traité élémentaire des séries“. 1860. Cap. IV.

[2]) „On the harmonic series and *Stirling's* formula.“ Messenger of Math. XI. (1881) S. 38. — Auch Mathesis. I. S. 169.

[3]) Mathesis. I. S. 51 u. S. 143.

[4]) „Sur la série harm.“ Nouv. Annales de Math. 1885. S. 295.

gesetzt ist, also wohl durch diese Entwickelung definirt sein und aus ihr berechnet werden soll. Zur Rechnung ist jene Formel wegen der Unbestimmtheit von Θ nicht sehr brauchbar; den besten Näherungswert würde $\Theta = 1$ liefern, da dann die rechte Seite, nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickelt, mit $c + ln\, n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$ beginnt, wie in der *Euler*schen Reihe.

Was die *Wertveränderung* der alternirenden harmonischen Reihe betrifft, so scheint *Dirichlet*, der an der schon angegebenen Stelle zuerst darauf hinwies, auch an anderen Orten keinen Beweis oder eine Ermittelung des Betrages jener Wertänderung mitgeteilt zu haben[1]. Vielmehr scheint die erste nähere Behandlung der Aufgabe von *Ohm*[2] herzurühren, der aus der Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + - \cdots = ln\, 2$$

mehrere andere ableitet, indem er dem Verhältnis der Anzahl der positiven zu der der negativen Glieder verschiedene specielle Werte und endlich den Wert $m : n$ beilegt; die Reihen werden durch Integration summirt, und so wird schliesslich der Satz gewonnen, dass im allgemeinsten der behandelten Fälle die Reihensumme um $\frac{1}{2}\, ln \frac{m}{n}$ wächst. Bei einigen der speciellen Fälle wird nebenher darauf aufmerksam gemacht, dass die ursprüngliche und die umgestellte Reihe sich um eine Reihe von Gliedern unterscheiden, deren Summe denselben Grenzwert hat wie die Wertänderung[3].

Dieselbe Aufgabe wie *Ohm* behandelt Herr *Schlömilch*[4])

---

[1]) Vgl. *Pringsheim*, a. a. O. S. 456. Wenn daher Hr. *Schlömilch* in einer „Notiz über die bedingt converg. Reihen" (Ztschr. f. math. etc. Unterricht. XII. (1881) S. 30) seinen Nachweis dem von *Dirichlet* angeblich an der citirten Stelle gegebenen als einfacher gegenüberstellt. so liegt vielleicht eine Verwechselung mit einer Vorlesung *Dirichlets* vor.

[2]) De nonnullis seriebus infinitis summandis. Berlin. 1839.

[3]) Wie die Anmerkung „Series infinitae nunquam non eodem valore gaudent, si adhuc manent convergentes, etiamsi omnes termini signo + (additionis) afficiantur" (a. a. O. S. 14) zeigt, hat *Ohm* sehr wohl gewusst, dass absolut convergente Reihen stets *dieselbe* Summe behalten. Vgl. dagegen *Pringsheim*, a. a. O. S. 456.

[4]) Übungsbuch zum Studium d. höh. Analysis. II. Cap. V. § 23.

für die allgemeine harmonische Reihe, indem er zunächst die Summe der alternirenden Reihe durch ein bestimmtes Integral ausdrückt und auch für die Wertänderung ein solches aufstellt und auswertet. Von der zweiten Auflage an wird die Untersuchung ausserdem noch auf eine *beliebige*, convergente alternirende Reihe erstreckt, wobei sich der Satz ergiebt[1]), dass die mehrfach erwähnte Umstellung der Glieder der Reihensumme den Zuwachs $\frac{1}{2} \lim_{n=\infty} (nu_n) \, ln \frac{p}{q}$ zuführt.

Die elementare und noch etwas verallgemeinerte Herleitung dieses Satzes wird möglich mit Hilfe einer von Herrn *Pringsheim*[2]) gegebenen Methode, die Wertbestimmung eines unendlich fernen Ausschnitts einer divergenten Reihe positiver Glieder auf die des entsprechenden Ausschnitts einer andern solchen Reihe zurückzuführen. Denn wie Herr *Pringsheim* bemerkt, beruht der *Schlömilch*sche Satz unmittelbar auf dem Verhalten der harmonischen Reihe, und der in Frage kommende Ausschnitt der letzteren wird elementar bestimmt werden.

Schliesslich ist noch der in vielen Lehrbüchern übereinstimmend gegebenen Behandlungen der Umordnungen der speciellen Reihe $1 - \frac{1}{2} + \cdots$ für $p = 1$, $q = 2$ und $p = 2$, $q = 1$ zu gedenken, wobei die Summenänderung um $\frac{1}{2} ln\, 2$ elementar nachgewiesen wird. Inwiefern die dabei übliche Darstellung reformbedürftig erscheint, ist bereits ausgeführt worden.

---

1. Aufstellung der Reihe. Die Forderung, jedes Glied einer Reihe solle das arithmetische Mittel zwischen dem ihm vorhergehenden und dem ihm folgenden Gliede sein, führt zu der arithmetischen Reihe; soll jedes Glied das geometrische Mittel zwischen seinen Nachbargliedern sein, so gelangt man zur geometrischen Reihe; dieselbe Bedingung für das harmonische Mittel liefert die harmonische Reihe.

---

[1]) S. a. Ztschr. f. Math. u. Phys. XVIII (1873) S. 520.

[2]) A. a. O. S. 471.

Wir stellen uns die Aufgabe, die allgemeine Form dieser Reihe zu ermitteln.

h_n ist das harmonische Mittel zwischen h_{n-1} und h_{n+1}, wenn die drei Grössen der stetigen harmonischen Proportion

$$(h_{n-1} - h_n) : (h_n - h_{n+1}) = h_{n-1} : h_{n+1}$$

genügen. Dies liefert

$$\frac{1}{h_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_{n+1}}\right),$$

d. h., wenn man die reciproken Werte der Reihenglieder betrachtet, so ist jedes Glied das arithmetische Mittel zwischen seinen Nachbarn. *Die reciproken Werte der Glieder bilden also eine arithmetische Reihe,* so dass das allgemeine Glied der harmonischen Reihe die Form

$$h_n = \frac{1}{a + nb}$$

besitzt. Lassen wir noch den Faktor $\frac{1}{b}$ fort und setzen wir $\frac{a}{b} = z$, so schreibt sich die Reihe in einfachster Form

$$(1)\quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} h_k = \sum_{0}^{n} \frac{1}{z+k} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \cdots + \frac{1}{z+n}.$$

Dabei kann z jeden beliebigen, positiven oder negativen, reellen oder complexen Wert haben; ausgeschlossen seien nur Null und die negativen ganzen Zahlen, die eins der Glieder ∞ machen würden, sofern die Reihe von $k = 0$ an in Betracht gezogen wird; auch diese Beschränkung fällt aber fort, wenn die Reihe erst mit einem so grossen k begonnen wird, dass $k + z \geqq 1$ ist [1]).

Jede harmonische Reihe ist leicht auf die angesetzte Form zu bringen. So ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \cdots + \frac{1}{a+nb} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{a/b} + \frac{1}{a/b+1} + \cdots + \frac{1}{a/b+n}\right) = \frac{1}{b} S_n\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$\frac{1}{a-kb} + \frac{1}{a-(k-1)b} + \cdots + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a+lb} = \frac{1}{b} S_{l+k}\left(\frac{a}{b} - k\right),$$

---

[1]) Als Summationsbuchstabe gilt, wofern nichts anderes angegeben ist, überall k.

und die Reihe der reciproken natürlichen Zahlen

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = S_{n-1}(1).$$

2. Grenzen für den Ausschnitt $S_n(z) - S_m(z)$. Die Reihen-Entwickelungen

$$\begin{aligned} ln\,(1+x) &= x - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + - \cdots\right) \\ ln\,\frac{1}{1-x} &= x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + + \cdots\right) \end{aligned} \qquad |x| \leqq 1$$

liefern

$$ln\,(1+x) < x < ln\,\frac{1}{1-x}\cdot$$

Setzen wir hierin

$$x = \frac{1}{k+z},$$

indem wir k positiv und so gross voraussetzen, dass $|k+z| \geqq 1$ ist, so erhalten wir

$$ln\,\frac{k+1+z}{k+z} < \frac{1}{k+z} < ln\,\frac{k+z}{k-1+z},$$

und wenn wir hier nach und nach k die ganzzahligen Werte $m+1,\ m+2, \cdots n$ annehmen lassen und die so entstehenden Ungleichungen addiren,

$$(2) \qquad ln\,\frac{n+1+z}{m+1+z} < \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k+z} < ln\,\frac{n+z}{m+z}\cdot \qquad |m+1+z| \geqq 1.$$

Ist z reell, so ist die Geltungsbedingung erfüllt,

$$\begin{array}{llll} \text{bei } & z = -\infty \cdots\cdots -2 & \text{für } & m = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ & z = -2 \cdots\cdots -1 & & m = \ 2, 3, \cdots \\ & z = -1 \cdots\cdots\cdots\ 0 & & m = \ 1, 2, \cdots\cdots \\ & z = 0] \cdots\cdots\cdots +\infty & & m = 0, 1, 2, \cdots\cdots \end{array}$$

immer vorausgesetzt, dass verschwindende Nenner $(k+z)$ vermieden werden.

Ist z complex, etwa gleich $x + yi$, wo also y nicht 0 ist, so kann für die Werte $x = -\infty \cdots\cdots -2$ und $x = 0 \cdots\cdots +\infty$, bei ganz beliebigem y, $m = 0, 1, 2, \cdots$ sein. Hat aber x einen der Werte zwischen -2 und 0, die Grenzen ausgeschlossen, und ist k die kleinste ganze Zahl, für die

$$y^2 \geqq -2\,(k+x) - (k+x)^2$$

erfüllt ist, so kann $m = k, k+1, \cdots$ gesetzt werden.

3. Divergenz der Reihe. Lassen wir in (2) n unendlich werden, während m endlich bleibt, so werden beide Grenzen für $S_n - S_m$ unendlich, also auch S_n selbst.

Die Formel giebt zugleich eine gute Vorstellung davon, wie ausserordentlich langsam die Reihe divergirt. Denn es ist für $n = 2m$

$$\sum_{m+1}^{2m} \frac{1}{k+z} < ln\, 2.$$

Wie gross man auch m wählen möge — die Summe der m ersten Glieder wächst durch die Summe der nächsten m Glieder stets um weniger als $ln\, 2 = 0{,}69\,..$ Denkt man also die Reihe in Gruppen von je m Gliedern zerlegt, so ist die Summe der zweiten Gruppe kleiner als $ln\, 2$, die Summe der folgenden beiden Gruppen wieder $< ln\, 2$, ebenso die Summe der auf sie folgenden 4 Gruppen, dann der nächsten 8 Gruppen u. s. f. Trotzdem wächst die Summe ins Grenzenlose.

Die Divergenz der harmonischen Reihe liefert ferner einen Beleg dafür, dass es zur Convergenz auch von Reihen mit *wechselnden* Vorzeichen nicht ausreicht, wenn das $n$te Glied die Null zur Grenze hat. Denn zerlegt man jedes Glied der Reihe nach dem Muster

$$\frac{1}{k+z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+z+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+z+1}+1}\right),$$

so erhält man die divergente Reihe[1])

$$2\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k+z} = \frac{1}{\sqrt{z+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{z+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{z+2}-1}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{z+2}+1} + - \cdots$$

4. Endlicher Wert des Ausschnitts. Wird mit n auch m unendlich, aber so, dass $lim\, \frac{n}{m}$ endlich bleibt, so fallen in (2) beide Grenzen zusammen, und wir erhalten unmittelbar den sonst nur durch einen Übergang zum bestimmten Integral hergeleiteten Satz

[1]) Dieselbe findet sich, für $z = 1$, bei *Catalan,* Traité élém. des séries. Cap. II. § XV.

$$(3)\quad \lim\,(S_n - S_m) = \lim \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k+z} = \ln\left(\lim \frac{n}{m}\right) \qquad \begin{matrix} n = \infty \\ m = \infty \end{matrix}$$

Sind z. B. n und m ganze und ganzzahlige Funktionen gleich hohen Grades einer unendlich werdenden Veränderlichen w, so ist $\lim \frac{n}{m}$ der Quotient der Koeffizienten der höchsten Potenz. So hat man ohne Weiteres

$$\lim_{w=\infty} \sum_{qw+q_0}^{pw+p_0} \frac{1}{k+z} = \ln \frac{p}{q},$$

und wenn $f_1(w)$ und $f_2(w)$ ganzzahlige Werte sonst beliebiger Funktionen sind,

$$\lim_{w=\infty} \sum_{f_1(w)}^{f_2(w)} \frac{1}{ak+z} = \frac{1}{a} \lim \sum \frac{1}{k+\frac{z}{a}} = \frac{1}{a} \ln\left(\lim \frac{f_2(w)}{f_1(w)}\right).$$

Die erstere Formel allein reicht aus, um die Wertveränderung zu ermitteln, die die Reihe

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - + \cdots$$

erfährt, wenn immer p positive Glieder mit q negativen abwechseln (§ 11).

Bei der Wichtigkeit der Formel (3) möge sie noch auf folgende Art *direkt* abgeleitet werden.

Zunächst ist ersichtlich, dass der gesuchte Grenzwert von $\sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{k+z} = \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{k} \frac{1}{1+\frac{z}{k}}$, wenn er existirt, zwischen

$$\frac{1}{1+\frac{z}{m+1}} \sum \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+\frac{z}{n}} \sum \frac{1}{k}$$

liegen muss, also für $m = \infty$, $n = \infty$ mit

$$\lim \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k} = \lim\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

übereinstimmt. Diese Summe liegt nun zwischen

$$\frac{n-m}{m+1} \text{ und } \frac{n-m}{n}, \quad \text{oder zwischen} \quad \frac{\frac{n}{m}-1}{1+\frac{1}{m}} \text{ und } \frac{\frac{n}{m}-1}{\frac{n}{m}},$$

bleibt also endlich mit $\lim \frac{n}{m} = t$ und wird eine Funktion von t sein. Setzen wir daher

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{tm}\right)=f(t),$$

so haben wir

$$f(2t) = \lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)$$

$$+\lim_{2m=\infty}\left(\frac{1}{2m+1}+\cdots+\frac{1}{t\cdot 2m}\right)=f(2)+f(t).$$

Nach einer von Herrn *Catalan* herrührenden Formel [1]) ist aber

$$f(2)=\lim\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+-\cdots-\frac{1}{2m}\right)=\ln 2,$$

also

$$f(2t)=\ln 2+f(t).$$

Setzen wir $f(t)=\ln\varphi(t)$ und gehen wir zu den Zahlen über, so kommt $\varphi(2t)=2\varphi(t)$; die Funktionswerte von $\varphi(t)$ sind also proportional den Argumenten, d. h. $\varphi(t)$ ist rein lineär,

---

[1]) Sie folgt leicht so:

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}=\left(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)-\left(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$

$$=\left(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)-2\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+-\cdots$$

$$+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}.$$

Die Formel lässt sich übrigens zu der folgenden verallgemeinern:

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{km}=\sum_{\lambda=1}^{m}\left[\frac{1}{(\lambda-1)k+1}+\frac{1}{(\lambda-1)k+2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{\lambda k-1}-\frac{k-1}{\lambda k}\right],$$

aus der sie für $k=2$ hervorgeht. Lässt man hier m unendlich werden, so convergirt die rechter Hand entstehende unendliche Reihe und hat nach dem im Text bewiesenen Satze den Wert $\ln k$. Sie stimmt dann mit einer Reihe überein, die schon *Euler* (Integralrechn. II. § 147) gegeben hat, und die sich auch bei *Lacroix* (Traité du calc. diff. et int. III. § 1003.) findet. — Die *Catalan*sche Formel liefert unmittelbar den Satz

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)=\ln 2,$$

den auf anderem Wege Herr *Unferdinger* bewiesen hat. (Sitzgsber. der Wiener Akad. 1867. Bd. 55. II. S. 93.)

etwa $= at$. Die Constante a ergiebt sich aus $f(2) = ln\,2a = ln\,2$, und wir erhalten

$$f(t) = ln\,t = ln\left(lim\frac{n}{m}\right).$$

5. Die Funktion $C_k(z)$ und ihr Grenzwert $C(z)$. Für grosse Werte von n und m wird nach (3) annähernd die Gleichung

$$S_n - S_m = ln\,n - ln\,m$$

gelten, oder

$$S_n - ln\,n = S_m - ln\,m$$

sein, u. z. werden diese Differenzen einander um so näher kommen, je mehr n und m wachsen. Wenn nun zwar hieraus noch nicht zu schliessen sein dürfte[1]), dass die Differenz $S_n - ln\,n$ sich bei unbegrenzt wachsendem n einer von n unabhängigen Grenze nähert, so lässt sich doch die Existenz dieser Grenze folgendermassen zeigen.

Wählen wir m so gross dass nach (2)

$$ln\frac{n+z+1}{m+z+1} < S_n(z) - S_m(z) < ln\frac{n+z}{m+z}$$

gilt, und subtrahiren wir überall

$$ln\,(n+z) - ln\,(m+z),$$

so folgt

$$ln\frac{n+z+1}{n+z} - ln\frac{m+z+1}{m+z} < [S_n(z) - ln\,(n+z)] - [S_m(z) - ln(m+z)] < 0,$$

oder, wenn wir die Bezeichnung

$$S_k(z) - ln(k+z) = C_k(z)$$

einführen,

$$ln\left(1+\frac{1}{n+z}\right) + C_m(z) - ln\left(1+\frac{1}{m+z}\right) < C_n(z) < C_m(z).$$

Bei festem m nähert sich für wachsendes n das erste Glied linker Hand der Null, $C_n(z)$ bleibt also zwischen endlichen Grenzen, die sich um

$$ln\left(1+\frac{1}{m+z}\right)$$

unterscheiden. Da nun dies endliche Intervall durch Ver-

[1]) Wie es bei *Natani*, Math. Wörterb., Art. „Reihe", Bd. VI. S. 284 f. geschieht.

grösserung von m beliebig verkleinert werden kann, so nähert sich $C_n(z)$ mit wachsendem n, beständig abnehmend, einem nur noch von z abhängigen Grenzwert $C(z)$.

Derselben Grenze strebt offenbar auch

$$S_n - ln\, n = S_n - ln\,(n+z) + ln\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

zu.

6. Haupteigenschaften von $C(z)$. Aus der Definition

$$C_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n} - ln\,(z+n)$$

folgt unmittelbar

$$(4)\quad C(z) - C(y) = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{y+1} + - \cdots,$$

also

$$(5)\quad C(z) - C(z+1) = \frac{1}{z}.$$

$$(6)\quad C(z+m) = C(z) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+m-1}\right).$$

$$(7)\quad C(z-m) = C(z) + \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \cdots + \frac{1}{z-m}\right).$$

Für $z=1$ liefert (6)

$$(8)\quad C(m+1) = C(1) - \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right),$$

so dass $C(z)$ für positive ganzzahlige Werte von z durch $C(1)$ und die specielle harmonische Reihe bestimmt werden kann. Dabei ist $C(1) = \lim\limits_{n=\infty}\left[1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - ln\, n\right]$ die *Euler*sche Constante, auf deren Berechnung weiterhin noch eingegangen wird.

Für $z=0$ oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist nach (4) $C(z)=\infty$.

Für $y = 1-z$ liefert (4) die bekannte Reihe

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - + \cdots = \pi\, cotg\, \pi z,$$

so dass

$$(9)\quad C(z) - C(1-z) = \pi\, cotg\, \pi z.$$

Da $cotg\, \pi z$ für $z = \frac{2m+1}{1}$ verschwindet, so hat man hiernach für ganzzahlige, positive oder negative, m

$$(10) \qquad C(m+\tfrac{1}{2}) = C(-m+\tfrac{1}{2});$$

und da für $z = \frac{4m+1}{4}$, $cotg\, \pi z = 1$ ist,

$$(11) \qquad C(m+\tfrac{1}{4}) - C(-m+\tfrac{3}{4}) = \pi.$$

Aus

$$C_n\left(z+\frac{k}{m}\right) = m\left[\frac{1}{mz+k} + \frac{1}{mz+k+m} + \frac{1}{mz+k+2m} + \cdots + \frac{1}{mz+k+nm}\right] - ln\,\frac{nm+mz+k}{m}$$

folgt, wenn wir über $k = 1, 2, \cdots m$ summiren,

$$\sum_1^m C_n\left(z+\frac{k}{m}\right) = m\left[\sum_1^m \frac{1}{mz+k} + \sum_{m+1}^{2m} \frac{1}{mz+k} + \sum_{2m+1}^{3m} \frac{1}{mz+k} + \cdots + \sum_{nm+1}^{(n+1)m} \frac{1}{mz+k}\right] - \sum_1^m ln\,\frac{mn+mz+k}{m}$$

$$= m\sum_1^{nm+m} \frac{1}{mz+k} - \sum_1^m ln\,(nm+mz+k) + m\,ln\,m.$$

Nun ist

$$\sum_1^{nm+m} \frac{1}{mz+k} = S_{nm+m-1}(mz+1) = C_{nm+m-1}(mz+1) + ln\,(nm+mz+m),$$

wir können also schreiben

$$\sum_1^m C_n\left(z+\frac{k}{m}\right) = m\,C_{nm+m-1}(mz+1) + m\,ln\,m + \sum_1^m ln\,\frac{nm+mz+m}{nm+mz+k},$$

und da für $n = \infty$ jedes der m Glieder der letzteren Summe verschwindet, ergiebt sich

$$(12) \qquad \sum_1^m C\left(z+\frac{k}{m}\right) = m\,C(mz+1) + m\,ln\,m.$$

Hieraus, für $z = 0$,

$$(13) \qquad \sum_1^{m-1} C\left(\frac{k}{m}\right) = (m-1)\,C(1) + m\,ln\,m.$$

Beispiele. Für $m = 2$ ist nach (13) $C(\frac{1}{2}) = C(1) + 2\,ln\,2$; dann nach (5) $C(\frac{3}{2}) = C(\frac{1}{2}) - 2 = C(1) + 2\,ln\,2 - 2$.

Für $m = 3$ kommt $C(\frac{1}{3}) + C(\frac{2}{3}) = 2\,C(1) + 3\,ln\,3$. Dazu aus (9) $C(\frac{1}{3}) - C(\frac{2}{3}) = \pi\,cotg\,\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$, so dass $C(\frac{1}{3}) = C(1) + \frac{3}{2}\,ln\,3 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$, u. $C(\frac{2}{3}) = C(1) + \frac{3}{2}\,ln\,3 - \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$.

$m=4$ liefert $C(\frac{1}{4})+C(\frac{1}{2})+C(\frac{3}{4})=3\,C(1)+4\,ln\,4$, also da $C(\frac{1}{2})$ bekannt ist, $C(\frac{1}{4})+C(\frac{3}{4})=2\,C(1)+6\,ln\,2$. Mit Hilfe von $C(\frac{1}{4})-C(\frac{3}{4})=\pi\,cotg\,\frac{\pi}{4}=\pi$ ergiebt sich

$$C(\tfrac{1}{4})=C(1)+3\,ln\,2+\frac{\pi}{2},\quad C(\tfrac{3}{4})=C(1)+3\,ln\,2-\frac{\pi}{2}.$$

Für $m=6$ findet sich

$$C(\tfrac{1}{6})=C(1)+2\,ln\,2+\tfrac{3}{2}\,ln\,3+\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\,,$$

$$C(\tfrac{5}{6})=C(1)+2\,ln\,2+\tfrac{3}{2}\,ln\,3-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\,.$$

Wie man sieht, gelingt es schon mit Hilfe der entwickelten Formeln, die Werte $C\left(\frac{1}{n}\right), C\left(\frac{2}{n}\right), \cdots\cdots C\left(\frac{n-1}{n}\right)$, für $n=2$, 3, 4, 6, durch $C(1)$, Logarithmen und Teile der Peripherie darzustellen. Für $n=5$ aber erhält man nur

$$C(\tfrac{1}{5})+C(\tfrac{2}{5})=2\,C(1)+\tfrac{5}{2}\,ln\,5+\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{sin\,\pi/5}\quad\text{und}$$

$$C(\tfrac{3}{5})+C(\tfrac{4}{5})=2\,C(1)+\tfrac{5}{2}\,ln\,5-\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{sin\,\pi/5},$$

ohne dass zunächst eine weitere Trennung möglich ist. Ebenso kommt

$$C(\tfrac{1}{8})+C(\tfrac{3}{8})=2\,C(1)+8\,ln\,2+\frac{\pi}{2}\left(cotg\,\frac{\pi}{8}+cotg\,\frac{3\pi}{8}\right),$$

$$C(\tfrac{5}{8})+C(\tfrac{7}{8})=2\,C(1)+8\,ln\,2-\frac{\pi}{2}\left(cotg\,\frac{\pi}{8}+cotg\,\frac{3\pi}{8}\right).$$

Um nun $C(z)$ für ganz beliebige rationale z im Intervall $0<z<1$ darzustellen, hat *Gauss*[1]) independente Formeln, u. z. ohne Benutzung höherer Rechnung, abgeleitet, die sich nach unserer Bezeichnung schreiben lassen:

$$C\left(\frac{m}{n}\right)=C(1)+\frac{\pi}{2}\,cotg\,\frac{m\pi}{n}+ln\,n-\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}cos\,\frac{2k\pi m}{n}\,ln\left(2-2\,cos\,\frac{2k\pi}{n}\right),$$

für ungerade n;

(14)

$$C\left(\frac{m}{n}\right)=C(1)+\frac{\pi}{2}\,cotg\,\frac{m\pi}{n}+ln\,n-\sum_{1}^{\frac{n-2}{2}}cos\,\frac{2k\pi m}{n}\,ln\left(2-2\,cos\,\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$+(-1)^{m+1}\,ln\,2,\quad\text{für gerade } n.$$

---

[1]) Disquis. gener. § 33. (Formel (74) u. (75)).

Da nun mit Hilfe von (6) und (7) die Werte von $C(z)$ für alle rationalen $z > 1$ auf $C(z)$ mit echt gebrochenem Argument zurückzuführen sind, so können wir mit *Gauss* den *Satz* aussprechen, dass sich $C(z)$, für alle rationalen, positiven oder negativen, Werte von z, durch die *Euler*sche und *Ludolf*sche Constante, sowie durch Logarithmen bestimmen lässt.

Am Schluss der *Gauss*schen *Disquis. gener.* findet sich eine von *Nicolai* berechnete Tafel der numerischen Werte von $-C(z+1)$ für $z = 0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots \frac{99}{100}, 1$. Zieht man diese Werte von $\frac{1}{z}$ ab, so erhält man nach (5) die Tafel der Werte von $C(z)$ für dasselbe Intervall.

7. Reihen für $C(z)$. Schreiben wir der Kürze wegen $\frac{1}{k+z} = h_k$, also $C_k(z) = S_k(z) + ln\, h_k$, so ist, immer z als Argument gedacht,

$$C_{k-1} - C_k = S_{k-1} + ln\, h_{k-1} - S_k - ln\, h_k = -h_k + ln\, \frac{h_{k-1}}{h_k}.$$

Je nachdem wir nun

$$\frac{h_{k-1}}{h_k} = \frac{k+z}{k+z-1} = 1 + \frac{1}{k+z-1} \quad \text{oder} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k+z}} \text{ schreiben,}$$

erhalten wir einen der Ausdrücke

$$C_{k-1} - C_k = -h_k + ln\left[1 + h_{k-1}\right],$$

$$C_{k-1} - C_k = -h_k - ln\left[1 - h_k\right].$$

Jeder derselben führt zu einer Reihen-Entwickelung für C.

Die erste Form liefert entwickelt

$$C_{k-1} - C_k = -h_k + h_{k-1} - \tfrac{1}{2} h_{k-1}^2 + \tfrac{1}{3} h_{k-1}^3 - + \cdots,$$

und wenn wir über $k = m+1, m+2, \cdots n$ summiren,

$$C_m - C_n = h_m - h_n - \frac{1}{2}\sum_{m+1}^{n} h_{k-1}^2 + \frac{1}{3}\sum_{m+1}^{n} h_{k-1}^3 - + \cdots$$

Benutzen wir, dass allgemein

$$\sum_{m+1}^{n} u_{k-1} = \sum_{m}^{n-1} u_k = \sum_{m+1}^{n} u_k + u_m - u_n$$

ist, so sondern sich aus jeder der rechts stehenden Summen Ausdrücke von dem Typus

$$\frac{(-1)^{p+1}}{p}\left(h_m^p - h_n^p\right)$$

aus, die mit der Differenz $(h_m - h_n)$ zu $ln(1+h_m) - ln(1+h_n)$ verschmelzen. Somit wird

$$(15)\quad C_m(z) - C_n(z) = ln\frac{1+h_m}{1+h_n} - \frac{1}{2}\sum_{m+1}^{n} h_k^2 + \frac{1}{3}\sum_{m+1}^{n} h_k^3 - + \cdots$$

Der zweite Ausdruck

$$C_{k-1} - C_k = -h_k - ln(1-h_k) = \tfrac{1}{2}h_k^2 + \tfrac{1}{3}h_k^3 + \cdots$$

ergiebt, wenn wieder über $k = m+1 \cdots n$ summirt wird,

$$(16)\qquad C_m(z) - C_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{m+1}^{n} h_k^2 + \frac{1}{3}\sum_{m+1}^{n} h_k^3 + \cdots$$

Beide Reihen [1]) lassen sich zu einer dritten, rascher convergirenden, vereinigen; wir erhalten durch Addition sofort

$$(17)\quad C_m(z) - C_n(z) = \tfrac{1}{2}\, ln\frac{1+h_m}{1+h_n} + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{n} h_k^3 + \tfrac{1}{5}\sum_{m+1}^{n} h_k^5 + \cdots$$

und hieraus für $n = \infty$, da $h_\infty = 0$,

$$(18)\quad C_m(z) - C(z) = \tfrac{1}{2}\, ln\,(1+h_m) + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{\infty} h_k^3 + \tfrac{1}{5}\sum_{m+1}^{\infty} h_k^5 + \cdots$$

wodurch, unter der Bedingung $|m+z+1| \geqq 1$, die Berechnung von $C(z)$ auf die von $C_m(z) = S_m(z) + ln\, h_m$ zurückgeführt ist. Ist der reelle Teil von z einer der Werte $-\infty \cdots -2$, $0 \cdots +\infty$, so darf (nach § 2) $m = 0, 1 \cdots \infty$ gesetzt werden. So ergiebt sich z. B. für $m = 0$, wo $C_0(z) = \frac{1}{z} + ln\frac{1}{z}$ ist,

$$(19)\quad C(z) = \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2}\, ln\, z(z+1) - \tfrac{1}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^3} - \tfrac{1}{5}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^5} - \cdots$$

Man kann unmittelbar zu der Entwickelung (17) gelangen, wenn man von dem Ausdruck

---

[1]) Eine mit (15) im Wesentlichen übereinstimmende Reihe findet sich bei *Natani* „Reihe“, a. a. O.

$$C_{k-1} - C_{k+1} = -h_k - h_{k+1} + ln\frac{1+h_k}{1-h_k}$$

ausgeht, denselben auf die Form bringt

$$C_{k-1} - C_{k+1} = h_k - h_{k+1} + 2\left[\tfrac{1}{3} h_k^3 + \tfrac{1}{5} h_k^5 + \cdots\right],$$

über $k = m + 1 \cdots n$ summirt und beachtet, dass

$$C_{m+1} = C_m + h_{m+1} - ln\,(1 + h_m)$$

ist.

Die Convergenz der Reihen, die in den Formeln (15) bis (19), zum Teil stückweise, auftreten, kann zwar als bekannt vorausgesetzt werden, mag hier aber noch in einer Weise gezeigt werden, die zugleich brauchbare Grenzeinschliessungen für die Berechnung derselben liefert.

Bekanntlich[1]) gilt unter der Voraussetzung $0 < a < b$ für beliebige positive Werte von p die Einschliessung

$$p\,a^{p-1} > \frac{b^p - a^p}{b-a} > p\,b^{p-1}.$$

Für $b = \frac{1}{h_{k+1}}$, $a = \frac{1}{h_k}$, liefert dies, da $b - a = 1$,

$$p\,h_k^{1-p} > h_{k+1}^{-p} - h_k^{-p} > p\,h_{k+1}^{1-p},$$

oder, wenn mit $(h_k\,h_{k+1})^p$ multiplicirt wird,

$$p\,h_k\,h_{k+1}^p > h_k^p - h_{k+1}^p > p\,h_{k+1}\,h_k^p,$$

und noch stärker, da $h_k > h_{k+1}$,

$$h_k^{p+1} > \frac{1}{p}\left(h_k^p - h_{k+1}^p\right) > h_{k+1}^{p+1}.$$

Schreiben wir noch in der zweiten der hierin enthaltenen Ungleichungen $k-1$ für k, so lassen sie sich zu der folgenden zusammenfassen:

$$\frac{1}{p}\left(h_k^p - h_{k+1}^p\right) < h_k^{p+1} < \frac{1}{p}\left(h_{k-1}^p - h_k^p\right).$$

Summiren wir wieder über die Werte $k = m + 1 \cdots n$, so erhalten wir

$$(20)\qquad \frac{1}{p}(h_{m+1}^p - h_{n+1}^p) < \sum_{m+1}^{n} h_k^{p+1} < \frac{1}{p}\left(h_m^p - h_n^p\right),$$

und für $n = \infty$,

---

[1]) Vgl. z. B. *Schlömilch,* Übungsbuch, I. S. 3 f.

$$\text{(21)} \qquad \frac{1}{p} h^p_{m+1} < \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{p+1} < \frac{1}{p} h^p_m .$$

Damit ist der bekannte Satz bewiesen, dass für jeden Wert $p > 0$ die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^{p+1}}$$

convergirt; die in den Formeln (15) bis (19) auftretenden Reihen — auch in (15) und (16) kann ja $n = \infty$ werden — sind spezielle Fälle derselben. Der Fehler, den man begeht, wenn man statt der Summe eine der beiden einschliessenden Grenzen setzt, ist kleiner als die Differenz der letzteren und mithin, nach dem eben benutzten Hilfssatz, sicher kleiner als h_m^{p+1}.

Was die Convergenz der Doppel-Reihen für $C_m - C_n$, bezw. für $C_m - C$ betrifft, so bedarf es des Beweises nur für die zweite derselben (16), da mit ihr sicher auch (15) und (17) convergiren. Dass aber die Reihe

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{\lambda}$$

convergirt, ist leicht ersichtlich. Denn es ist

$$\sum_{m+1}^{\infty} h_k^{\lambda+1} = \sum_{m+1}^{\infty} h_k \cdot h_k^{\lambda} < h_{m+1} \cdot \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{\lambda} .$$

Der massgebende Quotient der Reihe ist also kleiner als $\frac{\lambda}{\lambda+1} h_{m+1}$, bleibt mithin auch für $\lambda = \infty$ ein echter Bruch.

8. **Grenzeinschliessung von $C(z)$.** Wenden wir die Formel (21) auf (18) an, also auf die Gleichung

$$C_m - C = \tfrac{1}{2} \, ln\,(1 + h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{2p+1},$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2} \, ln\,(1 + h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_{m+1}^{2p}}{2p\,(2p+1)} < C_m - C$$

$$< \tfrac{1}{2}\, ln\,(1+h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_m^{2p}}{2p\,(2p+1)}\,.$$

Beide Grenzen lassen sich leicht nach Potenzen von h_m entwickeln; man findet, mit Rücksicht auf

$$h_{m+1} = \frac{h_m}{1+h_m} = h_m - h_m^2 + h_m^3 - + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}\, h_m - \tfrac{1}{12}\, h_m^2 - \tfrac{1}{6}\, h_m^3 + \tfrac{17}{40}\, h_m^4 - \cdots < C_m - C < \tfrac{1}{2}\, h_m - \tfrac{1}{12}\, h_m^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}\, h_m^3 - \tfrac{3}{40}\, h_m^4 + - \cdots$$

Die Differenz beider Grenzen beginnt mit

$$\tfrac{1}{3}\, h_m^3 - \tfrac{1}{2}\, h_m^4;$$

wenn man also

$$(22) \qquad C_m\,(z) - C(z) = S_m\,(z) - ln\,(m+z) - C(z)$$
$$= \tfrac{1}{2}\, h_m - \tfrac{1}{12}\, h_m^2$$

setzt, begeht man einen Fehler, der sicher kleiner als $\frac{1}{6}\, h_m^3$ ist, der also durch Vergrösserung von m beliebig verkleinert werden kann. Die Genauigkeit, mit der hiernach C berechnet werden kann, ist aber andererseits beschränkt durch die Genauigkeit, mit der $C_m\,(z)$, also schliesslich $S_m\,(z)$, bekannt ist. — Für $m = 0$ ergiebt (22)

$$\frac{1}{z} - ln\, z - C\,(z) = \frac{1}{2\,z} - \frac{1}{12\,z^2}\,,$$

und dies wiederum einerseits

$$(23) \qquad C\,(z) = \frac{1}{2\,z} + \frac{1}{12\,z^2} - ln\, z,$$

andererseits, mit Rücksicht auf (5),

$$C\,(z+1) = -\frac{1}{2\,z} + \frac{1}{12\,z^2} - ln\, z.$$

Zur Ableitung dieser Näherungsformeln war eine Summirung der Reihen

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{h^{2p}}{2p\,(2p+1)}$$

in geschlossener Form entbehrlich. Dieselbe hat indessen keine Schwierigkeit. —

9. Die specielle harmonische Reihe. Als solche werde die Reihe der reciproken natürlichen Zahlen bezeichnet, die aus der allgemeinen Reihe für $z = 1$ hervorgeht. Formel (2) lässt sich dann schreiben

$$ln\,\frac{n+1}{m+1} < \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k} < ln\,\frac{n}{m}\,. \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

Hiernach liegt z. B. die Summe des zweiten Tausends der Glieder der Reihe zwischen

$$ln\,\tfrac{2001}{1001} = 0,6926\cdots \quad \text{und} \quad ln\,2 = 0,6931\cdots$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = s_n \quad \text{und} \quad s_k - ln\,k = c_k$$

ein, so ist nach (3)

$$lim\,(s_n - s_m) = lim \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k} = ln\left[lim\,\frac{n}{m}\right]. \qquad \begin{matrix} n = \infty\,. \\ m = \infty\,. \end{matrix}$$

Die Funktion c_k ist hier, da z den festen Wert 1 erhalten hat, nur noch von ihrem Index abhängig; sie fällt von $c_1 = 1$ mit wachsendem k beständig, bleibt aber positiv, da $s_n > ln\,(n+1) > ln\,n$ ist, nähert sich also einem constanten echten Bruch c, für den die Einschliessung gilt (§ 5):

$$c_m - ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) < c < c_m\,.$$

Zur Berechnung von c aus einem bekannten c_m dienen dann, entsprechend (15) und (16), die Reihen

$$c_m - c = ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{3}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - + \cdots,$$

$$c_m - c = \qquad \frac{1}{2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{3}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + + \cdots,$$

oder besser die aus beiden hervorgehende Reihe

$$(24) \qquad c_m - c = \frac{1}{2}\,ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{5}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^5} + \cdots$$

Für $m = 1$ erhält man hieraus die Formel

$$(25)\qquad c = 1 - \frac{1}{2} ln\, 2 - \frac{1}{3}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{5}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^5} - \cdots ;$$

die sich in der Theorie der analytischen Fakultäten als Spezialfall der Formel

$$ln\, \Gamma(1+a) = \frac{1}{2} ln \frac{\pi a}{sin\, \pi a} - \frac{1}{2} ln \frac{1+a}{1-a} + (1-c)a - \frac{a^3}{3}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \cdots$$

$$(a^2 \leqq 1)$$

für $a = 1$ ergiebt.[1])

Eine noch rascher convergirende Reihe entsteht, wenn man in

$$\frac{1}{2} ln \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{3}\frac{1}{8k^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{32k^5} + \cdots$$

oder

$$ln \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3.4k^3} + \frac{1}{5.4^2k^5} + \cdots$$

über $k = m+1 \cdots n$ summirt.

Man erhält so:

$$ln \frac{2n+1}{2m+1} = s_n - s_m + \frac{1}{3.4}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{5.4^2}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^5} + \cdots,$$

und wenn man hiervon die Identität

$$ln \frac{n}{m} = ln\, n - ln\, m$$

abzieht, kommt

$$c_m - c_n = ln \frac{2m+1}{m} - ln \frac{2n+1}{n} + \frac{1}{3.4}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{5.4^2}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^5} + \cdots,$$

also für $n = \infty$,

$$c_m - c = ln\left(1 + \frac{1}{2m}\right) + \frac{1}{3.4}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{5.4^2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^5} + \cdots;$$

oder auch

$$(26)\qquad c = s_m - ln \frac{2m+1}{2} - \frac{1}{3.4}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{5.4^2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^5} - \cdots$$

---

[1]) *Natani*, Die höhere Analysis, S. 182.

*

So ist z. B. für $m = 0$

$$(27) \qquad c = \ln 2 - \frac{1}{3.4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{5.4^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^5} - \cdots,$$

und die für $m = 1$ entstehende Formel würde sich aus dem oben angeführten Ausdruck für $\ln \Gamma(1+a)$ durch die Substitution $a = \frac{1}{2}$ ergeben.

Schreiben wir (26) in der Form

$$s_m - \ln m - c = \ln\left(1 + \frac{1}{2m}\right) + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p+1).4^p}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p+1}}$$

und wenden wir die Einschliessung (21) für die Summen der reciproken Potenzen an, so erhalten wir, wenn wir nach Potenzen von $1/m$ entwickeln,

$$\frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} - \frac{1}{24m^3} + \frac{17}{240m^4}\cdots < s_m - \ln m - c$$
$$< \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{80m^4}\cdots$$

Das arithmetische Mittel zwischen beiden Grenzen bis zum dritten Gliede,

$$(28) \qquad s_m - \ln m - c = \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2},$$

ist dann ein Näherungswert, der sich von dem wahren höchstens um $\frac{1}{24m^3}$ entfernt, während die blosse Spezialisirung der Formel (22) zwar denselben Näherungswert ergiebt, aber für den begangenen Fehler den vierfachen Spielraum lässt. In Wirklichkeit ist die Genauigkeit der Formel (28) noch erheblich grösser. Denn die Reihe[1])

$$(28a) \qquad c = s_m - \ln m - \frac{1}{2m} + \frac{B_2}{2}\frac{1}{m^2} - \frac{B_4}{4}\frac{1}{m^4}$$
$$+ - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{B_{2n}}{2n}\frac{1}{m^{2n}},$$

wo die B die Bernouillischen Zahlen bedeuten, liefert c bis auf einen Fehler, der

$$< \frac{B_{2n+2}}{2n+2}\cdot\frac{1}{m^{2n+2}}$$

ist. Bricht man die Reihe bei $n = 1$ ab, so erhält man Formel (28), und der Fehler ist

$$< \frac{B_4}{4m^4} \text{ d. h. } < \frac{1}{120m^4}.$$

---

[1]) *Euler*, Diff.-R. II. § 142. — Für die *Poisson* sche Fehlerbestimmung s. z. B. *Natani*, „Reihe“, S. 321.

Nimmt man $m = 100$ an, so liefert (28) also c bis auf 10 Dezimalen richtig. Die Addition der ersten 100 Reciproken der natürlichen Zahlen, die zu diesem Zweck auf 12 Dezimalen berechnet wurden, ergiebt

$$s_{100} = 5,1873\ 775\ 176\,, \quad \text{während}$$

$$ln\,100 = 4,6051\ 701\ 860 \quad \text{ist. Somit ist}$$

$$c = 0,5822\ 073\ 316 - \frac{1}{2}\cdot 0,01 + \frac{1}{12}\cdot 0,0001$$

$$c = 0,5772\ 156\ 649\,.$$

Für $m = 50$ erhält man c auf 8 Dezimalen richtig, für $m = 25$ auf 7. Bei $m = 20$ beträgt die Abweichung eine Einheit der 7. Stelle, bei $m = 10$ eine Einheit der 6. Stelle. — *Euler* hat c aus der soeben angeführten Reihe, für $m = 10$, auf 16 Stellen berechnet. Wie aus einer Note bei *Gauss*[1]) hervorgeht, hat *Mascheroni* (in mir nicht zugänglich gewesenen *Adnotationes ad Euleri Calc. Int.*) die Rechnung weiter ausgedehnt und einen Wert gefunden, der von der 20. Stelle an von dem durch *Gauss* auf 23 Stellen bestimmten Werte abwich, so dass auf *Gauss'* Veranlassung *Nicolai* die Berechnung bis auf 40 Stellen erstreckte. Er fand

$$c = 0,5772\ 156\ 649\ 015\ 328\ 606\ 065\ 120\ 900\ 824\ 024\ 310\ 421\ldots$$

Ist c auf eine Anzahl Stellen bekannt, so liefert Formel (28) umgekehrt ein Mittel, um die Summe der harmonischen Reihe für grosse Werte von m zu finden. So hat man zur Ermittelung der *Summe der ersten million Glieder* der speziellen harmonischen Reihe

$$\begin{aligned} c &= 0,5772\ 156\ 649\ 015\ 328\ 606\ 065 \\ ln\,m &= 13,8155\ 105\ 579\ 642\ 741\ 041\ 079 \\ \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} &= 0,0000\ 004\ 999\ 999\ 166\ 666\ 667 \\ \hline s_m &= 14,3927\ 267\ 228\ 657\ 236\ 313\ 811\,. \end{aligned}$$

Den Beitrag, den die zweite Million Glieder zur Summe liefert, findet man aus

$$s_n - s_m = ln\frac{n}{m} + \frac{1}{2\,n} - \frac{1}{2\,m} - \frac{1}{12\,n^2} + \frac{1}{12\,m^2}\quad;$$

---

[1]) Disquis. gener., Art. 31.

bezeichnet m eine Million, so hat man

$$s_{2m} - s_m = ln\, 2 - \frac{1}{4\,m} + \left(\frac{1}{4\,m}\right)^2,$$

und mit Benutzung von

$$ln\, 2 = 0,693\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309\ 417\ 232$$

ergiebt sich

$$s_{2m} - s_m = 0,693\ 146\ 930\ 560\ 007\ 809\ 417\ 232.$$

Dies Resultat zeigt recht deutlich die schwache Convergenz der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = ln\, 2$. Denn da, nach der schon in § 4 benutzten *Catalan*schen Formel,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2\,m} = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2\,m}$$
$$= s_{2m} - s_m$$

ist, so würde die Addition der ersten zwei Millionen Glieder der Reihe den soeben berechneten Wert ergeben, also $ln\, 2$ noch nicht auf 6 Stellen richtig liefern.

10. Die alternirende Reihe. Versieht man die geradstelligen Glieder der Reihe $\sum \frac{1}{k+z}$ mit negativem Zeichen, so erhält man die Reihe

$$\mathfrak{S}_{2n}(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - + \cdots - \frac{1}{z+2n-1} + \frac{1}{z+2n},$$

die für $n = \infty$ in eine convergente unendliche Reihe übergeht, da die Glieder sich unbegrenzt der Null nähern, beständig fallen und abwechselnde Zeichen haben. Die Summe der Reihe lässt sich leicht durch die Funktion $C(z)$ ausdrücken. Fassen wir zu dem Ende in $\mathfrak{S}_{2n}(z)$ die positiven und die negativen Glieder für sich zusammen, so ist

$$\mathfrak{S}_{2n}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{2}} + \frac{1}{\frac{z}{2}+1} + \cdots + \frac{1}{\frac{z}{2}+n}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z+1}{2}} + \frac{1}{\frac{z+1}{2}+1} + \cdots + \frac{1}{\frac{z+1}{2}+n-1}\right),$$

also

$$2\,\mathfrak{S}_{2n}(z) = S_n\left(\frac{z}{2}\right) - S_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

Hier würde für $n = \infty$ die rechte Seite in unbestimmter

Form erscheinen, was durch Einführung von $C_n(z)$ vermieden wird. Wir erhalten so:

$$2\mathfrak{S}_{2n}(z) = ln\left(n+\frac{z}{2}\right) + C_n\left(\frac{z}{2}\right) - ln\left(n-1+\frac{z+1}{2}\right)$$
$$- C_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) = ln\,\frac{2n+z}{2n+z-1} + C_n\left(\frac{z}{2}\right) - C_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right),$$

und für $n=\infty$,

$$\mathfrak{S}(z) = \frac{1}{2}\left[C\left(\frac{z}{2}\right) - C\left(\frac{z+1}{2}\right)\right], \tag{29}$$

wie auch durch (4) leicht zu bestätigen.

Zu einem anderen Ausdruck gelangt man, wenn man schreibt[1]):

$$\mathfrak{S}_{2n}(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+2n} - 2\left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+3} + \cdots\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{z+2n-1}\right] = S_{2n}(z) - S_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) = C_{2n}(z) - C_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$
$$+ ln\,2\,\frac{2n+z}{2n+z-1}.$$

$$\mathfrak{S}(z) = C(z) - C\left(\frac{z+1}{2}\right) + ln\,2. \tag{30}$$

Die Vergleichung beider Formeln ergiebt die Beziehung

$$C\left(\frac{z}{2}\right) + C\left(\frac{z+1}{2}\right) = 2\,[C(z) + ln\,2], \text{ oder} \tag{31}$$
$$C(z) + C(z+\tfrac{1}{2}) = 2\,C(2z) + 2\,ln\,2.$$

Beispiele. Für $z=1$ ist $C(z) = C\left(\frac{z+1}{2}\right) = c$.

Formel (30) giebt dann das bekannte Resultat $\mathfrak{S}(1) = ln\,2$, während aus (29) oder (31) der schon in § 6 gefundene Ausdruck

$$C(\tfrac{1}{2}) = 2\,ln\,2 + c$$

folgt. Nach (29) und (11) ist

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \cdots = \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}[C(\tfrac{1}{4}) - C(\tfrac{3}{4})] = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Nach (30):

$$1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{10} + - \cdots = \tfrac{1}{3}\mathfrak{S}(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}[C(\tfrac{1}{3}) - C(\tfrac{2}{3}) + ln\,2]$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{3} + ln\,2\right);$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{11} + - \cdots = \tfrac{1}{3}\mathfrak{S}(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{6}[C(\tfrac{1}{3}) - C(\tfrac{5}{6})]$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{3} - ln\,2\right).$$

---

[1]) Vgl. *Natani*, „Reihe“, S. 286.

Setzen wir z gleich der rationalen Zahl $\frac{m}{n}$, so ist nach (29)

$$2\,\mathfrak{S}\left(\frac{m}{n}\right)=C\left(\frac{m}{2n}\right)-C\left(\frac{m+n}{2n}\right).$$

Unter der Bedingung $0<m<n$ liefert dann die zweite der Formeln (14)

$$2\,\mathfrak{S}\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\pi}{2}\left(cotg\,\frac{m\pi}{2n}-cotg\,\frac{(m+n)\pi}{2n}\right)-\sum_{1}^{n-1}\left(cos\,\frac{k\pi m}{n}-\right.$$

$$\left.cos\,\frac{k\pi(m+n)}{n}\right)ln\left(2-2\,cos\frac{k\pi}{n}\right)+(-1)^{m+1}\left[1-(-1)^{n}\right]ln\,2\,.$$

Da $cos\,\frac{k\pi m}{n}-cos\left(\frac{k\pi m}{n}+k\pi\right)=cos\,\frac{k\pi m}{n}\left[1-(-1)^{k}\right]$ ist, so fallen in der Summe die Glieder für gerades k fort, und es ergiebt sich,

wenn n *gerade* ist,

$$(32)\;2\,\mathfrak{S}\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\pi}{sin\frac{m\pi}{n}}-2\sum_{1}^{\frac{n}{2}}cos\,\frac{(2k-1)\,m\pi}{n}\,ln\left(2-2\,cos\frac{(2k-1)\pi}{n}\right),$$

und wenn n *ungerade* ist,

$$(33)\;2\,\mathfrak{S}\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\pi}{sin\,\frac{m\pi}{n}}-2\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}cos\,\frac{(2k-1)\,m\pi}{n}\,ln\left(2-2\,cos\,\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$$
$$+(-1)^{m-1}\,2\,ln\,2\,.$$
$$(0<m<n).$$

Damit sind alle alternirenden Reihen rationaler Zahlen, deren Nenner eine arithmetische Reihe bilden, summirt. Denn es ist

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-+\cdots=\frac{1}{b}\,\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right).$$

Die Formeln (32) und (33) geben $\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right)$ allerdings nur, wenn $a<b$. Ist nun $a>b$, etwa $a=pb+q$, wo p und q ganzzahlig und $q<b$ ist, so kann man die Reihe nach rückwärts bis zum Nenner q fortsetzen und hat dann, indem man das Hinzugefügte wieder abzieht,

$$\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right)=\pm\left[\mathfrak{S}\left(\frac{q}{b}\right)-b\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q+b}+\frac{1}{q+2b}-+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{q+(p-1)\,b}\right)\right],$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem p gerade oder ungerade ist, so dass wir auch schreiben können

$$(34)\quad \mathfrak{S}\left(p+\frac{q}{b}\right)=(-1)^p\left[\mathfrak{S}\left(\frac{q}{b}\right)-\mathfrak{S}_{p-1}\left(\frac{q}{b}\right)\right].\quad (q<b)$$

Zur *angenäherten* numerischen Berechnung von $\mathfrak{S}(z)$, besonders für grosse Werte von z, hat man aus (30), wenn man für $C(z)$ den Näherungswert aus (23) setzt,

$$(35)\quad \mathfrak{S}(z)=\frac{1}{2z}-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{12z^2}-\frac{1}{3(z+1)^2}+ln\frac{z+1}{z}.$$

(Für $z=1$ heben sich die Ungenauigkeiten dieser Formel vollständig auf, sie liefert richtig $\mathfrak{S}(1)=ln\,2$.)

11. Abgeleitete Reihen. Werden alle Glieder der Reihe $\mathfrak{S}$ positiv genommen, so geht sie in die divergente Reihe S über, sie convergirt also nur *bedingt.* Convergenz und Summe der Reihe sind daher abhängig von dem Verhältnis, in welchem die positiven und negativen Glieder in den ersten n Gliedern, als deren Grenzwert die Summe der Reihe anzusehen ist, auftreten. Wie schon in der Einleitung und im § 4 angedeutet, ist die Untersuchung dieser Abhängigkeit mit den hier gegebenen Mitteln sehr einfach ausführbar. Der einzuschlagende Weg ist derselbe, dem Herr *Natani*[1]) gefolgt ist, nur dass wir keinen Gebrauch von bestimmten Integralen machen.

Wir leiten aus der gegebenen Reihe $\mathfrak{S}$ eine neue ab, in der positive und negative Glieder nicht mehr in gleicher Anzahl, sondern im Verhältnis $p:q$ vorhanden sein sollen, und zwar so, dass wir die p ersten positiven Glieder der gegebenen Reihe unmittelbar auf einander folgen lassen, dann die q ersten negativen Glieder einschalten, dann wieder p positive und q negative Glieder nehmen u. s. f. Da p und q als endlich vorausgesetzt werden, besteht die neue Reihe aus alternirenden Gruppen von endlich vielen Gliedern. Diese Gliedergruppen werden schliesslich unendlich klein; ob sie *beständig* abnehmen, ist nicht ohne Weiteres ersichtlich. Hier genügt aber auch die erstere Eigenschaft zur Convergenz, da

[1]) A. a. O. S. 287.

sich leicht ergiebt, dass die Summe einer endlichen Anzahl der Gruppen sich mit wachsender Anzahl einer festen Grenze nähert. Fassen wir nämlich die beiden ersten Gruppen,

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z+2}+\cdots+\frac{1}{z+2p-2}$$

und

$$-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}-\cdots-\frac{1}{z+2q-1},$$

zu einem Gliede u_1 der neuen Reihe zusammen, so können wir, $p>q$ vorausgesetzt, schreiben:

$$u_1=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}+-\cdots+\frac{1}{z+2q-2}-\frac{1}{z+2q-1}+\frac{1}{z+2q}\right)$$
$$+\frac{1}{z+2q+2}+\cdots+\frac{1}{z+2p-2}$$

und erhalten, wenn wir np und nq statt p und q setzen, die Summe der $2n$ ersten Gruppen

$$U_n(z)=\mathfrak{S}_{2nq}(z)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{2}+nq+1}+\frac{1}{\frac{z}{2}+nq+2}+\cdots+\frac{1}{\frac{z}{2}+np-1}\right),$$

also, da nach (3)

$$\lim_{n=\infty}\sum_{nq+1}^{np-1}\frac{1}{\frac{z}{2}+k}=ln\frac{p}{q}$$

ist, wenn wir zur Grenze übergehen,

$$U(z)=\mathfrak{S}(z)+\frac{1}{2}ln\frac{p}{q}\,. \tag{36}$$

Für $q>p$ hätte man ganz ebenso

$$U_n=\mathfrak{S}_{2qn}-\frac{1}{z+2p}-\frac{1}{z+2p+2}-\cdots-\frac{1}{z+2q},\ \text{also}$$

$$U=\mathfrak{S}-\frac{1}{2}ln\frac{q}{p},$$

mithin dasselbe Resultat.

Die Summe der $2n$ ersten Gruppen, oder der $n(p+q)$ ersten Einzelglieder, der neuen Reihe bleibt also mit wachsendem n endlich; da nun ein Oscilliren der Reihe durch das schliessliche Verschwinden der Gruppen ausgeschlossen ist, muss die Reihe, auch wenn man an anderer Stelle abbricht, demselben Grenzwert zustreben.

Es ist deutlich, wie die ursprüngliche und die neue Reihe sich für jedes endliche n um eine Anzahl Glieder unterscheiden, die mit wachsendem n selbst eine unendliche

Reihe mit der Summe $\frac{1}{2}\, ln\, \frac{p}{q}$ bilden. Ist $q = p$, so verschwindet dieser Betrag, und die abgeleitete Reihe hat, wie zu erwarten war, dieselbe Summe wie die ursprüngliche.

Die Wertänderung ist übrigens einerseits von z, andererseits auch davon unabhängig, wie die einzelnen Glieder innerhalb der $2n$ ersten Gruppen angeordnet sind, da es bei der Ermittelung der Summe nur darauf ankam, *wieviel* Glieder jeder Art vorhanden waren. —

Die Trennung der Fälle $p > q$ und $p < q$ lässt sich auf folgende Art vermeiden. Schreiben wir

$$u_1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} + \cdots + \frac{1}{z+2p-2} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} - \cdots - \frac{1}{z+2q-1}$$

$$= \tfrac{1}{2} S_{p-1}\left(\frac{z}{2}\right) - \tfrac{1}{2} S_{q-1}\left(\frac{z+1}{2}\right), \text{ so ist}$$

$$2\, U_n(z) = S_{pn-1}\left(\frac{z}{2}\right) - S_{qn-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

$$= C_{pn-1}\left(\frac{z}{2}\right) - C_{qn-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) + ln\, \frac{\frac{z}{2} + np - 1}{\frac{z+1}{2} + nq - 1},$$

also für $n = \infty$,

$$2\, U(z) = C\left(\frac{z}{2}\right) - C\left(\frac{z+1}{2}\right) + ln\, \frac{p}{q},$$

woraus sich nach (29) Formel (36) ergiebt.

Beispiele. Es war $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\mathfrak{S}(\frac{1}{2})$, daher für $p = 2,\ q = 1$,

$$1 + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{7} + + - \cdots = \tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{S}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\, ln\, 2\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\, ln\, 2\,.$$

Für $z = 1$ hat man

$\mathfrak{S}(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = ln\, 2.$ Demnach ist $U(1) = ln\, 2\sqrt{\frac{p}{q}}$, so dass man die Logarithmen beliebiger rationaler oder quadratisch irrationaler Zahlen durch die reciproken natürlichen Zahlen darstellen kann. — Für $p = 1$, $q = 4$, erhält man so:

$$0 = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + - - - - \cdots$$

Eine Entscheidung darüber, ob die Gliedergruppen beständig abnehmen, oder bald steigen, bald fallen, lässt sich

mit Hilfe der Formel (22) gewinnen, da jede Gruppe als ein Ausschnitt einer harmonischen Reihe anzusehen ist. Bezeichnen wir die k te Gruppe mit v_k, so ist die n te positive Gruppe

$$v_{2n-1} = \frac{1}{z+2(n-1)p} + \frac{1}{z+2(n-1)p+2} + \cdots + \frac{1}{z+2np-2},$$

also

$$2\, v_{2n-1} = S_{np-1}\left(\frac{z}{2}\right) - S_{(n-1)p-1}\left(\frac{z}{2}\right).$$

Ebenso gilt für die n te negative Gruppe

$$v_{2n} = \frac{1}{z+(2n-2)q+1} + \cdots + \frac{1}{z+2nq-1},$$

$$2\, v_{2n} = S_{nq-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) - S_{(n-1)q-1}\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

Nach (22) ist nun, für hinreichend grosse m und m_1,

$$S_m(x) - S_{m_1}(x) = ln\, \frac{m+x}{m_1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+x} - \frac{1}{m_1+x}\right)$$
$$+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(m+x)^2} - \frac{1}{(m_1+x)^2}\right),$$

also, wenn wir $\frac{z}{2} = x$ setzen,

$$2\, v_{2n-1} = ln\, \frac{np-1+x}{np-p-1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{np-1+x} - \frac{1}{np-p-1+x}\right)$$
$$+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(np-1+x)^2} - \frac{1}{(np-p-1+x)^2}\right)$$
$$= -\, ln\left(1 - \frac{p}{np-1+x}\right) + \frac{1}{2np}\left(\frac{1}{1-\frac{1-x}{np}} - \frac{1}{1-\frac{p+1-x}{np}}\right)$$
$$+ \frac{1}{12 n^2 p^2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1-x}{np}\right)^2} - \frac{1}{1-\left(\frac{p+1-x}{np}\right)^2}\right).$$

Entwickeln wir nach Potenzen von $\frac{1}{n}$, so wird, wenn wir nur die beiden ersten Potenzen berücksichtigen,

$$2v_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\left(1 - \frac{z-1}{p}\right).$$

Setzen wir hierin $z+1$ statt z und q statt p, so erhalten wir

$$2v_{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\left(1 - \frac{z}{q}\right),$$

und, ebenfalls aus $2\,v_{2n-1}$, für $n+1$ statt n,

$$2v_{2n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\left(-1 - \frac{z-1}{p}\right).$$

Demnach ist

$$2(v_{2n-1} - v_{2n}) = \frac{1}{2n^2}\left(\frac{z}{q} - \frac{z-1}{p}\right),$$

$$2(v_{2n} - v_{2n+1}) = \frac{1}{2n^2}\left(2 - \frac{z}{q} + \frac{z-1}{p}\right),$$

und zwar bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{n^3}$ genau. Für einen hinreichend grossen Wert von n haben also die Differenzen $v_{2n-1} - v_{2n}$ und $v_{2n} - v_{2n+1}$ bezw. dieselben Vorzeichen wie

$$w_1 = \frac{z}{q} + \frac{1-z}{p} \quad \text{und} \quad w_2 = 2 - w_1 \, .$$

Sind w_1 und w_2 beide positiv, so nehmen, von jenem n an, die Gliedergruppen beständig ab. Dies ist, wie leicht ersichtlich, für ganz beliebige Werte p und q der Fall, sobald (z als reell vorausgesetzt)

$$0 \leqq z \leqq 1$$

ist, da dann auch w_1 in demselben Intervall liegt, mithin w_2 sich zwischen 1 und 2 bewegt. Insbesondere gilt dies also von allen auf die in Rede stehende Art aus der „speziellen" harmonischen Reihe abgeleiteten Reihen.

Ist aber $z > 1$ oder negativ, so hängt das Vorzeichen der Grössen w von der Wahl von p und q ab. Ist z. B. $z = 2$, so ist $w_1 = \frac{2}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2p-q}{pq}$, also negativ, wenn $p = 1$, $q = 3$ ist. In der That ist dann

$$v_{2n} = \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n+1} = \frac{108n^2 - 36n - 1}{216n^3 - 108n^2 - 6n + 3} \, .$$

$$v_{2n-1} = \frac{1}{2n}, \quad v_{2n+1} = \frac{1}{2n+2},$$

und schon von $n = 1$ an $v_{2n-1} < v_{2n}$, aber $v_{2n} > \frac{3}{6n+1} > v_{2n+1}$, so dass die Gruppen von Anfang an abwechselnd steigen und fallen. Man kann also durch passende Wahl von p und q leicht Reihen von dieser Beschaffenheit herstellen, die trotzdem convergiren.

Übrigens ist, auch ohne die Beziehung $w_1 + w_2 = 2$, klar, dass, wenn eine der beiden Grössen w negativ ist, die andere nicht auch negativ sein kann, denn sonst würden die

Gruppen beständig zunehmen, könnten also nicht unendlich klein werden.

Ist $q = p$, so fällt z ganz heraus, es wird

$$w_1 = \frac{1}{p}, \quad w_2 = \frac{2p-1}{p},$$

d. h. beide sind stets positiv, *Gruppen aus gleich vielen Gliedern nehmen beständig ab, aus welcher harmonischen Reihe man auch die Glieder entnehme.*

12. Verallgemeinerung. Es liegt nahe, die Gliederzahl der alternirenden Gruppen in der abgeleiteten Reihe variabel zu machen. Bezeichnen wir sie mit p_n für die positiven, q_n für die negativen Glieder, so beginnt die neue Reihe also mit den ersten p_1 positiven Gliedern der ursprünglichen, dann folgen die ersten q_1 negativen, dann die nächsten p_2 positiven und q_2 negativen Glieder, u. s. f. Schreiben wir noch

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_k = Q_k \;, \; p_1 + p_2 + \cdots + p_k = P_k,$$

so ist also die n te positive Gruppe

$$v_{2n-1} = \frac{1}{z+2\,P_{n-1}} + \frac{1}{z+2\,P_{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{z+2\,P_n-2},$$

und die darauf folgende n te negative Gruppe

$$v_{2n} = \frac{1}{z+2\,Q_{n-1}+1} + \frac{1}{z+2\,Q_{n-1}+3} + \cdots + \frac{1}{z+2\,Q_n-1},$$

so dass also die Summe der ersten $2n$ Gruppen

$$V_{2n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} + \cdots + \frac{1}{z+2\,P_n-2}$$
$$- \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+3} + \cdots \frac{1}{z+2\,Q_n-1}\right)$$

ist, woraus

$$2\,V_{2n} = S_{P_n-1}\left(\frac{z}{2}\right) - S_{Q_n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

$$= ln \frac{P_n - 1 + \frac{z}{2}}{Q_n - 1 + \frac{z+1}{2}} + C_{P_n-1}\left(\frac{z}{2}\right) - C_{Q_n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

Es seien nun p_n und q_n so gewählt, dass P_n und Q_n mit n unendlich werden.

Wäre nämlich etwa $lim\, P_n$ endlich, so müsste $lim\, p_n = 0$ sein, also p_n bei einem gewissen n unter 1 sinken; dies bedeutet aber ein Aufhören der positiven Glieder. Wäre dann

auch $\lim Q_n$ endlich, so bräche die Reihe ab, während bei $\lim q_n \geqq 1$ die negativen Glieder weiter laufen und die Reihe divergent machen würden.

Werden aber P_n und Q_n beide unendlich, so ist

$$(37) \quad \lim_{n=\infty} V_{2n} = \mathfrak{S}(z) + \tfrac{1}{2} \ln \left[\lim \frac{P_n}{Q_n}\right].$$

$Lim\ V_{2n}$ bleibt also endlich mit $\lim P_n : Q_n$. Kommt noch hinzu, dass die Gruppen v die Null zur Grenze haben, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe wird durch Formel (37) angegeben. Ist dagegen $\lim v_{2n-1} = \lim v_{2n}$ *endlich*, so wird die neue Reihe, als Summe der einzelnen v aufgefasst, in den Grenzen $\lim V_{2n}$ und $\lim (V_{2n} + v_{2n+1})$ oscilliren; indessen würde dann jede der Reihen

$$\sum_1^\infty (v_{2k-1} - v_{2k}) = \lim V_{2n} \text{ u. } v_1 - \sum_1^\infty (v_{2k} - v_{2k+1}) = \lim V_{2n+1}$$

als convergent zu bezeichnen sein, und je nach der Definition der neuen Reihe durch die eine oder die andere Form, hat sie dann die eine oder die andere Summe.

Zur Untersuchung von v_∞ hat man

$$2 v_{2n-1} = S_{P_n - 1}\left(\frac{z}{2}\right) - S_{P_{n-1} - 1}\left(\frac{z}{2}\right),$$

also nach (3),

$$2 \lim v_{2n-1} = \ln \left(\lim \frac{P_n}{P_{n-1}}\right) = \ln \left[\lim \left(1 + \frac{p_n}{P_{n-1}}\right)\right],$$

(38) und ebenso

$$2 \lim v_{2n} = \ln \left(\lim \frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right) = \ln \left[\lim \left(1 + \frac{q_n}{Q_{n-1}}\right)\right].$$

v_∞ wird also immer und nur dann verschwinden, wenn P_n und Q_n stärker unendlich werden, als p_{n+1} und q_{n+1}.

Beispiele. Die Voraussetzung $\lim P_n = \infty$, $\lim Q_n = \infty$, ist erfüllt, sobald die Reihen $p_1 + p_2 + \cdots$, $q_1 + q_2 + \cdots$ divergiren, zunächst also sicher, wenn auch p_n und q_n mit n unendlich werden, so dass die Gruppen schliesslich selbst unendliche Reihen bilden. Dass die Convergenz der dann entstehenden Doppelreihe nicht ausgeschlossen ist, zeigt sich an dem Falle, wo p_n und q_n ganze rationale Funktionen von n sind. Sei

p_n vom Grade r, q_n vom Grade s, so ist P_n vom Grade $r+1$, Q_n vom Grade $s+1$, und da

$$v_{2n-1} < \frac{p_n}{z+2P_{n-1}}, \qquad v_{2n} < \frac{q_n}{1+z+2Q_{n-1}},$$

so folgt, auch ohne die Benutzung von (38), unmittelbar, dass

$$lim\, v_{2n-1} = lim\, v_{2n} = 0$$

ist. $lim \frac{P_n}{Q_n}$ wird nun nur dann endlich und von Null verschieden, wenn beide Funktionen von gleichem Grade sind, also $r=s$ ist; ist $r \gtrless s$, so wird der Quotient ∞ oder 0, der Logarithmus desselben also $\pm\infty$, und die v-Reihe divergirt.

So erhält man, um einen ganz einfachen Fall zu wählen, für $z=1$, $p=1$, $q=n$, die Reihe

$$1 - (\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{3} - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{5} - (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12}) + \tfrac{1}{7} \\ - (\tfrac{1}{14} + \cdots + \tfrac{1}{20}) + - \cdots$$

Die allgemeinen Glieder derselben sind

$$v_{2n-1} = \frac{1}{2n-1},$$

und, da $Q_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ist,

$$v_{2n} = \frac{1}{n(n-1)+2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Trotzdem nun $v_{2n} < \frac{n}{n(n-1)+2}$, also $lim\, v_{2n} = 0$ ist, wird die Reihe mit

$$ln \frac{P_n}{Q_n} = ln \frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

negativ unendlich und giebt so ein einfaches Beispiel für eine, trotz der unbegrenzten Abnahme der Glieder, *divergente*, alternirende Reihe. (Vgl. § 3.)

Ist aber $s=r$ und $p_n = a_r n^r + \cdots$, $q_n = b_r n^r + \cdots$, so ist

$$\begin{aligned} P_n &= a_r \sum_1^n k^r + \cdots, \\ Q_n &= b_r \sum_1^n k^r + \cdots, \end{aligned} \qquad lim \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_r}{b_r} = lim \frac{p_n}{q_n}.$$

Die Summenänderung hängt also nur von den Coefficienten der höchsten Potenz in p_n und q_n ab, so dass wir den Satz aussprechen können:

Sind p_n und q_n ganzzahlige, ganze rationale Funktionen gleichen Grades von n, und bildet man aus den Gliedern der alternirenden harmonischen Reihe eine neue Reihe, in der auf je p_n positive Glieder der ersteren, je q_n negative Glieder derselben folgen, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe übertrifft die der ersten um

$$\frac{1}{2}\, ln \left(\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{q_n}\right) .$$

Insbesondere wird keine Summenänderung stattfinden, wenn die Coefficienten der höchsten Potenz in p_n und q_n gleich sind. Sind die Funktionen vom Grade 0, also constant, so entsteht Formel (36).

Ein Beispiel für den Fall, dass die Gruppen für $n=\infty$ nicht der 0, sondern festen endlichen Grenzen zustreben, bietet sich, wenn p_n und q_n Exponentialfunktionen sind. Sei etwa $p_n = a^{n-1}$ und $a > 1$, also $P_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - a}{a-1}$ so ist nach (38)

$$\lim 2v_{2n-1} = ln\left(\lim \frac{P_n}{P_{n-1}}\right) = ln\, a\, .$$

Die v-Reihe kann also nur convergiren, wenn auch $\lim 2v_{2n} = ln\, a$, was etwa durch die Wahl von $q_n = a^{n-1} + b^{n-2}$ $(b < a)$ zu erreichen ist. Man hat dann
$\lim V_{2n} = \mathfrak{S}(z) + \frac{1}{2}\, ln\, 1 = \mathfrak{S}(z)$ und $\lim V_{2n+1} = \mathfrak{S}(z) + \frac{1}{2}\, ln\, a$.

$\sum\limits_1^\infty v_k$ wird also zwischen diesen beiden Werten oscilliren, wofern nicht durch Zusammenfassung je zweier aufeinander folgender Glieder in der oben angedeuteten Weise für die Convergenz gesorgt wird.

13. Der *Schlömilch*sche Satz verallgemeinert. Wie in der Einleitung erwähnt, hat Herr *Pringsheim* eine Methode gegeben, um die Wertveränderung einer bedingt convergenten Reihe unter Umständen auf die einer anderen zurückzuführen. So führt der ebenda genannte Satz von *Schlömilch* die Wertänderung einer beliebigen convergenten alternirenden Reihe für den Fall, dass die positiven und negativen Glieder nicht

mehr in dem Verhältnis 1:1, sondern in dem Verhältnis $p:q$ auftreten, auf die entsprechende Wertänderung der harmonischen Reihe zurück, die hier in § 11 ermittelt ist. Wir wollen diesen, in so enger Beziehung zur harmonischen Reihe stehenden Satz elementar herleiten, dabei aber, wie in § 12, statt des constanten Verhältnisses $p:q$ das variable $p_n:q_n$, sowie die Bedingung $P_\infty = \infty$, $Q_\infty = \infty$ einführen.

Zwei divergente Reihen positiver Glieder

$$u_1, u_3, u_5, \cdots \quad \text{und} \quad u_2, u_4, u_6, \cdots$$

seien nun zu der bedingt convergenten Reihe

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + - \cdots \quad = U$$

vereinigt, wobei nicht erforderlich ist, dass die u_k mit ungeradem Index demselben Bildungsgesetz folgen, wie die Glieder mit geradem Index. U_k sei die Summe der ersten k Glieder. Bilden wir jetzt die neue Reihe

$$(u_1 + u_3 + \cdots + u_{2p_1-1}) - (u_2 + u_4 + \cdots + u_{2q_1}) + - \cdots,$$

so ist (bei derselben Bezeichnung wie in § 12) die mit einer negativen Gruppe abbrechende Summe der ersten $2n$ Gruppen oder $P_n + Q_n$ Einzelglieder:

$$V_{2n} = (u_1 + u_3 + \cdots + u_{2P_n-1}) - (u_2 + u_4 + \cdots + u_{2Q_n}).$$

Je nachdem nun $P_n > Q_n$ oder $Q_n > P_n$ ist, wird V_{2n} im Vergleich mit $U_{2P_n} = (u_1 + u_3 + \cdots + u_{P_n-1}) - (u_2 + \cdots + u_{2P_n})$ $P_n - Q_n$ negative Glieder *weniger*, oder $Q_n - P_n$ solche Glieder *mehr* enthalten, so dass wir schreiben können

$$V_{2n} - U_{2P_n} \left\{ \begin{array}{l} = \sum\limits_{Q_n+1}^{P_n} u_{2k}, \text{ wenn } P_n > Q_n, \\ = -\sum\limits_{P_n+1}^{Q_n} u_{2k}, \text{ wenn } P_n < Q_n. \end{array} \right.$$

Ziehen wir nun nach der *Pringsheim*schen Methode die harmonische Reihe zur Vergleichung heran, indem wir schreiben

$$V_{2n} - U_{2P_n} = \sum_{Q_n+1}^{P_n} (k \cdot u_{2k}) \cdot \frac{1}{k}, \qquad (P_n > Q_n)$$

so muss es zwischen dem kleinsten und dem grössten der Werte

$$(Q_n + 1)\, u_{2Q_n+2}\,,\; (Q_n + 2)\, u_{2Q_n+4}\,,\; \cdots P_n\, u_{2P_n}$$

einen Mittelwert M_n geben, dergestalt dass

$$V_{2n} - U_{2P_n} = M_n \sum_{Q_n+1}^{P_n} \frac{1}{k}\,.$$

Ist nun $\lim\limits_{n=\infty} n u_{2n} = m$, wo m endlich (auch 0) oder unendlich sein kann, so nimmt auch jedes der Produkte, deren Mittelwert M_n ist, für $n = \infty$ den Wert m an, so dass auch $\lim M_n$ mit diesem übereinstimmen muss, und wir erhalten

$$(39) \qquad \lim V_{2n} = U + \lim_{n=\infty} \left[n \cdot u_{2n}\, ln \frac{P_n}{Q_n} \right],$$

und zwar auch für den Fall $P_n < Q_n$, da dann zwar P_n und Q_n zu vertauschen sind, dafür aber der Logarithmus das negative Zeichen bekommen muss und beide Operationen einander aufheben.

Im Übrigen gelten auch für Formel (39) die bei (37) gemachten Bemerkungen.

So ist Σv_k nur dann convergent und gleich $\lim V_{2n}$, wenn $\lim v_{2n+1} = 0$. Nun ist

$$v_{2n+1} = \sum_{P_n+1}^{P_{n+1}} u_{2k-1}\,,$$

also, auf demselben Wege wie vorher,

$$(40) \qquad \begin{aligned} \lim v_{2n+1} &= \lim_{n=\infty} \left[n \cdot u_{2n-1}\; ln \frac{P_{n+1}}{P_n} \right] \\ &= \lim_{n=\infty} \left[n \cdot u_{2n-1} \cdot ln \left(1 + \frac{p_{n+1}}{P_n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ist z. B. $u_k = \dfrac{1}{k \cdot ln\,(k+1)}$, sowohl für gerade wie für ungerade k, so ist

$$\lim n u_{2n} = \lim n u_{2n-1} = 0.$$

Der Wert von v_{2n+1}, sowie in (39) der von $n\, u_{2n} ln \dfrac{P_n}{Q_n}$ wird aber ausserdem noch davon abhängen, wie P_n und Q_n unendlich werden. Sind p_n und q_n, also auch P_n und Q_n, ganze Funktionen gleich hohen Grades von n, so wird, nach dem in 12. Gesagten, $\lim v_{2n+1} = 0$ und $\lim V_{2n} = \lim V_{2n+1}$

$= U$ sein, also keine Wertänderung eintreten. Während dort dagegen die neue Reihe divergirte, sobald der Grad der Funktionen ein verschiedener war, wird hier die Convergenz noch statthaben, wenn der Grad von p_n und der von q_n sich um eine Einheit unterscheiden. Denn ist, als Folge davon, etwa

$$P_n = a_{r+1} n^{r+1} + \cdots,$$
$$Q_n = b_r n^r + \cdots,$$

so ist $n u_{2n} \cdot ln \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{2} \frac{ln\left(\frac{a_{r+1}}{b_r} n + \frac{a_r}{b_r} + \cdots\right)}{ln(2n+1)}$,

nähert sich also der Grenze $\frac{1}{2}$. Da ausserdem $lim\ v_{2n+1} = 0$, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe übertrifft die der ursprünglichen um $\frac{1}{2}$, während eine Verminderung um $\frac{1}{2}$ eintreten wird, wenn P_n vom Grade r, Q_n vom Grade $r+1$ ist. Von dieser Bedingung abgesehen, sind also sowohl die Grade als die Coefficienten der für p_n und q_n zu wählenden Funktionen ganz gleichgültig. Gelegentlich sei noch bemerkt, dass zwei solcher v-Reihen, wenn in der einen p_n, in der andern q_n den höheren Grad besitzt, hiernach stets die Differenz ± 1 ergeben, so dass danach die Einheit auf unzählig viele Arten durch Brüche von der Form $\frac{1}{k\, ln\, (k+1)}$ dargestellt werden kann.

Sind p und q constant, so geht (39) in den *Schlömilch*schen Satz über, wonach die Wertänderung der u-Reihe

$$\frac{1}{2} ln \frac{p}{q} \cdot lim(n u_n)$$

beträgt. —

Versagen wird Formel (39) nur in den Fällen, wo die Wertänderung in unbestimmter Form erscheint. Dies tritt ein, wenn

$$lim \frac{P_n}{Q_n} = 0 \text{ oder } \infty \text{ und gleichzeitig } lim\ nu_{2n} = 0;$$

sowie, wenn

$$lim \frac{P_n}{Q_n} = 1 \qquad \text{und dabei} \qquad lim\ nu_{2n} = \infty$$

ist. Da in diesen Fällen der wahre Wert von $0 \cdot \infty$ davon

abhängt, in welcher Weise P_n und Q_n unendlich und u_{2n} Null wird, lassen sie sich nicht erledigen, ohne über diesen Punkt besondere Voraussetzungen zu machen.

Dabei ist ferner zu beachten, dass zwar mit $lim\, n\, u_{2n} = \infty$ auch jedes der Produkte

$$(Q_n + 1)\, u_{2Q_n+2}\,, \cdots P_n\, u_{2P_n}\,,$$

und also auch ihr Mittelwert M_n, *unendlich* wird, dass aber der *Grad* des Unendlichwerdens — und auf diesen kommt es wesentlich an — für den Mittelwert i. A. nicht derselbe sein wird, wie für $n\, u_{2n}$. Ist z. B.

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \begin{matrix} p_n = 2an + b, \\ q_n = 2an\,, \end{matrix} \quad \text{also} \quad \begin{matrix} P_n = a\,(n^2 + n) + bn\,, \\ Q_n = a\,(n^2 + n)\,, \end{matrix}$$

so bilden jene Produkte die Reihe

$$\sum_{Q_n+1}^{P_n} \frac{k}{\sqrt{2k}} = \sum_{an^2+an+1}^{an^2+an+bn} \sqrt{\frac{k}{2}}\,,$$

und jedes derselben wird ∞ wie $n\sqrt{\frac{a}{2}}$ während $n\, u_{2n} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ weniger stark ∞ wird.

Bisweilen — und so auch hier — führt aber schon die Bemerkung zum Ziel, dass der Ausschnitt $\sum\limits_{Q_n+1}^{P_n} u_{2k}$, der für $P_n > Q_n$ die Wertänderung darstellt, zwischen den Grenzen

$$\frac{P_n - Q_n}{u_{2\,Q_n+2}} \quad \text{und} \quad \frac{P_n - Q_n}{u_{2\,P_n}}$$

liegen muss. Für unser Beispiel fallen nämlich beide Grenzen zu dem Werte $\frac{b}{\sqrt{2a}}$ zusammen, der mithin die Wertänderung angiebt, die nach (39) in der Form $\infty \,.\, 0$ erscheinen würde.

Ob $lim\, v_{2n+1}$ verschwindet, darf in solchem Falle ebensowenig nach (40) beurteilt werden, da auch diese Formel über die Art des Unendlichwerdens von M_n i. A. nicht den richtigen Aufschluss erteilt. Nach (40) wäre der Mittelwert für unser Beispiel mit

$$lim\, n\, u_{2n-1} = lim\, \sqrt{\frac{n}{2}}$$

in Anschlag zu bringen, während

$$ln\left(1+\frac{p_{n+1}}{P_n}\right)=ln\left(1+\frac{2an+(2a+b)}{an^2+(a+b)n}\right),$$

nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickelt, mit $\frac{2}{n}$ beginnt. Hiernach würde $lim\ v_{2n+1}$ mit $\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{2}{n}$ verschwinden, während in Wahrheit, wie wir sahen,

$$lim\ v_{2n+1}=lim\ \sqrt{\frac{a}{2}}\cdot n\,ln\left(1+\frac{p_{n+1}}{P_n}\right)=\sqrt{2a}$$

zu setzen ist. Da auch

$$lim\ v_{2n}=lim\sum_{an(n-1)+1}^{an(n+1)}\frac{1}{\sqrt{2k}}=\sqrt{2a}$$

ist, wird die neue Reihe zwischen den Werten

$lim\ V_{2n}=U+\frac{b}{\sqrt{2a}}$ und $lim\ V_{2n+1}=U+\frac{b}{\sqrt{2a}}+\sqrt{2a}$

oscilliren, aber convergiren, wenn wir sie in eine der Formen setzen:

$$V'=\Sigma(v_{2k-1}-v_{2k})=U+\frac{b}{\sqrt{2a}},$$

$$V''=v_1-\Sigma(v_{2k}-v_{2k+1})=U+\frac{b}{\sqrt{2a}}+\sqrt{2a}.$$

Vita.

Henricus Simon natus sum Berolini a. d. IV. Non. Mai a. h. s. LVIII patre Maximiliano, matre Henrietta, e gente Reich. Fidei addictus sum iudaicae. Literarum primitiis imbutus, gymnasio Koenigstaedtiano quod dicitur reali traditus sum. Autumno a. h. s. LXXV maturitatis testimonium adeptus, cum iam in eo esset ut architecturae operam navarem, propter infirmitatem corporis natura mihi insitam studia intermittere diligentissimeque valetudini consulere coactus sum, neque alia de causa postea factum est, ut studia longius quam fieri solet producerem. Per aliquod tempus ad firmandam valetudinem in Italia peregrinatus, autumno a. h. s. LXXVII academiam architecturae adii, tum aestate a. LXXIX inter cives Universitatis Berolinensis ascriptus sum. Per quinque annos frequentavi scholas mathematicas, physicas, philosophicas v. v. ill. Aronhold, Bruns, Buka, Hamburger, Harms, Hauck, Kirchhoff, Kronecker, Kummer, Paalzow, Paulsen, Weierstrass, Weingarten, Winkler, quibus omnibus gratias habeo quam maximas.

BERLIN,
Druck von Carl Ockler,
Prenzlauer-Strasse 13.

Centralblatt

für das gesammte Forstwesen.

Redigirt von Oberlandforstmeister **R. Micklitz** und Professor **G. Hempel.**

Verlag von Faesy & Frick, k. k. Hofbuchhandlung.

Heft 6. | Erscheint jeden Monat. | **Wien, Juni 1877.** | Halbjährig fl. 4.–, mit Postversendung fl. 4.25. | III. Jahrg.

Separat-Abdruck.

Analytische Untersuchungen über den Zusammenhang geometrisch bestimmbarer Stammformen mit ihren Formzahlen.

Von

Dr. phil. **Oscar Simony,**

Honorardocent an der Hochschule für Bodencultur, Privatdocent an der Wiener Universität.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich, wie ihr Titel besagt, mit der Aufstellung einer Reihe mathematischer Beziehungen zwischen Größen, welche vorläufig mit Sicherheit lediglich auf rein empirischem Wege bestimmt und insoferne selbstverständlich nicht a priori, sondern nur unter gewissen der Erfahrung entnommenen Voraussetzungen mit einander verknüpft werden können.

Um jedoch zunächst eine klare Formulirung der speciell dieser Abhandlung zu Grunde liegenden Annahmen zu ermöglichen, sei es im Folgenden gestattet, die wichtigsten auf die Formverhältnisse der Stämme bezüglichen Thatsachen in Kürze vorzuführen, wobei wir, unserem allgemeinen Standpunkte entsprechend, neben einheimischen auch ausländische stammbildende Holzgewächse in Betracht zu ziehen haben. Zugleich empfiehlt es sich, diese Thatsachen der größeren Uebersichtlichkeit wegen in folgende drei Gruppen zu sondern:

A. Solche, die sich auf die geometrische Beschaffenheit jener Linie beziehen, welche die Halbirungspunkte der Maximalstärken sämmtlicher horizontaler Schnittflächen eines Stammes mit einander verbindet und kurz als dessen geometrische Achse bezeichnet werden mag.[1]

[1] Hiezu muß bemerkt werden, daß es vom rein theoretischen Standpunkte jedenfalls vortheilhafter sein würde, statt des Begriffes: „geometrische Stammachse" die Verbindungslinie der Schwerpunkte der aufeinanderfolgenden horizontalen Schnittflächen des gegebenen Stammes als dessen physikalische Achse in unsere Betrachtungen einzuführen, und daß nur praktische Bedenken den Verfasser bestimmt haben, diese letztere Idee hier nicht weiter zu verfolgen.

B. Solche, welche die möglichen Grenzcurven derartiger Schnittflächen betreffen.

C. Solche, welche über die relativen Größenverhältnisse der aufeinanderfolgenden horizontalen Schnittflächen eines und desselben Baumschaftes Aufschluß geben.

A.

Daß schon die Stämme unserer einheimischen Waldbäume einen mit der Holzart, dem jeweiligen Holzalter und den Standortsverhältnissen im weitesten Sinne des Wortes stark variirenden Wuchs zeigen, ist eine jedem praktischen Forstmanne geläufige Thatsache, die unter Anderem auch in der bekannten[2] Eintheilung der Stämme in zweischnürige, einschnürige und nichtschnürige eine allgemeine Berücksichtigung gefunden hat.

So erheben sich z. B. die Fichte (Abies excelsa *DC.*) und Weißtanne (Abies pectinata *DC.*) gewöhnlich schnurgerade zu bedeutender Höhe, und zwar sowohl im Schlusse als im freien Stande, während die Lärche (Larix europaea *DC.*) im letzteren Falle, namentlich auf gutem Boden, meist krummschäftig oder säbelförmig wächst und erst später in den oberen Theilen ihres Schaftes den geraden Wuchs der zuerst genannten Baumarten erreicht. Derartige anfängliche Krümmungen bei im Uebrigen geradem Stamme finden sich ferner bei vielen Bäumen, welche auf stark geneigten Gehängen stehen oder in ihrer Jugend durch Schneedruck niedergebeugt wurden. Andererseits zeigen Stämme, welche in Folge ihres Standortes den Wirkungen starker und anhaltender Luftströmungen preisgegeben sind, häufig einen geraden Wuchs in ihrer unteren und Krümmungen in ihrer oberen Hälfte.[3] Aber auch ohne jede gewaltsame äußere Einwirkung können sich analoge Formverhältnisse entwickeln, wofür insbesondere manche tropische Moreen einen Beleg liefern. — So beschreibt Junghuhn in seinem Werke über Java[4] beispielsweise einen den Hochwäldern dieser Insel angehörigen Feigenbaum (von den Eingeborenen Kiara aroï genannt), dessen Stamm wie ein gewaltiges $0{\cdot}30^{m}$—$0{\cdot}33^{m}$ dickes Tau zuerst 18^{m}—22^{m} in schräger Richtung emporsteigt, ehe er sich in straff angezogenen Spiralschlingen um den ihm zunächst stehenden Nachbarbaum herumwindet. — Endlich besitzen viele Stämme einen von der Wurzel bis zum Gipfel unregelmäßigen Wuchs, wie die gemeine Akazie (Robinia Pseudacacia *L.*) oder die durch ihre auf-

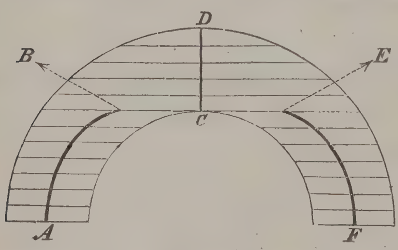


Fig. 1.

[2] Siehe hierüber z. B. Prof. K. Gayer's „Forstbenutzung", 4. Auflage, pag. 20.

[3] S. h. die im 2. Jahrgange des „Centralblattes für das gesammte Forstwesen" erschienene Abhandlung von Forstrath Dr. Nördlinger, „Schaden am Holze durch Wind und Zugluft", pag. 230 und 231.

[4] S. h. die 1852 in Leipzig erschienene Uebersetzung der zweiten Auflage seines Werkes: „Java, seine Gestalt, Pflanzendecke und innere Bauart", pag. 321.

fallende Gestaltung weitbekannten „Süntelbuchen“ in Hannover[5], welche nach einer Mittheilung Burckhardt's selbst bei Aussaat von Eckern unter veränderten Verhältnissen mit mehr als der Hälfte der Keimlinge ihren Zickzackwuchs beibehalten.

Fassen wir nunmehr alle diese Erfahrungen zusammen, so gelangen wir bezüglich der möglichen Formen der geometrischen Stammachse ohne Schwierigkeit zu dem Schlusse, daß dieselbe bald eine gerade Linie, bald eine ebene oder räumliche Curve vorstellen, aber auch aus einem Aggregate von geraden und krummen Linien bestehen kann, die in manchen Fällen nicht einmal continuirlich mit einander zusammenhängen. So wird z. B. die geometrische Achse eines halbkreisförmig gekrümmten Stammstückes, bei welchem die Maximalstärken seiner aufeinanderfolgenden Horizontalschnitte insgesammt in der die Punkte A, C, F enthaltenden Ebene liegen mögen, durch den Liniencomplex [AB, CD, EF] gebildet, welcher, wie die Figur 1 zeigt, in drei völlig von einander isolirte Stücke AB, CD, EF zerfällt.[6] Zugleich ist aus diesem einfachen Specialfalle zu ersehen, daß die Ausdrücke „geometrische Achse“ und „horizontale Schnittfläche“ unter Umständen ganz eine andere Bedeutung als die Worte „Stammachse“ und „Querschnitt“ erhalten können und überhaupt nur insoferne wissenschaftlich berechtigt sind, als die mit den beiden letzten Bezeichnungen verknüpften Begriffe keine von einander unabhängigen Definitionen gestatten.

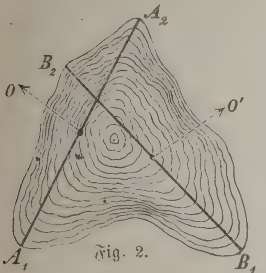


Fig. 2.

Denn eine vollkammen strenge Bestimmung der aufeinanderfolgenden Querschnitte eines gegebenen Stammes setzt die geometrische Beschaffenheit seiner Achse bereits als bekannt voraus, da sich sonst nicht sicher entscheiden ließe, ob die irgend einem Achsenpunkte zugehörige Querfläche auch wirklich auf der geometrischen Tangente der Achse in dem betreffenden Punkte senkrecht steht. Andererseits könnte aber diese selbst nur durch Verbindung gewisser auf geometrischem oder anatomischem Wege eindeutig bestimmbarer Punkte derselben Querschnitte erhalten, d. h. erst dann mathematisch genau construirt werden, sobald die letzteren direct gegeben wären. — Im Uebrigen versteht es sich von selbst, daß

[5] S. h. die in Dr. W. Pfeil's „Kritischen Blättern“, 19. Band, 1. Heft, veröffentlichte Abhandlung von C. Tilemann: „Ueber den abnormen Wuchs der Buchen in den Hülseder Gemeindeforsten, Amt Lauenau im Königreich Hannover“, pag. 223—227, ferner das 1874 in Stuttgart erschienene Werk von Forstrath Prof. Dr. Nördlinger: „Deutsche Forstbotanik“, 1. Band, pag. 276.

[6] Natürlich ist es nicht schwierig, eine derartige Achse auch analytisch zu beschreiben, sobald wir, die Radien der beiden Grenzkreise mit r und R bezeichnend, in deren gemeinschaftliches Centrum den Ursprung eines rechtwinkeligen zweiachsigen Coordinatensystems verlegen, dessen Abscissenachse die Punkte A und F enthalten mag. Die Stücke AB, CD, EF sind dann durch die Relationen:

$$[AB]: x = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2-y^2} + \sqrt{r^2-y^2}\right); \quad (o \leqq y \leqq r), \quad [CD]: x = o; \ (r \leqq y \leqq R),$$

$$[EF]: x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2-y^2} + \sqrt{r^2-y^2}\right); \quad (r \geqq y \geqq o),$$

eindeutig charakterisirt, wobei sich die erste und dritte Gleichung auch durch eine einzige:

$$\left\{x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(R^2 + r^2)\right\} x^2 + \frac{1}{16}(R^2 - r^2)^2 = o$$

ersetzen lassen, resp. einer algebraischen Curve der vierten Ordnung zugehören.

diese Bemerkungen die Brauchbarkeit der Ausdrücke: „Stammachse“ und „Querschnitt“ in botanischer und forstlicher Hinsicht nicht im Geringsten alteriren; sie haben lediglich den Zweck, ihre mathematische Unzulänglichkeit darzuthun.

Schließlich muß hier noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß selbst der Begriff der geometrischen Achse seine Eindeutigkeit verlieren kann, sobald z. B. der in Betracht gezogene Baum eine horizontale Schnittfläche mit zwei vollkommen gleichen größten Durchmessern $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ und nebeneinandergelegenen Halbirungspunkten O, O' aufweist. (Fig. 2.) Da jedoch derartige Fälle wohl nur ausnahmsweise vorkommen, so wäre es unpraktisch, ihretwegen unsere einfache Definition der geometrischen Achse durch eine andere complicirtere zu ersetzen.

B.

Eine zweite für uns wichtige Gruppe von Thatsachen wird durch jene Erfahrungen gebildet, welche bisher über die Formen der Querschnitte verschiedener Stämme gewonnen worden sind. Hienach kommen speciell bei unseren einheimischen Waldbäumen unter Voraussetzung eines normalen Wuchses kreisförmige oder der Kreisfigur sich wenigstens nähernde Querflächen besonders häufig vor, wie beispielsweise in sehr schöner Ausbildung bei der Fichte, Weißtanne und Lärche, welche in dieser Hinsicht wohl nur von manchen Palmen übertroffen werden dürften. Aber auch elliptische Querflächen[7] mit merklich von einander differirenden Hauptachsen gehören keineswegs zu den Seltenheiten, was unter Anderem aus den von Kohli[8] an der gemeinen Kiefer (Pinus silvestris *L.*) gemachten Beobachtungen hervorgeht, für welche das Verhältniß der Hauptachsen ihrer Querschnitte vielfach dem Quotienten $\frac{19}{20}$ entspricht und ausnahmsweise bis auf $\frac{4}{5}$ herabsinken kann. Noch kleiner wird dieser Quotient für gewisse tropische Holzgewächse, z. B. bei Heritiera Fomes *Willd.*, einer in Ostindien einheimischen Sterculiacee, deren anfänglich walzenförmiger Stamm sich später vorherrschend nach zwei entgegengesetzten Seiten verdickt, wodurch seine einzelnen Querschnitte sich allmälig in langgestreckte Ellipsen mit bis zu $\frac{2}{9}$ variirenden Achsenverhältnissen verwandeln.[9]

Eigenthümlich gestaltete Querflächen finden sich ferner bei vielen Bäumen mit aufreißender Rinde, deren Holzringe dort, wo die letztere sich klüftet, entweder, wie bei der Hainbuche (Carpinus Betulus *L.*) eine stärkere Entwicklung nehmen, resp. sich ausbauchen, oder, wie beim gemeinen Mandelbaume (Amygdalus communis *L.*) Einbiegungen erleiden[10] und auf diese Art mehr oder

---

[7] So sind nach Ch. Musset (s. dessen im 65. Bande der „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences“ auszugsweise mitgetheilten Beobachtungen, betitelt: „Influence présumée de la rotation de la Terre sur la forme des troncs d'arbres“, pag. 424, 495) viele Stämme in der Richtung von Ost nach West ausgebaucht elliptisch.

[8] S. dessen 1861 in Berlin erschienenes Werk: „Anleitung zur Abschätzung stehender Kiefern nach Massentafeln und nach dem Augenmaße“, pag. 79.

[9] S. h. das 1853 in Berlin erschienene Werk von Dr. H. Schacht: „Der Baum“, pag. 120.

[10] S. h. das 1860 in Stuttgart erschienene Werk von Dr. H. Nördlinger: „Die technischen Eigenschaften der Hölzer für Forst- und Baubeamte, Technologen und Gewerbetreibende“, pag. 27.

weniger ausgeprägt vieleckige Formen erhalten können.[11] Vorläufig ist es jedoch unmöglich, näher auf die geometrische Beschaffenheit der letzteren einzugehen, indem über die von dem Forstmanne als „spannrückig" oder „kluftig" bezeichneten Stammformen[12] überhaupt noch keine detaillirten Untersuchungen vorliegen.

Wesentliche Abweichungen von dem Kreis-, resp. elliptischen Typus zeigen außerdem die Grundflächen und die ihnen benachbarten Querschnitte aller mit kräftigen Wurzelanläufen versehenen Stämme, in erster Linie also die dem Boden nahegelegenen sternförmigen Querflächen jener tropischen Bäume, bei welchen sich, sobald sie ein gewisses Alter erreicht haben, in Folge einer Stauung des im Baste herabsteigenden Bildungssaftes über ihren horizontal ausgebreiteten Wurzeln[13] mächtige, in senkrechter Richtung vorspringende Holztafeln ausbilden. Dieselben erreichen z. B. an dem 40m—60m hohen und 3m—4m dicken Eriodendron anfractuosum *DC.*, der ansehnlichsten Bombacee Westindiens[14] eine Höhe von 4m—5m, während sie an anderen Stämmen, wie jenem des afrikanischen Baobab (Adansonia digitata *L.*)[15] als gewaltige, sich stetig verdickende Rippen von den Hauptästen bis zum Boden herabsteigen. — Daß aber auch ihre Breite gleichzeitig eine sehr beträchtliche werden kann, erhellt beispielsweise aus den Mittheilungen Junghuhn's[16], nach welchen die Holzleisten mancher javanischer Waldbäume, z. B. von Irina glabra *Bl.*, Epicharis altissima *Bl.* und E. cauliflora *Bl.* selbst zur Herstellung von Karrenrädern und Tischplatten verwendbar sind. Die unregelmäßigsten Querschnittsformen dürften sich endlich bei gewissen in den Urwäldern des tropischen Südamerika einheimischen Feigenbäumen vorfinden, welche der Brasilianer unter dem bezeichnenden Namen: „Cipo matador" (Mörderschlinger) zusammenfaßt[17], und von deren äußerer Erscheinung Burmeister folgendes anschauliche Bild entwirft[18]: „Man gewahrt zwei Stämme, von welchen der eine groß und stattlich in gleichförmig runder Fülle, auf starken ausgebreiteten Mauerwurzeln ruhend, aus dem Boden senkrecht bis zu einer Höhe von 80 oder 100 Fuß sich erhebt, während der andere, einseitig erweitert und muldenförmig nach dem Stamme, an welchen er sich innig angedrückt hat, geformt, auf dünnen, sparrig ästigen Wurzeln mühsam sich zu halten scheint und mit mehreren Klammern in verschiedener Höhe den Nachbar an sich zieht. Diese Klammern sind wie ein Ring völlig geschlossen und greifen nicht nebeneinander vorüber, sondern verschmelzen in sich; sie wachsen

---

[11] S. h. die 1872 in Stuttgart erschienene Abhandlung von Dr. H. Nördlinger: „Der Holzring als Grundlage des Baumkörpers", pag. 23.

[12] S. h. das 1875 in Leipzig erschienene Werk von Dr. Moritz Willkomm: „Forstliche Flora von Deutschland und Oesterreich", pag. 17.

[13] S. h. die im 27. Jahrgange der „Botanischen Zeitung" erschienene Abhandlung von Prof. H. v. Mohl: „Ein Beitrag zur Lehre vom Dickenwachsthum des Stammes der dikotylen Bäume", pag. 10,

[14] S. h. das 1872 in Leipzig erschienene Werk von A. Grisebach: „Die Vegetation der Erde nach ihrer klimatischen Anordnung", 2. Band, pag. 343.

[15] Grisebach, 2. Band, pag. 122, nach Trémaux „le Soudan", pag. 279, 225, 281, 112.

[16] S. h. dessen in der vierten Anmerkung citirtes Werk, pag. 257 und 319.

[17] Aehnliche Mörderschlinger kommen übrigens (s. Grisebach, „Die Vegetation der Erde", 2. Band, pag. 345 und 31) auch in Westindien und im tropischen Asien vor.

[18] S. h. dessen 1853 in Berlin erschienenes Werk: „Reise nach Brasilien durch die Provinzen von Rio de Janeiro und Minas geraës", pag. 147 und 148.

einzeln in gleicher Höhe vom Stamme aus und legen sich an den anderen Stamm innig an, bis sie zusammentreffen und durch fortschreitenden Druck ihrer Enden, unter welchem die Rinde der letzteren zerstört wird, vollkommen ineinander übergehen. Lange erhalten sich beide Bäume in üppiger Kraft, ihre verschieden gefärbten und belaubten Kronen durcheinander flechtend; endlich erliegt der umklammerte Stamm, durch den Druck der keiner Erweiterung fähigen Ringe seines Gegners aller Saftcirculation beraubt; seine Krone wird welk, ein Zweig nach dem anderen stirbt ab und der Mörderschlinger setzt die seinigen an deren Stelle, bis der letzte Rest seines Opfers herabgefallen ist."

Ueberblicken wir jetzt noch einmal sämmtliche hier besprochenen Formenkreise von Stammquerflächen, berücksichtigend, daß die letzteren, sobald die Achse des in Betracht gezogenen Stammes vertical steht, mit dessen horizontalen Schnittflächen identisch sind, so läßt sich bezüglich ihrer möglichen Grenzcurven aus diesen Betrachtungen leicht folgender Satz abstrahiren: Legt man durch einen gegebenen Stamm in irgend einer Höhe eine horizontale Ebene, so wird ihre Schnittlinie mit der Oberfläche des ersteren in vielen Flächen eine wenigstens näherungsweise analytisch definirbare Curve mit einem geometrischen Mittelpunkte vorstellen, welcher dann nicht allein ihren größten Durchmesser, sondern überhaupt jede durch ihn gezogene Sehne halbirt; es kann aber die Grenzcurve der so erhaltenen Schnittfläche auch mehr oder weniger unregelmäßig gestaltet sein, ja sogar — wie z. B. bei einem „Mörderschlinger" mit theilweise senkrecht emporsteigendem Stamme und schräg gewachsenen Klammern[19] — aus zwei oder mehreren von einander getrennten Stücken bestehen.

C.

Was schließlich die relativen Größenverhältnisse der aufeinanderfolgenden horizontalen Schnittflächen eines und desselben Stammes anbelangt, so geben hierüber mittelbar jene Beobachtungen Aufschluß, welche sich auf die äußeren Umrisse, resp. die Längsschnitte ganzer Baumschäfte beziehen. Hienach bilden zunächst die Stämme unserer Waldbäume im Allgemeinen bald mehr bald weniger ausgebauchte, sehr selten eingebauchte Kegel, d. h. sie liegen ihrem Inhalte nach gemeiniglich zwischen jenem einer Walze, resp. eines geraden Kreiskegels von gleicher Grundfläche und Höhe.[20] Dabei variiren jedoch selbst die Mantelflächen geradschaftiger Stämme auf die mannigfaltigste Art, wie eine vergleichende Betrachtung jener Curven lehrt, welche die Längsschnitte derartiger Stämme mit irgend welchen ihre Achse enthaltenden Ebenen begrenzen. — Die wichtigsten bisher auf diesem Wege gewonnenen Erfahrungen lassen sich kurz wie folgt zusammenfassen:

a) Jeder solche Längsschnitt wird durch die Stammachse gemeiniglich in zwei einander näherungsweise gleiche Theile getheilt.

[19] S. z. B. das in dem Prachtwerke: „Atlas zur Reise in Brasilien" von Dr. v. Spix und Dr. Martius auf Tafel II (Pflanzenformen des tropischen Amerika) abgebildete Exemplar eines solchen Cipo matador.

[20] S. h. z. B. Dr. Fr. Baur's „Lehrbuch der Holzmeßkunst", zweite Auflage, pag. 131.

b) Verfolgt man den Verlauf seiner Grenzcurve von der Grundfläche bis zum Gipfel des Baumes, so erscheint dieselbe nahe der ersteren gegen die Stammachse meist convex, während sie in der oberen Hälfte des Stammes, insbesonders gegen seine Spitze hin, sich in der Regel nach außen krümmt, d. h. sie besitzt im Großen und Ganzen eine $\int$ förmige Gestalt.

c) Ihre Krümmung ist am regelmäßigsten in den oberhalb der Wurzelanläufe gelegenen astfreien Theilen des Stammes, hingegen nahe seiner Spitze in Folge der Astentwicklung durchschnittlich ziemlich unregelmäßig und bedeutend stärker als in seiner unteren Hälfte.[21]

Hieraus läßt sich — wenigstens für unsere einheimischen Bäume[22] — schließen, daß die aufeinanderfolgenden horizontalen Schnittflächen jedes Stammes im Mittel von seiner Grundfläche gegen den Gipfel hin stetig an Größe abnehmen, womit übrigens örtliche Abweichungen von diesem Gesetze keineswegs ausgeschlossen sind, wie solche beispielsweise bei Bäumen mit stark nach unten ausgesackten Aesten vorkommen, oder durch die namentlich bei Laubhölzern nicht seltenen „Kröpfe" und „Ueberwallungswülste" bedingt werden. — Etwas beschränkter erscheint seine Giltigkeit für die stammbildenden Holzgewächse der Tropen, welche theilweise schon in ihren allgemeinen Formverhältnissen wesentlich von unseren einheimischen differiren. So sind die Schäfte der dem tropischen Südamerika angehörigen Palmen: Oenocarpus distichus *Mart.*, Mauritia vinifera *Mart.*, Astrocaryum Murumurú *Mart.* ausgesprochen cylindrisch, jene von Oreodoxa regia *Kunth.* und Iriartea ventricosa *Mart.* in ihrer oberen Hälfte öfters sogar stark ausgebaucht, indem beispielsweise bei der letzteren die dem dritten Viertel der Schafthöhe zugehörige Querfläche im Vergleiche zu jener, welche der halben Höhe entspricht, einen drei- bis viermal größeren Inhalt besitzen kann.[23] Noch unförmlichere Verdickungen in der oberen Hälfte des Stammes finden sich endlich bei verschiedenen Bombaceen, z. B. den der Gattung Brachychiton angehörigen Flaschenbäumen Australiens[24] und bei Chorisia ventricosa *N. v. E.*, deren stachelige Stämme den Catingaswaldungen Brasiliens eine so eigenthümliche Physiognomie verleihen und von Martius mit ungeheueren Tonnen verglichen werden.[25]

---

[21] Vergleiche hiemit beispielsweise die interessanten, aus sorgfältigen Messungen an 567 Kieferstämmen gefolgerten Resultate Kohli's in dessen bereits citirtem Werke, pag. 22, ferner Prof. M. Kunze's „Lehrbuch der Holzmeßkunst", zweite Ausgabe, pag. 26, Baur's „Holzmeßkunst", zweite Auflage, pag. 32 ꝛc.

[22] Für im Schlusse erwachsene Hochwaldbäume hat bereits L. Smalian (s. dessen 1837 in Stralsund erschienenes Werk: „Beitrag zur Holzmeßkunst", pag. 20) aus seinen Beobachtungen den Satz abgeleitet, daß die Durchmesser- oder Umfangsquerflächen ihrer Schäfte im Allgemeinen vom Fuße bis etwa zu $\frac{1}{20}$ der ganzen Länge stark und ungleichmäßig, von hier ab bis zu den Aesten weniger stark und ziemlich gleichmäßig, hierauf wieder stärker und ungleichmäßig abnehmen.

[23] S. h. das in dem Zeitraume von 1823 bis 1849 in München erschienene Werk von Dr. v. Martius: „Genera et species Palmarum", Tafel 22, 38, 58, 156 und 35.

[24] S. h. A. Grisebach, „Die Vegetation der Erde", 2. Band, pag. 214 und 221, ferner das von G. Bentham unter Mitwirkung F. Müller's veröffentlichte Werk: „Flora australiensis", 1. Band, pag. 230, wo speciell der monströse Stamm des „Bottle tree" der Colonisten Queenslands (Brachychiton Delabechii *F. Müll.*, resp. Sterculia rupestris *Benth.*) kurz charakterisirt wird

[25] S. h. das in München im Zeitraume von 1823 bis 1831 erschienene Werk von Dr. v. Martius: „Reise in Brasilien", zweiter Theil, pag. 499.

Sobald wir also auch derartige Stammformen in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen, tritt an die Stelle des früher ausgesprochenen Erfahrungssatzes definitiv der folgende: Legt man durch einen gegebenen Stamm ein System von horizontalen Ebenen, so können die Flächen der hiedurch erhaltenen Schnitte mit wachsender Höhe entweder stetig abnehmen, oder constant bleiben, oder innerhalb endlicher Intervalle continuirlich wachsen, d. h. es wird der Exponent des Verhältnisses, in welchem das Volumen des betreffenden Stammes zu jenem eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe steht, im Allgemeinen entweder kleiner, gleich oder größer als 1 ausfallen.

Nachdem hiemit die für die allgemeinen Formverhältnisse der Stämme bedeutungsvollsten Thatsachen übersichtlich charakterisirt worden sind, ist es nicht schwierig, aus diesen Betrachtungen eine Reihe von Annahmen zu abstrahiren, welche eine mathematische Untersuchung von Stammformen unter verschiedenen Gesichtspunkten ermöglichen und jedenfalls um so berechtigter sein werden, je einfacher und umfassender wir sie gestalten. Hingegen wäre es nicht logisch, den wissenschaftlichen Werth solcher Hypothesen etwa nach der größeren oder geringeren mathematischen Complication der mit ihrer Hilfe gewonnenen Resultate beurtheilen zu wollen, indem hier ebenso wie für andere naturwissenschaftliche Disciplinen die tiefsinnigen Worte Fresnel's gelten[26]: Dans le choix d'un système on ne doit avoir égard qu'à la simplicité des hypothèses; celle des calculs ne peut être d'aucun poids dans la balance des probabilités. La nature ne s'est pas embarrassée des difficultés d'analyse; elle n'a évité que la complication des moyens."

Von diesen Ueberlegungen ausgehend, haben wir nun speciell für die vorliegende Arbeit aus der Reihe der möglichen Annahmen die folgenden acceptirt, welche nicht nur allgemein und relativ einfach sind, sondern sich auch durch die Uebersichtlichkeit ihrer mathematischen Consequenzen in hohem Grade empfehlen:

1. Die zu untersuchenden Holzgewächse müssen unter normalen Wuchsverhältnissen in allen Holzaltern, auf welche die hier zur Sprache kommenden mathematischen Betrachtungen ausgedehnt werden, Stämme bilden, deren Mantelflächen sich wenigstens näherungsweise durch Gleichungen zwischen drei veränderlichen Coordinaten analytisch definiren lassen. Hiemit sprechen wir zugleich indirect die Behauptung aus, daß, wenn auch der einzelne Baum in Folge einer fortwährenden Anpassung an ihrer Natur nach unregelmäßig variirende äußere Verhältnisse keinen in mathematischem Sinne gesetzmäßigen Stamm bilden kann, doch für Bäume von gleicher Holzart, gleichem Holzalter, gleicher Höhe und gleicher mittlerer Stärke eine analytisch charakterisirbare mittlere Stammform existirt, welche wir um so genauer kennen lernen werden, je mehr in jenen Momenten übereinstimmende, aber unter verschiedenen Lebensbedingungen erwachsene Individuen wir in Betracht ziehen. — Wie weit die Gilt

[26] S. h. dessen im 5. Bande der „Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France" veröffentlichte Abhandlung: „Mémoire sur la diffraction de la lumière", pag. 340.

keit dieser Sätze reicht, läßt sich allerdings vorläufig nicht übersehen; nur so viel steht fest, daß sich, falls dieselben z. B. für unsere einheimischen Waldbäume ungiltig wären, überhaupt keine praktisch brauchbaren Massentafeln zur Bestimmung ihres Holzgehaltes construiren ließen.

2. Die geometrische Achse des gegebenen Stammes muß unter Voraussetzung eines völlig ungestörten Wuchses eine gerade Linie vorstellen, welche jeden sie enthaltenden Längsschnitt in zwei einander congruente Hälften theilt. — Diese Annahme gilt, wenn auch nur näherungsweise, direct für alle geradschaftigen Stämme, unter Anderem also für sehr viele im Schlusse erwachsene Baumindividuen, indem ja bekanntlich selbst solche Holzarten, welche im freien Stande gewöhnlich keinen geraden Wuchs zeigen, wie Buchen, Eschen und Eichen, im geschlossenen Bestande mehr oder weniger gerade Schäfte bauen.

3. Die Grenzcurve jedes senkrecht zur geometrischen Stammachse geführten Schnittes muß, sobald wir in den Halbirungspunkt ihres größten Durchmessers den Ursprung eines der Schnittebene angehörigen rechtwinkeligen Coordinatensystems verlegen, dessen Abscissenachse mit jedem Diameter zusammenfällt, durch eine Gleichung von der Gestalt:

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{A}\right)^p + \left(\frac{y}{B}\right)^q = 1$$

analytisch darstellbar sein, in welcher p, q irgend welche positive gerade ganze Zahlen oder positive Brüche mit geraden Zählern, aber ungeraden Nennern bedeuten, und die Constante A den halben größten, B den halben kleinsten Durchmesser dieser Curve repräsentirt.

Für $p = q = 2$, $A > B$, resp. $A = B$ ergeben sich aus (1) beispielsweise die Relationen:

$$B^2 x^2 + A^2 y^2 = A^2 B^2, \text{ beziehungsweise: } x^2 + y^2 = A^2,$$

so daß unsere dritte Annahme durch passende Wahl von und A B auch jedem beliebigen elliptischen oder kreisförmigen Stammquerschnitte angepaßt werden kann.

Entsprechend den über die Exponenten p, q gemachten Voraussetzungen lassen sich ferner unter die Beziehung (1) außer den geschlossenen Curven zweiter Ordnung noch unendlich viele andere krumme Linien subsumiren, in deren allgemeine Eigenschaften wir durch eine ausführliche Discussion von (1) unmittelbar die nöthige Einsicht gewinnen können. — Zunächst ist klar, daß die Gleichung (1) unter ξ, η irgend welche positive, der Bedingung: $\left(\frac{\xi}{A}\right)^p + \left(\frac{\eta}{B}\right)^q = 1$ Genüge leistende Specialisirungen von x und y verstanden, ebenso durch die Substitutionen: $x = +\xi$, $y = -\eta$; $x = -\xi$, $y = +\eta$; $x = -\xi$, $y = -\eta$ befriedigt wird, und, da hiebei $\left(\frac{x}{A}\right)^p$ resp. $\left(\frac{y}{B}\right)^q$ jederzeit positiv bleiben, die Abscissen sämmtlicher Curvenpunkte zwischen den Grenzen $-A$ und $+A$, ihre Ordinaten hingegen zwischen $-B$ und $+B$ enthalten sind.

Jede der durch (1) charakterisirbaren Linien stellt also eine geschlossene Curve vor, welche von den beiden Achsen des gewählten Coordinatensystems in vier unter sich congruente Quadranten getheilt

wird und mit den ersteren im Ganzen vier durch ihre Coordinaten: $x_1 = + A, y_1 = 0$; $x_2 = - A, y_2 = 0$; $x_3 = 0, y_3 = + B$; $x_4 = 0, y_4 = - B$ bestimmte Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 gemein hat. Ihre mit der Abscissenachse resp. der Ordinatenachse coincidirenden Verbindungslinien $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ durchschneiden einander stets in dem geometrischen Centrum der in Betracht gezogenen Curve und mögen im Folgenden kurz als große und kleine Achse der letzteren bezeichnet werden, indem $A_1 A_2$ gleichzeitig ihren größten Durchmesser $2A$, $B_1 B_2$ ihren kleinsten Diameter $2B$ repräsentirt.

Um im Anschlusse hieran auch die möglichen Formen der verschiedenen Werthen von p und q zugehörigen krummen Linien übersichtlich classificiren zu können, benützen wir die aus (1) hervorgehenden Relationen:

$$B^q x^p + A^p y^q = A^p B^q, \quad p B^q x^{p-1} + q A^p y^{q-1} \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$p(p-1) B^q x^{p-2} + q(q-1) A^p y^{q-2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + q A^p y^{q-1} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

welche für y, y', y'' der Reihe nach die Werthe:

$$(2) \ldots y = \frac{B(A^p - x^p)^{\frac{1}{q}}}{A^{\frac{p}{q}}}, \quad (3) \ldots y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{p B^q x^{p-1}}{q A^p y^{q-1}} = - \frac{p B x^{p-1}}{q A^{\frac{p}{q}} (A^p - x^p)^{\frac{q-1}{q}}}$$

$$(4) \ldots y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{p B^q x^{p-2} \{p(q-1) B^q x^p + q(p-1) A^p y^q\}}{q^2 A^{2p} y^{2q-1}} =$$

$$= - \frac{p B x^{p-2} \{q(p-1) A^p - (p-q) x^p\}}{q^2 A^{\frac{p}{q}} (A^p - x^p)^{\frac{2q-1}{q}}}$$

liefern, mithin bezüglich der Constanten p und q eine Unterscheidung von vier Hauptfällen[27]: $p > 1, q > 1$; $p < 1, q < 1$; $p > 1, q < 1$; $p < 1, q > 1$ erfordern, deren Discussion wir bei der Symmetrie aller unter (1) subsumirbaren Curven gegen beide Coordinatenaxen natürlich nur auf positive x und y auszudehnen brauchen.

Erster Hauptfall: $p > 1$, $q > 1$.

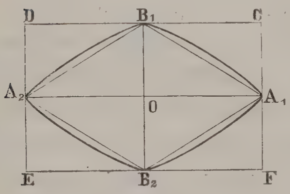


Fig. 3.

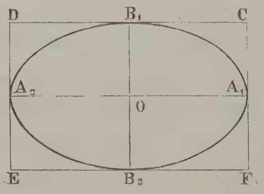


Fig. 4.

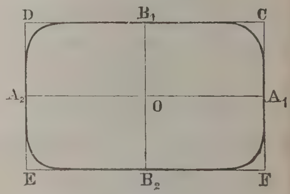


Fig. 5.

Variirt x von 0 bis A, so nimmt y von B bis 0, y' von 0 bis $-\infty$ stetig ab, während y'' von $x = 0$ bis $x = A$ negativ bleibt. Alle hieher gehörigen Curven verlaufen also in dem Quadranten $B_1 O A_1$ concav gegen die Abscissenachse, wobei jederzeit die geometrische Tangente ihres oberen Culminationspunktes B_1 auf $B_1 B_2$, jene des Punktes A_1 auf $A_1 A_2$ senkrecht steht, und gestatten, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, noch eine weitere Classification in folgende drei Gruppen:

---

[27] Selbstverständlich erheischen die beiden letzten Fälle nur deshalb eine gesonderte Behandlung, weil nach den in unserer dritten Annahme bezüglich A und B getroffenen Feststellungen die Constante A immer nur die halbe große Achse der betreffenden Curve repräsentiren kann.

a) Curven, deren charakteristische Constanten p, q die Einheit nur sehr wenig überschreiten und die sich mithin (Fig. 3) enge an jenen Rhombus $A_1B_1A_2B_2$ anschließen, dessen Diagonalen durch ihre beiden Hauptachsen A_1A_2, B_1B_2 gebildet werden. — So entsprechen z. B. bei der durch die Gleichung:

$$(5)\ \ldots \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1000}{999}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1000}{999}} = 1 \text{ resp. } y = \pm B\left\{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1000}{999}}\right\}^{\frac{999}{1000}}$$

darstellbaren krummen Linie den Abscissen: $0{\cdot}1\,A, 0{\cdot}3\,A, 0{\cdot}5\,A, 0{\cdot}7\,A, 0{\cdot}9\,A$ die Ordinaten $0{\cdot}9003\,B, 0{\cdot}7006\,B, 0{\cdot}5007\,B, 0{\cdot}3006\,B, 0{\cdot}1003\,B$, welche die denselben Abscissen correspondirenden Ordinaten der Sehne A_1B_1 nur um $0{\cdot}0003\,B$, $0{\cdot}0006\,B, 0{\cdot}0007\,B, 0{\cdot}0006\,B, 0{\cdot}0003\,B$ an Größe übertreffen. Durch geometrische Construction von (5) in dem für Fig. 3 gewählten Maßstabe würden wir daher ein mit den Seiten des Rhombus $A_1B_1A_2B_2$ scheinbar völlig coincidirendes Gebilde erhalten, d. h. die Relation (5) für diesen Fall ohne merklichen Fehler gleichzeitig als eine analytische Beschreibung sämmtlicher Grenzlinien dieses Vierecks ansehen dürfen. Hieraus geht hervor, daß die Gleichung (1) bei passender Wahl von p, q, A und B auch zur näherungsweisen Charakteristik beliebiger rhombischer Schnittflächen benützt werden kann.

b) Curven, für welche entweder p oder q oder beide Constante gleichzeitig sehr große Werthe annehmen. Dieselben schließen sich in ihrem Verlaufe (Fig. 5) insgesammt enge an ihr jeweiliges Tangentenrechteck CDEF an und bieten insoferne die Möglichkeit, auch rechteckige resp. quadratische Schnittflächen von beliebigen Dimensionen durch eine einzige Gleichung zwischen zwei veränderlichen Coordinaten näherungsweise analytisch zu charakterisiren. — So entsprechen beispielsweise bei den durch die Gleichungen:

$$(6)\ldots\left(\frac{x}{A}\right)^{100} + \left(\frac{y}{B}\right)^{2} = 1,\ (7)\ldots\left(\frac{x}{A}\right)^{2} + \left(\frac{y}{B}\right)^{100} = 1,\ (8)\ldots\left(\frac{x}{A}\right)^{100} + \left(\frac{y}{B}\right)^{100} = 1$$

bestimmten Curven den Abscissen $0{\cdot}95\,A, 0{\cdot}96\,A, 0{\cdot}97\,A, 0{\cdot}98\,A, 0{\cdot}99\,A$ die Ordinaten: $0{\cdot}9970\,B, 0{\cdot}9915\,B, 0{\cdot}9759\,B, 0{\cdot}9313\,B, 0{\cdot}7962\,B$, resp.
$0{\cdot}9770\,B, 0{\cdot}9749\,B, 0{\cdot}9721\,B, 0{\cdot}9682\,B, 0{\cdot}9616\,B$, resp.
$0{\cdot}9999\,B, 0{\cdot}9998\,B, 0{\cdot}9995\,B, 0{\cdot}9986\,B, 0{\cdot}9955\,B$,
aus deren numerischen Werthen die Richtigkeit unserer zuletzt aufgestellten Behauptung wohl zur Genüge hervorgeht.

c) Curven, welche entsprechend den sie charakterisirenden Specialwerthen von p und q entweder geschlossene krumme Linien der zweiten Ordnung vorstellen oder doch wenigstens durch ihre Gestalt (Fig. 4) einer Ellipse mit denselben Halbachsen A und B beziehungsweise für $A = B$ einem mit dem Radius A beschriebenen Kreise mehr oder weniger nahestehen.

Zweiter Hauptfall: $p < 1$, $q < 1$.

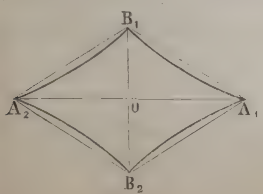


Fig. 6.

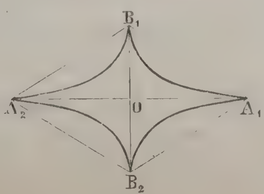


Fig. 7.

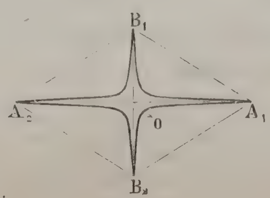


Fig. 8.

Durchläuft x das Intervall von 0 bis A, so verkleinert sich y stetig von B bis 0, während $y' = -\frac{p B^q y^{1-q}}{q A^p x^{1-p}}$ gleichzeitig von $-\infty$ bis 0 wächst und y" fortwährend positiv bleibt. Alle hieher gehörigen Curven sind demnach in dem Quadranten $B_1 O A_1$ gegen die Abscissenachse convex und bestehen ausnahmslos aus je vier in den Endpunkten der beiden Hauptachsen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ einander berührenden congruenten Zweigen[28], deren verschiedene Formen eine weitere Eintheilung dieser krummen Linien in folgende drei Gruppen ermöglichen:

a) Curven mit der Einheit sehr nahe kommenden Constanten p, q, welche ähnlich wie jene der Gruppe (a) des ersten Hauptfalles in ihrem Verlaufe nur wenig von den Seiten des durch die Endpunkte ihrer Hauptaxen bestimmten Rhombus $A_1 B_1 A_2 B_2$ abweichen, jedoch insoferne eine neue, eigenthümliche Gruppe bilden, als hier die Grenzlinien dieses Rhombus nie innerhalb, sondern stets außerhalb der von der betreffenden Curve begrenzten Fläche gelegen sind (Fig. 6). — So besitzen z. B. die den Abscissen: 0·1 A, 0·3 A, 0·5 A, 0·7 A, 0·9 A correspondirenden Punkte der durch die Relation:

$$(9)\ \ldots \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1000}{1001}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1000}{1001}} = 1 \text{ resp. } y = \pm B\left\{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1000}{1001}}\right\}^{\frac{1001}{1000}}$$

gekennzeichneten krummen Linie die Ordinaten: 0·8997 B, 0·6994 B, 0·4993 B, 0·2994 B, 0·0997 B, liegen also für jedes beliebige Achsenverhältniß unterhalb der Hypothenuse des rechtwinkeligen Dreieckes $B_1 O A_1$.

b) Curven, für welche entweder p oder q oder beide Constanten gleichzeitig relativ kleine Werthe erhalten, wodurch ein enger Anschluß derselben an ihre jeweiligen Hauptachsen bedingt wird (Fig. 8). — Hieher gehören beispielsweise die durch die Gleichungen:

$$(10)\ \ldots \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{23}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{7}} = 1,\ (11)\ \ldots \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{7}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{23}} = 1,\ (12)\ \ldots \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{23}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{23}} = 1$$

determinirten Curven, indem in den Beziehungen (10) und (11) den Abscissen: 0·01 A, 0·02 A, 0·03 A, 0·04 A, 0·05 A nur mehr Ordinaten von den Längen:

0·0206 B, 0·0129 B, 0·0093 B, 0·0072 B, 0·0058 B, resp.
0·0275 B, 0·0105 B, 0·0052 B, 0·0029 B, 0·0017 B,

entsprechen und analog in (12) die Substitutionen: x = 0·0001 A, 0·0002 A, 0·0003 A, 0 0004 A, 0·0005 A für y der Reihe nach die Ausdrücke: y = 0·0011 B, 0·0006 B, 0·0004 B, 0·0003 B, 0·0002 B liefern.

c) Curven, welche entweder direct durch eine der beiden Identitäten:

$$(13)\ \ldots x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}},\quad (14)\ \ldots B^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + A^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}} B^{\frac{2}{3}}$$

analytisch charakterisirt werden können, oder doch wenigstens hinsichtlich ihrer Form (Fig. 7) einer Astrois[29] mit dem Durchmesser 2A, beziehungsweise der Evolute einer Ellipse[30] mit den Halbachsen $\frac{A^2 B}{A^2 - B^2}$, $\frac{A B^2}{A^2 - B^2}$ mehr oder weniger verwandt sind.

[28] Die Punkte A_1, B_1, A_2, B_2 sind also stets Rückkehrpunkte erster Art.

[29] S. h. z. B. das 1850 in Wien erschienene Werk von Prof. Dr. C. Schulz v. Straßnitzki: „Handbuch der Geometrie für Praktiker", pag. 465—469, ferner Prof. Dr. O. Schlömilch's Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, 1. Theil, pag. 71 und 72 ꝛc.

[30] S. h. z. B. das zuvor citirte Werk Schlömilch's 1. Theil, pag. 94, 136 und 137.

Dritter Hauptfall: $p > 1$, $q < 1$.

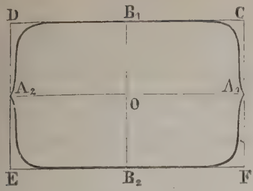


Fig. 9.

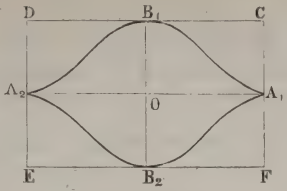


Fig. 10.

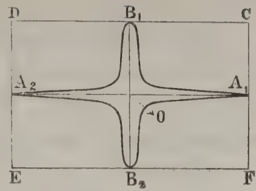


Fig. 11.

Wächst x von 0 bis A, so variirt y analog wie in den beiden ersten Hauptfällen von B bis 0, während y'' für jeden zwischen B_1 und dem durch seine Coordinaten:

$$(15) \qquad x = \xi = A\left\{\frac{q(p-1)}{p-q}\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad y = \eta = B\left\{\frac{p(1-q)}{p-q}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

bestimmten Inflexionspunkte des Bogens $B_1 A_1$ gelegenen Curvenpunkt negativ bleibt und erst für $\xi < x < A$ lauter positive Werthe erhält. Gleichzeitig nimmt y' von 0 bis zu einem der Substitution: $x = \xi$ entsprechenden Minimum:

$$(16) \qquad \overline{y}' = -\frac{p\, B^q\, \xi^{p-1}}{q\, A^p\, \eta^{q-1}} = -\frac{(p-1)\,\eta}{(1-q)\,\xi}$$

ab, um sich hierauf wieder continuirlich zu vergrößern und für $x = A$ zum zweitenmale zu verschwinden. — Alle in diese Classe einzubeziehenden krummen Linien verlaufen mithin in dem Quadranten $B_1 O A_1$ von $x = 0$ bis $x = \xi$ concav, von $x = \xi$ bis $x = A$ convex gegen die Abscissenachse und werden regelmäßig aus je zwei congruenten Zweigen gebildet, deren Endpunkte A_1, A_2 in der Abscissenachse eine gemeinsame Tangente besitzen. Je nach der speciellen Beschaffenheit der Constanten p, q lassen sich dann auch hier drei durch die Figuren 9, 10 und 11 angedeutete Unterfälle hervorheben, auf deren nähere Betrachtung wir übrigens in Hinblick auf die geringe Wichtigkeit dieser Curvenformen nicht weiter einzugehen brauchen.

Vierter Hauptfall: $p < 1$, $q > 1$.

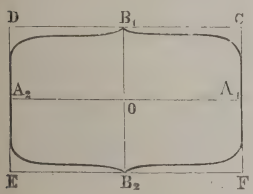


Fig. 12.

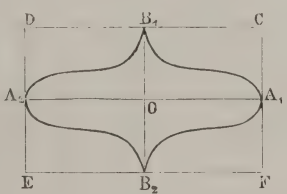


Fig. 13.

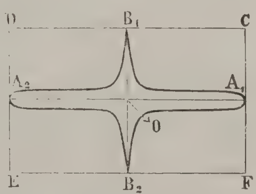


Fig. 14.

In diesem Falle wächst y' bei von 0 bis ξ variirendem x von $-\infty$ bis zu einem durch die Relation (16) bestimmten Maximum, nimmt hierauf für $\xi < x < A$ stetig ab und erhält für $x = A$ wieder einen unendlich großen negativen Werth. Da ferner y'' für $0 < x < \xi$ positiv, für $\xi < x < A$ negativ bleibt, so sind die hieher gehörigen Curven in dem Quadranten $B_1 O A_1$ von $x = 0$ bis $x = \xi$ convex, von $x = \xi$ bis $x = A$ concav gegen die Abscissenachse, d. h. sie bestehen durchgängig aus je zwei congruenten die letztere senkrecht durchschneidenden Zweigen, welche einander in den Punkten B_1, B_2 berühren. — Ihre Hauptformen erscheinen durch die Figuren 12, 13 und 14 hinlänglich

gekennzeichnet, aus welchen überdieß hervorgeht, daß für $A = B$ dem dritten u
vierten Hauptfalle dieselben Gebilde entsprechen.

Auf Grundlage der hiemit beendigten geometrischen Interpretation[31] von (
läßt sich nunmehr auch die für unsere späteren Untersuchungen sehr wichtige Fra
beantworten, in welcher Weise die von irgend einer unter (1) subsumirbaren Cur
begränzte Fläche f allgemein in Function von A, B, p, q ausgedrückt werden kan

Bekanntlich gilt, falls A, B, C, ...; a, b, c, ...; p, q, r, ... irgend welc
positive Constanten u, v, w, ... gewisse positive, der Bedingung:

$$0 \leqq \left(\frac{u}{A}\right)^p + \left(\frac{v}{B}\right)^q + \left(\frac{w}{C}\right)^r + \ldots \leqq 1$$

Genüge leistende veränderliche Größen vorstellen, die merkwürdige Relation:

$$\int\int\int \ldots u^{a-1} v^{b-1} w^{c-1} \ldots du\, dv\, dw \ldots = \frac{A^a B^b C^c \ldots \Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \Gamma\left(\frac{c}{r}\right) \ldots}{p\, q\, r \ldots \Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)}$$

welche für $a = b = 1$, sobald wir die Zahl der Veränderlichen auf zw
beschränken und die für jedes beliebige positive λ giltige Identität: $\lambda\Gamma(\lambda) = \Gamma(1 +$
auf die Ausdrücke: $\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)$, $\frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)$ anwenden, in:

$$\int\int du\, dv = \frac{A\, B\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)},\quad 0 \leqq \left(\frac{u}{A}\right)^p + \left(\frac{v}{B}\right)^q \leqq 1$$

übergeht. Beachten wir nun, daß das Doppelintegrale: $\int\int du\, dv$ unter d
nebenan stehenden, die Variationen von u und v beschränkenden Bedingung
Summe aller Elemente du dv jenes Flächenstückes $B_1\, O\, A_1$ repräsentirt, welch
von dem jeweiligen Curvenbogen $B_1 A_1$ und den Geraden OA_1 und OB_1 begren
wird, so ergiebt sich, da nach unseren früheren Betrachtungen f stets dem vi
fachen Inhalte von $B_1 OA_1$ äquivalent sein muß, für die fragliche Unbekannte
direct die Formel:

$$(17) \qquad f = \frac{4\, A B \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} = A\, B\, \varphi(p, q),$$

d. h.: der Inhalt jeder einer Curve von der Gleichung (1) zugehörig
Fläche f ist gleich dem Producte ihrer beiden Halbachsen A,B, mul

---

[31] Der Vollständigkeit halber sei hier noch die für den Krümmungsradius ρ jedes beliebigen Curv
punctes mit den Coordinaten x, y giltige Formel:

$$\rho = - \frac{\{p^2 B^{2q} x^{2p-2} + q^2 A^{2p} y^{2q-2}\}^{\frac{3}{2}}}{p\, q\, A^p B^q x^{p-2} y^{q-2} \{p(q-1) B^q x^p + q(p-1) A^p y^q\}}$$

angeführt, welche für $p = q$, resp. $p = q = 2$ unmittelbar die Relationen:

$$\rho = - \frac{\{B^{2p} x^{2p-2} + A^{2p} y^{2p-2}\}^{\frac{3}{2}}}{(p-1)\, A^{2p} B^{2p} x^{p-2} y^{p-2}},\ \text{beziehungsweise: } \rho = - \frac{\{B^4 x^2 + A^4 y^2\}^{\frac{3}{2}}}{A^4 B^4}$$

liefert und insoferne für spätere Untersuchungen von Werth ist.

[32] S. über diese zuerst von Lejeune Dirichlet gefundene Formel das von Dr. C. H. Schnuse üb
setzte Werk Moigno's: „Vorlesungen über die Integralrechnung", pag. 199, 200, ferner das 1871 in Lei
erschienene Werk von Dr. F. Mayer: „Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen ree
Grenzen", pag. 567—571, u. A.

licirt mit einem bezüglich p und q symmetrischen Factor: $\varphi(p,q)$, so daß die durch die Beziehungen: $\left(\frac{x}{A}\right)^p + \left(\frac{y}{B}\right)^q = 1$ und: $\left(\frac{x}{A}\right)^q + \left(\frac{y}{B}\right)^p = 1$ charakterisirten krummen Linien stets Flächen von gleichem Inhalte einschließen.

Von den übrigen wesentlichen Eigenschaften des Factors: $\varphi(p,q)$, mögen hier außerdem noch folgende hervorgehoben werden:

1. Die Function $\varphi(p,q)$ erhält, falls p oder q oder beide Constanten gleichzeitig als unendlich groß angenommen werden, zufolge der Identität: $\Gamma(1) = 1$ regelmäßig den Werth 4, so daß sich f mit wachsendem p oder q immer mehr dem Inhalte des Tangentenrechteckes CDEF nähert, wie dies auch eine Betrachtung der Figuren 5, 9 und 12 deutlich zeigt.

2. Für $p = q = 1$ wird $\varphi(p,q)$ in Hinblick auf die Relationen:

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty u\, e^{-u}\, du = \int_0^\infty e^{-u}\, du = \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = \int_0^\infty u^2 e^{-u}\, du = 2$$

gleich 2, wonach f für nur wenig von der Einheit differirende p und q entsprechend den Figuren 3 und 6 näherungsweise denselben Inhalt wie der Rhombus $A_1B_1A_2B_2$ besitzt.

3. Verschwinden beide oder eine der Größen p, q, so reducirt sich $\varphi(p,q)$ gleichfalls auf Null, was am einfachsten mit Hilfe der aus der Theorie der Gammafunctionen[33] ableitbaren Gleichungen:

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right) = \lim_{h=\infty}\left\{\frac{p}{1+p}\cdot\frac{2p}{1+2p}\cdot\frac{3p}{1+3p}\cdot\frac{4p}{1+4p}\cdots\frac{hp}{1+hp}(h)^{\frac{1}{p}}\right\},$$

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right) = \lim_{h=\infty}\left\{\frac{q}{1+q}\cdot\frac{2q}{1+2q}\cdot\frac{3q}{1+3q}\cdot\frac{4q}{1+4q}\cdots\frac{hq}{1+hq}(h)^{\frac{1}{q}}\right\},$$

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} = \frac{1}{p+q}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} = \prod_{h=1}^{\infty}\frac{h(p+q+hpq)}{(1+hp)(1+hq)},$$

$$(18)\ \ldots\ \varphi(p,q) = 4\prod_{h=1}^{\infty}\frac{h(p+q)+h^2pq}{(1+hq)(1+hp)} = 4\prod_{h=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(1+hp)(1+hq)}\right\}$$

dargethan werden kann, indem aus denselben für $p=0$, resp. $q=0$, $p=q=0$ die Relationen:

$$\varphi(0,q) = 4\prod_{h=1}^{\infty}\frac{hq}{1+hq} = 4\lim_{h=\infty}\left\{\frac{q}{1+q}\cdot\frac{2q}{1+2q}\cdot\frac{3q}{1+3q}\cdots\frac{hq}{1+hq}\right\} =$$

$$= 4\lim_{h=\infty}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)}{(h)^{\frac{1}{q}}} = 0,\ \varphi(p,0) = \varphi(0,p) = 4\lim_{h=\infty}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}{(h)^{\frac{1}{p}}} = 0,$$

$\varphi(0,0) = 0$ hervorgehen. Es wird daher für sehr kleine Werthe von p oder q auch f nur wenig von der Nulle verschieden ausfallen, wofür unter Anderem schon die Figuren 8, 11 und 14 einen allgemeinen verständlichen Beleg liefern.

---

[33] S. h. das zuvor citirte Werk Mayer's §. 38, §. 40, und § 33.

4. Gestatten die Constanten p, q speciell die Darstellungsweise:

$$(19) \qquad p = \frac{2m}{2n-1},\ q = \frac{2m}{2(km-n)+1},$$

wobei k, m, n irgend welche positive ganze, die Bedingung $km \geqq n$ erfüllende Zahlen bedeuten, und die Verwandlung des Bruches $\frac{1}{p}$ in eine gemischte Zahl demnach auf ein Resultat von der Gestalt:

$$\frac{1}{p} = k_1 + \frac{\varkappa}{2m}, \ (0 \leqq k_1 < \infty,\ 0 \leqq \varkappa < 2m)$$

führen muß, so coincidirt $\varphi(p, q)$ immer mit dem endlichen Producte:[34]

$$(20) \ldots \varphi(p, q) = \frac{4\pi}{k!} \prod_{\mu=1}^{k_1} \left(\frac{1}{p} - \mu\right) \prod_{\nu=1}^{k-k_1-1} \left(\frac{1}{q} - \nu\right) \left(p\, q \sin \frac{\varkappa\pi}{2\,m}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{4\pi}{k!}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 2\right)\cdots\left(\frac{1}{p} - k_1\right)\left(\frac{1}{q} - 1\right)\left(\frac{1}{q} - 2\right)\cdots\left(\frac{1}{q} - [k - k_1 - 1]\right) \times$$

$$\times \left(p\, q \sin \frac{\varkappa\pi}{2\,m}\right)^{-1}.$$

In diesem Falle treten nämlich an die Stelle der Functionen $\Gamma\left(\frac{1}{p}\right), \Gamma\left(\frac{1}{q}\right)$ $\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$ unter Anwendung der für beliebige positive ganze a und zwischen 0 und 1 variirende σ giltigen Beziehung:

$$(21) \ldots \Gamma(a + \sigma) = (a - 1 + \sigma)(a - 2 + \sigma)(a - 3 + \sigma) \ldots (1 + \sigma)\,\sigma\,\Gamma(\sigma)$$

der Reihe nach die Ausdrücke:

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(k_1 + \frac{\varkappa}{2\,m}\right) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 2\right)\left(\frac{1}{p} - 3\right)\cdots\left(\frac{1}{p} - k_1\right)\Gamma\left(\frac{\varkappa}{2\,m}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) = \Gamma\left\{\frac{2(km-n)+1}{2m}\right\} = \Gamma\left\{k - \frac{2n-1}{2m}\right\} = \Gamma\left\{(k - k_1 - 1) + \left(1 - \frac{\varkappa}{2\,m}\right)\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{q} - 1\right)\left(\frac{1}{q} - 2\right)\left(\frac{1}{q} - 3\right)\cdots\left(\frac{1}{q} - [k - k_1 - 1]\right)\Gamma\left(1 - \frac{\varkappa}{2\,m}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \Gamma\left\{\frac{2n-1}{2m} + \frac{2(km-n)+1}{2m}\right\} = \Gamma(k) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (k-1),$$

aus welchen mit Rücksicht auf die keines weiteren Commentars bedürftigen Identitäten

$$p + q = pq\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = kpq, \quad \Gamma\left(\frac{\varkappa}{2\,m}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\varkappa}{2\,m}\right) = \pi\left(\sin\frac{\varkappa\pi}{2\,m}\right)^{-1}$$

für $\varphi(p,q)$ direct die Formel (20) resultirt. Dieselbe lehrt unter Anderem, daß sich $\varphi(p, q)$ für $\varkappa = m$, resp. $3\varkappa = m$, $3\varkappa = 5m$ gemäß den Gleichungen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ stets durch Multiplication von π mit einem gewissen rationalen Coëfficienten ergiebt, also auch f in jedem derartigen Fall auf völlig elementarem Wege berechnet werden kann. Zur Erläuterung dieses Satzes mögen hier folgende Beispiele[35] Platz finden:

---

[34] Hieraus ergibt sich speciell zur Berechnung des Inhaltes solcher Flächen, deren Grenzcurven durch Gleichungen von der Gestalt: $\left(\frac{x}{A}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2m}{2m-1}} = 1$ bestimmt werden, die Formel: $f = \frac{2m-1}{m^2}\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^{-1} AB\pi$ resp. für sehr große Werthe von m der interessante Ausdruck: $f = 4\left(1 - \frac{1}{2m}\right) AB$, weil $\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^{-1}$ unter dieser Voraussetzung mit $\left(\frac{\pi}{2m}\right)^{-1} = \frac{2m}{\pi}$ identisch wird.

[35] Für $A = B$ verwandeln sich die den Substitutionen (β) und (δ) correspondirenden Formeln in $f = A^2\pi$, resp. $f = \frac{3}{8} A^2 \pi$, liefern also unter dieser Voraussetzung den Flächeninhalt eines Kreises beziehungsweise einer Astrois mit dem Durchmesser 2 A.

$(\alpha)\ p = 6,\ q = \frac{6}{5} : k = 1, m = 3, n = 1, k_1 = 0, \varkappa = 1;\ f = \frac{10}{9} AB\pi.$

$(\beta)\ p = 2,\ q = 2 : k = 1, m = 1, n = 1, k_1 = 0, \varkappa = 1;\ f = AB\pi.$

$(\gamma)\ p = \frac{6}{5},\ q = \frac{6}{7} : k = 2, m = 3, n = 3, k_1 = 0, \varkappa = 5;\ f = \frac{35}{54} AB\pi.$

$(\delta)\ p = \frac{2}{3},\ q = \frac{2}{3} : k = 3, m = 1, n = 2, k_1 = 1, \varkappa = 1;\ f = \frac{3}{8} AB\pi.$

$(\varepsilon)\ p = \frac{2}{5},\ q = \frac{2}{5} : k = 5, m = 1, n = 3, k_1 = 2, \varkappa = 1;\ f = \frac{15}{128} AB\pi.$

$(\zeta)\ p = \frac{2}{7},\ q = \frac{2}{7} : k = 7, m = 1, n = 4, k_1 = 3, \varkappa = 1;\ f = \frac{35}{1024} AB\pi.$

Was endlich die numerische Berechnung von f für nicht unter (19) subsumirbare Specialisirungen von p, q anbelangt, so läßt sich dieselbe entsprechend der mit (17) identischen Relation:

$$(22) \ldots f = 4\,AB \times \text{num}\left\{\log\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right) + \log\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right) - \log\Gamma\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right\}$$

jederzeit auf Grundlage der bekannten Beziehungen:[36]

$$(23)\quad \log\Gamma(1+a+\sigma) = \log(a+\sigma) + \log(a-1+\sigma) + \log(a-2+\sigma) + \ldots + \log(1+\sigma) + \log\Gamma(1+\sigma),\ 0 < \sigma < 1;$$

$$(24)\quad \log\Gamma(1+\sigma) = \log\left(\frac{\pi\sigma[1-\sigma]}{\sin\pi\sigma}\right) - \log\Gamma(1+[1-\sigma]),\ \frac{1}{2} < \sigma < 1;$$

$$(25)\quad \log\Gamma(1+\sigma) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi\sigma}{\sin\pi\sigma}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right) + 0{\cdot}1836129\sigma - 0{\cdot}0292507\sigma^3 - 0{\cdot}0032075\sigma^5 - 0{\cdot}0005180\sigma^7 - 0{\cdot}0000969\sigma^9 - 0{\cdot}0000195\sigma^{11} - 0{\cdot}0000041\sigma^{13} - \ldots,\ 0<\sigma<\frac{1}{2}$$

durchführen oder auch mit Hilfe der zwölfstelligen Tafel Legendre's[37] effectuiren, in welcher die Brigg'schen Logarithmen der Function $\Gamma(1+\sigma)$ der Reihe nach für $\sigma = 0{\cdot}001, 0{\cdot}002, 0{\cdot}003, \ldots 0{\cdot}999$ angegeben sind. So erhalten wir nach diesen Regeln beispielsweise für

$$(\eta)\ p = 4,\ q = 4 : f = 4AB \times \text{num}\left\{2\log\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) - \log\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = 3{\cdot}708149AB,$$

$$(\vartheta)\ p = 6,\ q = 6 : f = 4AB \times \text{num}\left\{2\log\Gamma\left(\frac{7}{6}\right) - \log\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right\} = 3{\cdot}855243AB,$$

$$(\iota)\ p = 8,\ q = 8 : f = 4AB \times \text{num}\left\{2\log\Gamma\left(\frac{9}{8}\right) - \log\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right\} = 3{\cdot}913843AB,$$

welche Formeln übrigens selbstverständlich nur für solche Flächen gelten, deren Grenzcurven durch eine der drei Gleichungen:[38]

---

[36] Eine sehr eingehende Begründung der nachstehenden Formeln findet sich im ersten und zweiten Capitel der 1859 in Gand erschienenen Inauguraldissertation von Dr. H. Limbourg: „Théorie de la fonction Gamma".

[37] S. h. dessen großes Werk: „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, avec les tables pour en faciliter le calcul numérique", 2. Band, pag. 490—499.

[38] Was speciell die der Relation (26) entsprechenden Curven anbelangt, so sind dieselben in neuester Zeit ziemlich eingehend von F. Weskamp (s. dessen 1876 in Jena erschienene Inaugural-Dissertation: „Untersuchungen über die Curve vierten Grades, deren Gleichung $\frac{x^4}{A^4} + \frac{y^4}{B^4} = 1$") untersucht worden, welcher in seiner Abhandlung (pag. 10, 14, 15) unter Anderem zu den Beziehungen:

$$\frac{f}{2AB} = \omega_2 = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \right.$$

$$(26)\ldots\left(\frac{x}{A}\right)^4+\left(\frac{y}{B}\right)^4=1,\ (27)\ldots\left(\frac{x}{A}\right)^6+\left(\frac{y}{B}\right)^6=1,\ (28)\ldots\left(\frac{x}{A}\right)^8+\left(\frac{y}{B}\right)^8=1$$

analytisch charakterisirt werden können.

Alle durch die Discussion von (1) und (17) gewonnenen Resultate kur zusammenfassend gelangen wir hienach bezüglich unserer dritten Annahme definiti zu folgendem Satze:

Betrachtet man bei der analytischen Untersuchung gegebene Stammformen die Grenzcurven ihrer horizontalen Schnittfläche nicht wie bisher willkürlich als Ellipsen resp. Kreise, sondern ermit telt die jeweiligen Werthe der ihre Formen bedingenden Größe p, q erst von Fall zu Fall auf empirischem Wege, so gestaltet sic die Inhaltsbestimmung der betreffenden Flächen für $p \gtreqless 2, q \gtreqless 2$ in Allgemeinen ebenso einfach wie unter der Voraussetzung: $p = q = 2$ während zugleich bei der Mannigfaltigkeit der unter (1) subsumir baren Curven eine größere Annäherung der Theorie an die Wirk lichkeit ermöglicht wird, als wenn wir von vornherein $p = q = 2$ setze

Es erübrigt jetzt noch, zum Schlusse unserer einleitenden Betrachtunge jene Classification und Bezeichnungsweise der Formzahlen zu besprechen, vo welcher wir bei der Erledigung aller in der vorliegenden Arbeit zu lösende Fragen ausgehen werden. Hiebei stützen wir uns auf die namentlich bei unsere

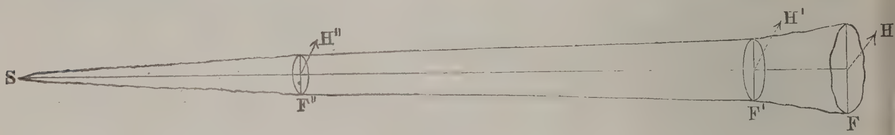


Fig. 15.

einheimischen Waldbäumen häufig zu beobachtende Thatsache, daß die aufein anderfolgenden horizontalen Schnittflächen der einzelnen Stammindividuen fü sich betrachtet gewöhnlich erst über den Wurzelanläufen mehr oder wenig regelmäßig begrenzt erscheinen und in den beasteten Stammtheilen oft wied sehr unregelmäßige Formen annehmen. Bezeichnen wir daher für ein Syste derartiger im Sinne unserer ersten Annahme mit einander vergleichbare Stämme von gleicher Grundfläche F und gleicher Achsenlänge l die erste res letzte regelmäßige horizontale Schnittfläche mit F' resp. F'' und mit l', l'' di mittleren Abstände H'S, H''S dieser Flächen von S (s. die schematische Fig. 15 so sind hinsichtlich der dieser Gruppe von Stämmen entsprechenden mittlere Stammform besonders drei Fälle von Wichtigkeit:

1) Ihre Mantelfläche besitzt für jede der drei Stammsectionen, welche dur Ausführung der Schnitte F'' und F' entstehen, ein eigenes Bildungsgese kann also unter Voraussetzung eines rechtwinkeligen dreiachsigen Coordinate systems mit dem Ursprunge S und der Z-Achse SH stets durch drei Gleichung

$$+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots\Big\} = 1\cdot8540747$$ gelangt, woraus überei stimmend mit dem von uns unter der Annahme $p = q = 4$ für f gewonnenen Resultate (η) die For $f = 3\cdot7081494AB$ hervorgeht.

on der Gestalt $\Phi_1(x, y, z) = 0$, $\Phi_2(x, y, z) = 0$, $\Phi_3(x, y, z) = 0$ analytisch efinirt werden, wobei die erste für $0 \leqq z \leqq l''$, die zweite für $l'' \leqq z \leqq l'$, die ritte für $l' \leqq z \leqq l$ gilt, und die Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 gleichzeitig die Bedingungen: $\Phi_1(x, y, l'') = \Phi_2(x, y, l'')$, $\Phi_2(x, y, l') = \Phi_3(x, y, l')$ erfüllen.

2. Ihre Mantelfläche ist von $z = 0$ bis $z = l'$ nach einem und demselben, urch die Relation: $\Phi_1(x, y, z) = 0$ präcisirten Gesetze gebildet, während sie on $z = l'$ bis $z = l$ durch eine andere Gleichung, z. B. $\Phi_2(x, y, z) = 0$ estimmt erscheint, welche mit der vorhergehenden nur durch die Bedingung: $\Phi_1(x, y, l') = \Phi_2(x, y, l')$ zusammenhängt.

3. Ihre Mantelfläche läßt sich für alle zwischen 0 und l gelegenen Werthe on z durch eine einzige Gleichung zwischen drei veränderlichen Coordinaten: $\Phi(x, y, z) = 0$ analytisch charakterisiren.

Analoge Ueberlegungen gelten natürlich auch für anders gestaltete nittlere Stammformen, welchen die hier entwickelte Auffassungsweise durch entsprechende Wahl von l', l'' angepaßt werden kann.[39] — Wären beispielsweise die aufeinanderfolgenden Schnittflächen von $z = 0$ bis $z = l$ regelmäßig gestaltet, so müßte man dies durch die Substitutionen $l' = l$, $l'' = l$ ausdrücken, hingegen, falls dieselben insgesammt unregelmäßige Formen besitzen würden, $l' = l'' = 0$ setzen.

Hienach kommen bei allen auf solche Stammformen bezüglichen Untersuchungen lediglich folgende sechs Arten von Formzahlen in Betracht:

1. Formzahlen (λ_1), welche das Verhältniß des ganzen Stammvolumens V zu enem eines Cylinders von gleicher Länge l angeben, als dessen Grundfläche aber nicht F sondern allgemein eine andere im Abstande αl, $(0 < \alpha < 1)$ von F gelegene Schnittfläche $\bar{F}$ des Stammes gewählt wird, indem F infolge seiner Lage nd Gestalt nur selten eine bequeme Inhaltsbestimmung gestattet. — Hieher ehören, insoferne α bei variirendem l entweder constant bleiben oder sich ändern ann, außer den echten Schaftformzahlen von Smalian, Preßler[40] u. A. uch alle unechten Schaftformzahlen, wie beispielsweise jene von König.

2. Formzahlen (λ_2), welche das Verhältniß des von $z = 0$ bis $z = l'$ erechneten Stammvolumens V′ zu jenem eines Cylinders von der Länge l' und er Grundfläche F' bestimmen und auf diese Art den von Riniker[41] eingeführten bsoluten Schaftformzahlen entsprechen.

3. Formzahlen (λ_3) für das Verhältniß des von $z = 0$ bis $z = l''$ gerecheten Stammvolumens V″ zu einem Cylinder von der Länge l'' und der Grundfläche F''.

---

[39] Die umfassendste für die Mantelfläche einer gegebenen Stammform möglicherweise erforderliche efinition, welche wir übrigens in der vorliegenden Arbeit noch nicht beanspruchen werden, besteht in einem leichungssysteme von der Gestalt:

$$0 \leqq z \leqq l_1 : \Phi_1(x, y, z) = 0, \quad l_1 \leqq z \leqq l_2 : \Phi_2(x, y, z) = 0, \; \ldots \ldots$$

$l_{n-2} \leqq z \leqq l_{n-1} : \Phi_{n-1}(x, y, z) = 0$, $l_{n-1} \leqq z \leqq l : \Phi_n(x, y, z) = 0$, zu welchem natürlich n ch e Bedingungen: $\Phi_1(x, y, l_1) = \Phi_2(x, y, l_1), \ldots\ldots \Phi_{n-1}(x, y, l_{n-1}) = \Phi_n(x, y, l_{n-1})$ hinzutreten.

[40] S. h. in erster Linie das zwölfte Capitel des bekannten Werkes von M. R. Preßler: „Das Gesetz er Stammbildung und dessen forstwirthschaftliche Bedeutung insbesondere für den Waldbau höchsten Reinertrags.“ Leipzig 1865.

[41] S. h. dessen 1873 in Aarau erschienene Abhandlung: „Ueber Baumform und Bestandesmasse“, pag. und 10.

4. Formzahlen (λ_4) für das Verhältniß des von $z = l'$ bis $z = l$ gerechneten Stammvolumens V_0 zu einem Cylinder von der Länge $l - l'$ und der Grundfläche F'.

5. Formzahlen (λ_5) für das Verhältniß des von $z = l''$ bis $z = l$ gerechneten Stammvolumens V_1 zu einem Cylinder von der Länge $l - l''$, dessen Basis aus denselben Gründen wie bei den Formzahlen λ_1 mit der Schnittfläche $\overline{F}$ identificirt wird.

6. Formzahlen (λ_6) für das Verhältniß des von $z = l''$ bis $z = l'$ gerechneten Stammvolumens V_2 zu einem Cylinder von der Länge $l' - l''$ und der Grundfläche F'.

Es wäre indeß die Mannigfaltigkeit der auf Grundlage dieser Formzahlen aufstellbaren Probleme noch immer sehr bedeutend, wenn nicht zwischen V, V', V''; V_0, V_1, V_2 für einen und denselben Stamm jederzeit die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= V - V' \text{ d. h.: } \lambda_4 F'(l - l') = \lambda_1 \overline{F} l - \lambda_2 F' l'; \\ V_1 &= V - V'' \text{ d. h.: } \lambda_5 \overline{F}(l - l'') = \lambda_1 \overline{F} l - \lambda_3 F'' l''; \\ V_2 &= V' - V'' \text{ d. h.: } \lambda_6 F'(l' - l'') = \lambda_2 F' l' - \lambda_3 F'' l'' \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

bestehen würden, nach welchen die Größen λ_1, λ_2, λ_3; λ_4, λ_5, λ_6, sehr enge mit einander zusammenhängen. Setzen wir nämlich der Kürze wegen die Quotienten $\frac{\overline{F}}{F'} = \mu$, $\frac{l}{l'} = \nu$; $\frac{\overline{F}}{F''} = \mu'$, $\frac{l}{l''} = \nu'$, so ergeben sich aus (29) für $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ allgemein die Formeln:

$$(30) \ldots \lambda_4 = \frac{\lambda_1 \mu \nu - \lambda_2}{\nu - 1}, \; \lambda_5 = \frac{\lambda_1 \mu' \nu' - \lambda_3}{\mu'(\nu' - 1)}, \; \lambda_6 = \frac{\lambda_2 \mu' \nu' - \lambda_3 \mu \nu}{\mu'(\nu' - \nu)},$$

so daß, sobald $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ empirisch ermittelt sind, die drei übrigen Formzahlen λ_4, λ_5, λ_6 stets auf dem Wege der Rechnung gefunden werden können.

Dies vorausgeschickt lassen sich die Hauptfragen unserer Abhandlung nunmehr, wie folgt, formuliren.

I.

Es sei allgemein K der von S bis A (s. die schematische Fig. 16) gerechnete Kubikinhalt eines gegebenen Stammes resp. Stammstückes, h der Abstand AS seiner Endfläche G von S, D deren Maximalstärke $\overline{a_1 a_2}$, endlich λ der Exponent des Verhältnisses, in welchem das in Betracht gezogene Stammvolumen zu jenem eines Cylinders von dem Inhalte Gh steht. — In welcher Weise kann die Mantelfläche eines durch diese Daten charakterisirten Gebildes analytisch definirt werden?

Um dieses Problem zu lösen, empfiehlt es sich, je nachdem λ zwischen 0 und 1 oder zwischen 1 und ∞ liegt, zwei Hauptfälle zu unterscheiden und bei der Aufstellung der im Folgenden zur Sprache kommenden Flächengleichungen stets ein rechtwinkeliges dreiachsiges Coordinatensystem mit dem Ursprunge S zu

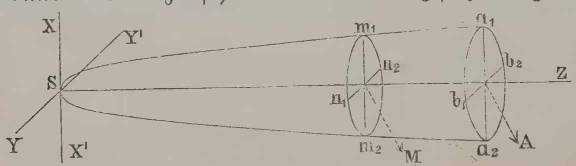


Fig. 16.

verwenden, dessen X-Achse der die Punkte S, a_1, a_2 enthaltenden Ebene an-

hört, während die Z-Achse mit der Verbindungslinie der Punkte S und A coincidiren mag.

Erster Hauptfall: $0 < \lambda < 1$.

Dieß vorausgesetzt, stellen wir uns zunächst die Frage, ob die Mantelfläche des gegebenen Stammes resp. Stammstückes vielleicht allgemein durch eine Gleichung von der Gestalt:

$$(31) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{pqr}{p+q}}$$

wiedergegeben werden kann, beziehungsweise ob es möglich ist, die in (31) auftretenden unbestimmten Constanten a,b,r,p,q allen unserer ersten Aufgabe eigenthümlichen Bedingungen vollständig anzupassen.

Die erste dieser Bedingungen verlangt, daß für $z = 0$ auch x und y verschwinden, wonach p, q jederzeit den in unserer dritten Annahme ausgesprochenen Forderungen zu genügen haben, und für r ausschließlich positive Zahlen zulässig erscheinen. — Würde nämlich r negativ ausfallen, mithin der Specialisirung $z = 0$ in (31) die Gleichung: $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \infty$ entsprechen, so müßte für $z = 0$ wenigstens eine der beiden übrigen Variablen x und y unendlich groß werden, was mit den endlichen Dimensionen jedes Stammes im Widerspruche stünde. Ist hingegen r positiv, so verwandelt sich (31) für $z = 0$ in die Relation: $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = 0$, welche, da $\left(\frac{x}{a}\right)^p$, $\left(\frac{y}{b}\right)^q$ für jedes endliche x und y positiv bleiben, in der That nur durch die Substitutionen: $x = 0$, $y = 0$ befriedigt werden kann.

Die zweite Bedingung geht dahin, daß der größte Durchmesser jener Schnittcurve, in welcher eine in der Distanz h von S senkrecht zur Z-Achse gelegte Ebene die durch (31) charakterisirte Fläche durchschneidet, gleich D sein muß. Hienach ergibt sich für a allgemein der Werth $\frac{1}{2}D$, indem die Beziehung (31) für $z = h$ in $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = 1$ übergeht, resp. 2a und 2b unmittelbar die beiden Hauptachsen $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$ der besprochenen Schnittcurve vorstellen.

Es soll ferner drittens die von der letzteren begrenzte Querfläche den vorgeschriebenen Inhalt G besitzen, welche neue Bedingung zufolge unserer einleitenden Betrachtungen in der Gleichung: $a\,b\,\varphi(p, q) = \frac{1}{2}\,b\,D\,\varphi(p, q) = G$ ihren analytischen Ausdruck findet, also zur Bestimmung von b augenscheinlich die Formel liefert:

$$(32) \ldots b = \frac{2G}{D\varphi(p,q)} = \text{num}\left\{0{\cdot}3010300 + \log G - [\log\varphi(p, q) + \log D]\right\}$$

Die vierte und letzte Bedingung besteht darin, daß die der Relation (31) correspondirende krumme Mantelfläche des Stammes im Vereine mit dem Querschnitte G ein Volumen von der Größe $K = \lambda\,Gh$ begrenzen soll, d. h. es muß — unter g allgemein den Inhalt der im Abstande $SM = z$ von S gelegenen Querfläche verstanden — durch die Constanten a,b,r,p,q noch die Relation:

$$(33) \ldots \int_0^h g\,dz = \frac{1}{4}\varphi(p,q)\int_0^h \overline{m_1 m_2} \times \overline{n_1 n_2}\,dz = \lambda\,G h$$

befriedigt werden. Dieselbe verwandelt sich, da die beiden Hauptachsen $\overline{m_1 m_2}$, $\overline{n_1 n_2}$ der Fläche g entsprechend der aus (31) hervorgehenden Beziehung:

$$x^p : \left\{a\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{qr}{p+q}}\right\}^p + y^q : \left\{b\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{pr}{p+q}}\right\}^q = 1$$

augenscheinlich die Werthe: $\overline{m_1\ m_2} = 2a\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{qr}{p+q}}$, $\overline{n_1\ n_2} = 2b\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{pr}{p+q}}$ besitzen, in die folgende:

$$a\,b\,\varphi(p,q)\int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{qr}{p+q}}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{pr}{p+q}} dz = \frac{G}{h^r}\int_0^h z^r\,dz = \frac{Gh}{r+1} = \lambda\,G\,h,$$

liefert also zur Bestimmung von r die einfache Gleichung: $\frac{1}{r+1} = \lambda$, aus welcher direct: $(34) \ldots r = \frac{1}{\lambda} - 1 = \frac{1-\lambda}{\lambda}$

folgt. Es erscheint demnach der jeweilige Werth von r ebenso wie jener von a völlig unabhängig von den Größen p, q, während die Berechnung von b nur dann vollständig durchgeführt werden kann, wenn die den Grenzcurven der aufeinanderfolgenden Querschnitte des untersuchten Stammes zugehörigen Constanten p, q numerisch gegeben sind. Setzen wir nun im Folgenden voraus, daß die Größen p, q für Stämme von gleicher Holzart im Mittel wenigstens näherungsweise als constant angesehen werden dürfen, so läßt sich auf Grundlage dieser Annahme[12] in der That ein allgemeines Verfahren ableiten, nach welchem die fraglichen numerischen Werthe von p, q in jedem gegebenen Falle aus gewissen empirischen Daten ohne Schwierigkeit zu ermitteln sind.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst mit Hilfe der Relation (2) die den Abscissen: $x_1 = \frac{1}{2}A$, $x_2 = \frac{1}{4}A$, $x_3 = \frac{1}{8}A$ für irgend welche Werthe von p, q zugehörigen Ordinaten:

$$y_1 = B\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right\}^{\frac{1}{q}},\ y_2 = B\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^p\right\}^{\frac{1}{q}},\ y_3 = B\left\{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^p\right\}^{\frac{1}{q}},$$

deren Quotienten:

$$\frac{y_2}{y_1} = \left\{\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^p}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2p}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p\right\}^{\frac{1}{q}}, \text{ resp.}$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \left\{\frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^p}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^p}\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{3p}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2p}}\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{\frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^{2p}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

[12] Dieselbe zeichnet sich vor anderen möglichen Voraussetzungen durch ihre Einfachheit aus und schließt natürlich die bisherige Ansicht, daß p, q speciell für unsere einheimischen Waldbäume durchschnittlich gleich angenommen werden dürfen, als einen besonderen Fall in sich.

diglich Functionen von p, q vorstellen und daher ganz unabhängig von den weiligen Hauptachsen 2A, 2B des in Betracht gezogenen Querschnittes gefunden erden können. Denken wir uns nämlich die Maximalstärke[43] $A_1 A_2 = 2A$ des

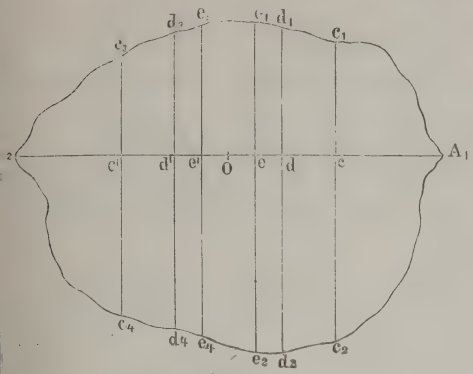


Fig. 17.

letzteren (s. die schematische Fig. 17) im Punkte O halbirt und in den Abständen $Oc = Oc' = \frac{1}{2} O A_1 =$ $= \frac{1}{2} A, \; Od = Od' = \frac{1}{4} A, \; Oe =$ $= Oe' = \frac{1}{8} A$ von O die auf $A_1 A_2$ senkrecht stehenden Sehnen: $\overline{c_1 c_2}$, $\overline{c_3 c_4}$; $\overline{d_1 d_2}$, $\overline{d_3 d_4}$; $\overline{e_1 e_2}$, $\overline{e_3 e_4}$ gezogen, so ergeben sich die der Grenzcurve der betreffenden Schnittfläche eigenthümlichen Ordinatenverhält-sse $\frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y_3}{y_2}$ nach Abmessung der genannten Sehnen auf rein empirischem ege aus den Gleichungen:

$$(35) \ldots \frac{y_2}{y_1} = \frac{\overline{d_1 d_2} + \overline{d_3 d_4}}{\overline{c_1 c_2} + \overline{c_3 c_4}}, \quad (36) \ldots \frac{y_3}{y_2} = \frac{\overline{e_1 e_2} + \overline{e_3 e_4}}{\overline{d_1 d_2} + \overline{d_3 d_4}}.$$

Indem wir dann diese Quotienten ebenso für eine Reihe anderer Schnitt-ichen berechnen, welche entweder demselben Stamme oder anderen gleich-tigen Baumindividuen angehören und aus den hiebei für $\frac{y_2}{y_1}$ und $\frac{y_3}{y_2}$ erhalte-n speciellen Resultaten deren arithmetische Mittel m_1, m_2 bilden, gelangen wir irect zu zwei Beziehungen von der Gestalt:

$$(37) \ldots m_1 = \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p\right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (38) \ldots m_2 = \left\{\frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^{2p}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p}\right\}^{\frac{1}{q}},$$

.s welchen die den Querflächen der untersuchten Baumstämme charakteristischen ittleren Werth von p, q nunmehr auf dem Wege der Rechnung eruirt erden müssen.

Um dies zu ermöglichen, dividiren wir nach Einführung der Substitution $\left(\frac{1}{2}\right)^p = u$ in (37) und (38) den Brigg'schen Logarithmus von m_2:

$$\lg m_2 = \frac{1}{q}\left\{\log(1 + u + u^2) - \log(1 + u)\right\} = \frac{1}{q}\left\{\log(1 - u^3) - \log(1 - u^2)\right\} =$$

$$= \frac{\log e}{q}\left(u^2 - u^3 + \frac{1}{2} u^4 - \frac{1}{6} u^6 + \frac{1}{4} u^8 - \frac{1}{3} u^9 + \frac{1}{5} u^{10} - \ldots\right)$$

durch jenen von m_1:

$$\lg m_1 = \frac{1}{q} \log(1 + u) = \frac{\log e}{q}\left(u - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{6} u^6 + \ldots\right)$$

[43] Besitzt der untersuchte Querschnitt zwei oder mehrere größte Durchmesser, so bestimme man nach der e gegebenen Vorschrift für jeden einzelnen dieser Durchmesser die auf ihn bezüglichen Ordinatenverhältnisse $\frac{y_3}{y_2}$ und betrachte als definitive Werthe dieser Quotienten schließlich die sämmtlichen für $\frac{y_2}{y_1}$ resp. $\frac{y_3}{y_2}$ ge-denen Einzeldaten entsprechenden Mittelwerthe.

und gewinnen so vorläufig die Identität:

$$(39)\quad \frac{u-u^2+\frac{1}{2}u^3-\frac{1}{6}u^5+\frac{1}{4}u^7-\frac{1}{3}u^8+\frac{1}{5}u^9-\frac{1}{12}u^{11}+\dots}{1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{3}u^2-\frac{1}{4}u^3+\frac{1}{5}u^4-\frac{1}{6}u^5+\frac{1}{7}u^6-\frac{1}{8}u^7+\dots}=$$

$$=u-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{12}u^3+\frac{3}{8}u^4-\frac{199}{720}u^5-\frac{5}{288}u^6+\dots=\frac{\log m_2}{\log m_1}=\varkappa,$$

in welcher der rechter Hand stehende logarithmische Quotient $\varkappa$ zufolge der Relation

$$\log m_1-\log m_2=\frac{1}{q}\log\frac{(1+u)^2}{1+u+u^2}=\frac{1}{q}\log\left(1+\frac{u}{1+u+u^2}\right)$$

augenscheinlich für **jedes beliebige positive** p und q eine zwischen 0 und 1 variirende Größe repräsentirt. Es liegt somit nahe, die fragliche Unbekannte u als eine Potenzreihe von der Gestalt:

$$(40)\quad u=\varkappa+A_2\varkappa^2+A_3\varkappa^3+A_4\varkappa^4+A_5\varkappa^5+A_6\varkappa^6+A_7\varkappa^7+\dots$$

zu definiren und deren Coëfficienten $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \dots$ nachträglich durch die Bedingung zu bestimmen, daß die Substitution von (40) in (39) eine **identische** Gleichung liefern muß. Auf diese Art[44] erhalten wir für u schließlich die Formel:

$$(41)\quad u=\varkappa+\frac{1}{2}\varkappa^2+\frac{7}{12}\varkappa^3+\frac{11}{24}\varkappa^4+\frac{349}{720}\varkappa^5+\frac{613}{1440}\varkappa^6+\dots,$$

beziehungsweise zur Auffindung der Größen p, q die einfachen Relationen[45]:

$$(42)\dots p=-\frac{\log u}{\log 2}=-3{\cdot}3219281\log u,\quad (43)\dots q=\frac{\log(1+u)}{\log m_1},$$

womit der allgemeine theoretische Nachweis beendigt erscheint, **daß** die in (3) **vorkommenden** Constanten a, b, r, p, q **in der That insgesammt eindeutig determinirt werden können.**

Um übrigens das wichtige Resultat (41) auch **direct** zu controliren, transformiren wir die Beziehung (39) in:

$$\log\left(1+\frac{u^2}{1+u}\right)=\varkappa\log(1+u)\ \text{d. h.:}\ 1+\frac{u^2}{1+u}=(1+u)^\varkappa$$

und ersetzen in den keines weiteren Commentars bedürftigen Entwicklungen

$$1+\frac{u^2}{1+u}=1+u^2-u^3+u^4-u^5+u^6-u^7+\dots,$$

$$(1+u)^\varkappa=1+\binom{\varkappa}{1}u+\binom{\varkappa}{2}u^2+\binom{\varkappa}{3}u^3+\binom{\varkappa}{4}u^4+\binom{\varkappa}{5}u^5+\dots=$$

$$=1+\varkappa u-\left(\frac{1}{2}\varkappa-\frac{1}{2}\varkappa^2\right)u^2+\left(\frac{1}{3}\varkappa-\frac{1}{2}\varkappa^2+\frac{1}{6}\varkappa^3\right)u^3-$$

$$-\left(\frac{1}{4}\varkappa-\frac{11}{24}\varkappa^2+\frac{1}{4}\varkappa^3-\frac{1}{24}\varkappa^4\right)u^4+\left(\frac{1}{5}\varkappa-\frac{5}{12}\varkappa^2+\frac{7}{24}\varkappa^3-\frac{1}{12}\varkappa^4+\frac{1}{120}\varkappa^5\right)u^5$$

$$-\left(\frac{1}{6}\varkappa-\frac{137}{360}\varkappa^2+\frac{5}{16}\varkappa^3-\frac{17}{144}\varkappa^4+\frac{1}{48}\varkappa^5-\frac{1}{720}\varkappa^6\right)u^6+\dots$$

---

[44] S. h. die im 2. Jahrgange des „Centralblattes für das gesammte Forstwesen“ publicirte Abhandlung d. Verf. „Ueber zwei fundamentale Probleme der Zinseszinsrechnung“, pag. 200 und 201.

[45] Völlig analog gestaltet sich die Berechnung von p, q, wenn wir hiebei — unter μ irgend eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl, unter y′, y″, y‴ die den Abscissen: μA, $\mu^2 A$, $\mu^3 A$ entsprechenden Ordinaten der in Betracht gezogenen Curve verstanden — von den Quotienten:

$$m'=\frac{y''}{y'}=\left(\frac{1-\mu^{2p}}{1-\mu^p}\right)^{\frac{1}{q}}=(1+\mu^p)^{\frac{1}{q}},\ m''=\frac{y'''}{y''}=\left(\frac{1-\mu^{3p}}{1-\mu^{2p}}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{1+\mu^p+\mu^{2p}}{1+\mu^p}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ausgehen. Dies vorausgesetzt ergibt sich nämlich für die Größe: $\mu^p=U$ allgemein der Ausdruck:

$$U=\left(\frac{\log m''}{\log m'}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\log m''}{\log m'}\right)^2+\frac{7}{12}\left(\frac{\log m''}{\log m'}\right)^3+\frac{11}{24}\left(\frac{\log m''}{\log m'}\right)^4+\frac{349}{720}\left(\frac{\log m''}{\log m'}\right)^5+\frac{613}{1440}\left(\frac{\log m''}{\log m'}\right)^6+\dots$$

Potenzgrößen u^2, u^3, u^4, u^5, u^6, $u^7, \ldots$ durch die aus (41) ableitbaren Ausdrücke:

$$u^2 = \varkappa^2 + \varkappa^3 + \frac{17}{12}\varkappa^4 + \frac{3}{2}\varkappa^5 + \frac{1273}{720}\varkappa^6 + \frac{449}{240}\varkappa^7 + \ldots,$$

$$u^3 = \varkappa^3 + \frac{3}{2}\varkappa^4 + \frac{5}{2}\varkappa^5 + \frac{13}{4}\varkappa^6 + \frac{343}{80}\varkappa^7 + \ldots,$$

$$u^4 = \varkappa^4 + 2\varkappa^5 + \frac{23}{6}\varkappa^6 + \frac{35}{6}\varkappa^7 + \ldots, \quad u^5 = \varkappa^5 + \frac{5}{2}\varkappa^6 + \frac{65}{12}\varkappa^7 + \ldots,$$

$= \varkappa^6 + 3\varkappa^7 + \ldots$, $u^7 = \varkappa^7 + \ldots$, 2c. Vereinigen wir hierauf die gleichen tenzen von $\varkappa$ zugehörigen Coëfficienten miteinander, so ergibt sich ohne hwierigkeit die Gleichung:

$$(44) \quad 1 + \frac{u^2}{1+u} = (1+u)^\varkappa = 1 + \varkappa^2 + \frac{11}{12}\varkappa^4 + \frac{613}{720}\varkappa^6 + \ldots,$$

lche die Richtigkeit der Formel (41) in überzeugender Weise darthut, und ßerdem insoferne Beachtung verdient, als in der rechter Hand stehenden un- llichen Reihe nur gerade Potenzen von $\varkappa$ vorkommen. Es erübrigt jetzt ch, auf Grundlage unserer letzten Ergebnisse einen zur bequemen näherungs- isen Berechnung von u dienlichen Ausdruck zu gewinnen, wobei wir am ten von der mit (42) coincidirenden Beziehung:

$$u = \varkappa + A_2\varkappa^2 + A_3\varkappa^3 + A_4\varkappa^4 + A_5\varkappa^5 + A_6\varkappa^6 +$$
$$[A_6 + (A_7 - A_6)]\varkappa^7 + [A_6 + (A_8 - A_6)]\varkappa^8 + [A_6 + (A_9 - A_6)]\varkappa^9 + \ldots =$$
$$= \varkappa + A_2\varkappa^2 + A_3\varkappa^3 + A_4\varkappa^4 + A_5\varkappa^5 + A_6\left(\frac{\varkappa^6}{1-\varkappa}\right) +$$
$$+ \left\{(A_7 - A_6) + (A_8 - A_6)\varkappa + (A_9 - A_6)\varkappa^2 + (A_{10} - A_6)\varkappa^3 + \ldots\right\}\varkappa^7$$

sgehen. Da nämlich das Product: $\left\{(A_7 - A_6) + (A_8 - A_6)\varkappa + \ldots\right\}\varkappa^7$ zu- ge der Beschaffenheit der Coëfficienten $A_6, A_7, A_8, A_9, \ldots$ gegenüber der Summe ihm vorhergehenden Reihenglieder stets relativ sehr klein bleibt, so läßt ein erster Näherungswerth von u, u' unmittelbar aus der Relation:

$$(45) \quad u' = \varkappa + \frac{1}{2}\varkappa^2 + \frac{7}{12}\varkappa^3 + \frac{11}{24}\varkappa^4 + \frac{349}{720}\varkappa^5 + \frac{613}{1440}\left(\frac{\varkappa^6}{1-\varkappa}\right) =$$
$$= \text{num}[\log\varkappa] + \text{num}[0{\cdot}6989700 + 2\log\varkappa - 1] + \text{num}[0{\cdot}7659168 +$$
$$+ 3\log\varkappa - 1] + \text{num}[0{\cdot}6611815 + 4\log\varkappa - 1] + \text{num}[0{\cdot}6854929 +$$
$$+ 5\log\varkappa - 1] + \text{num}[0{\cdot}6290980 + 6\log\varkappa - \{1 + \log(1-\varkappa)\}]$$

echnen, welche im Vereine mit der aus (39) resultirenden Correcturformel:

$$(46) \quad \Delta u = \frac{(1+u')\left[(1+u')^{1+\varkappa} - 1 - u'(1+u')\right]}{u'(2+u') - \varkappa(1+u')^{1+\varkappa}}$$

e Bestimmung von u bis zu jedem beliebigen Genauigkeitsgrade ermög- it. In sehr vielen Fällen ist es jedoch nicht einmal nothwendig, an u' eine Correctur anzubringen, indem die Substitution von u' in (42) gemeiniglich eine Größe p bereits so nahe stehende Zahl p' liefert, daß die wahren erthe von p, u und q ohne Anwendung irgend welcher Correctur-

---

in zur Bestimmung von p, q in letzter Linie das Gleichungssystem:

$$p = \frac{\log U}{\log \mu}, \qquad q = \frac{\log(1+U)}{\log m'},$$

welchem speciell für $\mu = \frac{1}{2}$ wieder die Formeln (42) und (43) resultiren.

*

formeln festgestellt werden können. — Als praktische Erläuterung hie
mögen folgende drei Beispiele dienen:

a) Welcher Curvengattung gehören die Grenzlinien solcher Querflächen
deren Ordinatenquotienten $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2}$ erfahrungsgemäß im Mittel die Wert
$m_1 = 1{\cdot}1180340$, $m_2 = 1{\cdot}0246951$ besitzen? — In diesem Falle erfolgt
Berechnung von u' nach dem Schema:

$$\log m_1 = 0{\cdot}0484550,\ \log m_2 = 0{\cdot}0105946,\ \log \varkappa = 0{\cdot}3397460 - 1;$$
$$u' = \text{num}[\log \varkappa] + \text{num}[0{\cdot}3784620 - 2] + \text{num}[0{\cdot}7851548 - 3] +$$
$$+ \text{num}[0{\cdot}0201655 - 3] + \text{num}[0{\cdot}3842229 - 4] + \text{num}[0.7747274 - 5]$$
$$= 0{\cdot}2186482 + 0{\cdot}0239035 + 0{\cdot}0060975 + 0{\cdot}0010475 + 0{\cdot}0002422 +$$
$+ 0{\cdot}0000595 = 0{\cdot}2499984$. Wir erhalten mithin zunächst für p' das Resul
$p' = -\frac{\log u'}{\log 2} = 3{\cdot}3219281 \times 0{\cdot}6020628 = 2{\cdot}0000093$, resp. für p, u und q
Werthe: $p = 2,\ u = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ q = \frac{\log 5 - \log 4}{\log m_1} = \frac{0{\cdot}0969100}{0{\cdot}0484550} = 2,$
deren Richtigkeit daraus erhellt, daß die unter der Annahme: $p = q = 2$
y_1, y_2, y_3 allgemein giltigen Gleichungen:

$$y_1 = 0{\cdot}8660254\,B,\ y_2 = 0{\cdot}9682458\,B,\ y_3 = 0{\cdot}9921567\,B,$$

durch einander dividirt, wirklich die Irrationalzahlen m_1, m_2 liefern. Die fr
lichen Grenzcurven sind also insgesammt Ellipsen mit irgend welchen Ha
achsen A, B.

b) Durch welche Beziehung zwischen zwei veränderlichen Coordinaten x
lassen sich jene krummen Linien charakterisiren, deren Ordinatenquotienten
Decimalbrüchen: $m_1 = 1{\cdot}1745431$, $m_2 = 1{\cdot}0235962$ entsprechen?

$$\log m_1 = 0{\cdot}0698689,\ \log m_2 = 0{\cdot}0101287,\ \log \varkappa = 0{\cdot}1612698 - 1;$$
$$u' = \text{num}[\log \varkappa] + \text{num}[0{\cdot}0215096 - 2] + \text{num}[0{\cdot}2497262 - 3] +$$
$$+ \text{num}[0{\cdot}3062607 - 4] + \text{num}[0{\cdot}4918419 - 5] + \text{num}[0{\cdot}6647340 - 6]$$
$$= 0{\cdot}1449672 + 0{\cdot}0105077 + 0{\cdot}0017772 + 0{\cdot}0002024 + 0{\cdot}0000310 +$$
$+ 0{\cdot}0000046 = 0{\cdot}1574901$. — Hieraus folgt: $p' = 3{\cdot}3219281 \times 0{\cdot}8027467$
$= 2{\cdot}6666668$, resp. $p = \frac{8}{3},\ u = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{3}} = u',\ q = \frac{0{\cdot}0635173}{0{\cdot}0698689} = 0{\cdot}90909\ldots =$

so daß alle hieher gehörigen Curven durch die Gleichung: $\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{8}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{10}{11}} =$
analytisch definirbar sind, für welche die den Substitutionen: $x = \frac{1}{2}A, \frac{1}{4}A, \frac{1}{8}$
correspondirenden Ordinaten:

$$y_1 = 0{\cdot}8281950\,B,\ y_2 = 0{\cdot}9727507\,B,\ y_3 = 0{\cdot}9957039\,B$$

thatsächlich bei beliebigem A und B auf die in diesem Beispiele gewähl
Specialisirungen von m_1 und m_2 führen.

c) Es seien drittens die Werthe von m_1 und m_2: $m_1 = 1{\cdot}05181$
$m_2 = 1{\cdot}0030628$, mithin:

$$\log m_1 = 0{\cdot}0219408,\ \log m_2 = 0{\cdot}0013281,\ \log \varkappa = 0{\cdot}7819784 - 2;$$
$$u' = \text{num}[\log \varkappa] + \text{num}[0{\cdot}2629268 - 3] + \text{num}[0{\cdot}1118520 - 4] +$$
$$+ \text{num}[0{\cdot}7890951 - 6] + \text{num}[0{\cdot}5953849 - 7] + \text{num}[0{\cdot}3480860 - 8$$

wonach die Addition der fünf ersten Summenglieder:

0·0605311, 0·0018320, 0·0001294, 0·0000062, 0·0000004
u' die Irrationalzahl: 0·0624991 liefert[46] hingegen der letzte Summand: 00000022 ... die siebente Decimalstelle von u' nicht mehr beeinflußt. — Als finitive Resultate für u, p und q ergeben sich diesmal die folgenden:

$$u = 0{\cdot}0625 = \frac{1}{16}, \; p = \frac{\log 16}{\log 2} = 4, \quad q = \frac{0{\cdot}0263289}{0{\cdot}0219408} = 1{\cdot}19999\ldots = \frac{6}{5},$$

en Richtigkeit sich mit Hilfe der jeder Gleichung von der Gestalt:

$\left(\frac{}{}\right)^4 + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{6}{5}} = 1$ zukommenden Specialwerthe von y_1, y_2, y_3:

$$y_1 = 0{\cdot}9476386\,B, \; y_2 = 0{\cdot}9967437\,B, \; y_3 = 0{\cdot}9997965\,B$$

alog wie bei den Beispielen a) und b) nachweisen läßt.

Nachdem wir so die Ueberzeugung gewonnen haben, daß unsere in der lation (31) gegebene Lösung des ersten Problems nicht nur theoretisch öglich, sondern auch praktisch leicht durchführbar sei, mögen zum Schlusse ser auf (31) bezüglichen Untersuchungen noch folgende in analytischer insicht bedeutsame Consequenzen derselben erwähnt werden:

1. Jede durch (31) characterisirbare krumme Fläche durchschneidet die den Coordinatenebenen ZSX und ZSY in zwei Schnittlinien von den eichungen:

$$(47)\ldots x = a\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{qr}{p+q}}, \text{ beziehungsweise: } (48)\ldots y = b\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{pr}{p+q}},$$

lche, da die zweiten Differentialquotienten von x und y nach z:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{aqr\,[q\,(r-1)-p]}{(p+q)^2 z^2}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{qr}{p+q}}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{bpr\,[p\,(r-1)-q]}{(p+q)^2 z^2}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{pr}{p+q}}$$

e jeweiligen Zeichen von $z = 0$ bis $z = \infty$ beibehalten, nirgends Inflexions- nkte besitzen, d. h. entweder in ihrer ganzen Ausdehnung convex oder radlinig oder concav gegen die Z-Achse verlaufen. Es kann daher die elation (31) beispielsweise bei einem Baumschafte, dessen Längs- nitte insgesammt ∫ förmig begrenzt sind, wohl den Annahmen:

$$K = V', h = l', G = F', \lambda = \lambda_2, \text{ resp. } K = V'', h = l'', G = F''', \lambda = \lambda_3$$

ngepaßt, aber nie zur Beschreibung der Mantelfläche des ganzen tammes verwendet werden.

---

[46] Die geringfügige Abweichung der Größe u' von u um 0·0000009 hat nicht etwa in der Unzuläng- keit der zur Bestimmung von u' aufgestellten Näherungsformel (45) sondern darin ihren Grund, daß, um auf sieben Decimalen genau zu rechnen, statt des siebenstelligen Brigg'schen Logarithmus von m_2 bereits achtstellige: $\log m_2 = 0{\cdot}00132812$ genommen werden muß. In der That ergibt sich nach dieser Abänderung x der Werth: 0·0605320, resp. für u' direct: $u' = 0{\cdot}0625000 = u$, woraus zu ersehen ist, daß zur Erzielung sonders genauer Resultate eine Berechnung der Größen $\log m_1$, $\log m_2$ bis auf zehn und mehr cimalen nöthig werden kann. — Für solche, selbstverständlich nur ausnahmsweise vorkommende lle dürften dann namentlich folgende Tafeln durch ihre große Uebersichtlichkeit und Zuverlässigkeit vorzüglich ignet sein:

1. Tables des logarithmes vulgaires a dix decimales, construites d'après un nouveau mode par Pineto. — S. Petersbourg, 1871. Imprimerie de l'Académie impériale des sciences.

2. Kurze Hilfstafel zur bequemen Berechnung fünfzehnstelliger Logarithmen zu gegebenen Zahlen und gekehrt der Zahlen zu fünfzehnstelligen Logarithmen. Von A. Steinhauser. Wien, 1865 Fr. Beck's Ver- sbuchhandlung.

3. Tafeln zur dreißigstelligen logarithmischen Rechnung, berechnet von Dr. R. Hoppe. Leipzig, 1876. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

* *

2. Sind die aufeinanderfolgenden Querflächen des untersuchten Stamme resp. Stammstückes elliptisch begrenzt, d. h. $p = q = 2$, $\frac{pq}{p+q} = 1$, $\varphi(p,q) = \pi$ so verwandeln sich die Beziehungen (31) und (32) in:

$$\left(\frac{2x}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}},\ b = \text{num}\left\{0\cdot8038801 + \log G - [1 + \log D]\right\},$$

woraus speciell für kreisförmige Querschnitte die beachtenswerthe Gleichung

$$\left(\frac{2x}{D}\right)^2 + \left(\frac{2y}{D}\right)^2 = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ oder: } x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

folgt. Im letzteren Falle kann also die der Relation (31) correspon dirende krumme Fläche unmittelbar durch Rotation einer de Coordinatenebene ZSX angehörigen Linie von der Gleichung $x = \frac{D}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}}$ erzeugt werden, welcher Satz zuerst von Smalian[47] entdeck aber erst von Riniker[48] richtig verwerthet worden ist.

3. Sind endlich für die Grenzcurven der in Betracht gezogenen Querschnitt die Exponenten p, q einander gleich und außerdem $\lambda = \frac{1}{3}$, so repräsenti die diesen Substitutionen entsprechende Specialisirung von (31):

$$(49) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^p = \left(\frac{z}{h}\right)^p$$

stets eine conische Fläche, welche durch die Bewegung einer den Punkt S be ständig enthaltenden Geraden längs der Peripherie des Querschnittes G entsteh

Zweiter Hauptfall: $1 < \lambda < \infty$.

Wesentlich anders als unter der Annahme: $0 < \lambda < 1$ gestaltet sich d analytische Bestimmung der Mantelflächen solcher Stämme, resp. Stammtheil für welche λ größer als 1 ausfällt, also die Relation (31) infolge ihre Unvereinbarkeit mit negativen Werthen von r ungiltig wird. An ihre Stel tritt nämlich in diesem Falle die Gleichung:

$$(50) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{ze^{-\frac{rz}{h}}}{he^{-r}}\right)^{\frac{pq}{p+q}},$$

deren Constanten a, b, p, q, r, wie sich leicht nachweisen läßt, ebenfalls aus de charakteristischen Bedingungen des ersten Problems jederzeit eindeutig bestimm werden können.

Was zunächst die Auffindung der Größen a, b, p, q betrifft, so gelte hiebei unmittelbar die früher von uns entwickelten Formeln (32), (42) und (43 indem das Product: $ze^{-\frac{rz}{h}}$ für $z = 0$ regelmäßig verschwindet und für $z =$ in he^{-r} übergeht, mithin zwischen a, b, p, q wieder die Beziehung: $ab\,\varphi(p,q) =$ besteht. Da ferner unter Voraussetzung der mit (50) identischen Gleichung:

$$x^p : \left\{a\left(\frac{ze^{-\frac{rz}{h}}}{he^{-r}}\right)^{\frac{q}{p+q}}\right\}^p + y^q : \left\{b\left(\frac{ze^{-\frac{rz}{h}}}{he^{-r}}\right)^{\frac{p}{p+q}}\right\}^q = 1$$

---

[47] S. h. dessen in der 22. Anmerkung citirtes Werk, pag. 22, 23 und 24.

[48] S. h. dessen in der 41. Anmerkung citirte Abhandlung, pag. 4, 5, 6, 12 und 13.

im Abstande SM = z von S (s. Fig. 16) gelegene Querfläche g jedes der-
igen Stammes augenscheinlich die Hauptachsen:

$$\overline{m_1 m_2} = 2a\left(\frac{ze^{-\frac{rz}{h}}}{he^{-r}}\right)^{\frac{q}{p+q}}, \quad \overline{n_1 n_2} = 2b\left(\frac{ze^{-\frac{rz}{h}}}{he^{-r}}\right)^{\frac{p}{p+q}}$$

und den Inhalt:

$$) \ldots g = \frac{1}{4}\overline{m_1 m_2} \times \overline{n_1 n_2}\,\varphi(p, q) = ab\,\varphi(p, q)\left(\frac{ze^{-\frac{rz}{h}}}{he^{-r}}\right) = G\left(\frac{ze^{-\frac{rz}{h}}}{he^{-r}}\right)$$

tzt, so ergibt sich für das von $z = 0$ bis $z = h$ gerechnete Stammvolumen allgemein der Ausdruck:

$$K = \frac{Ge^r}{h}\int_0^h ze^{-\frac{rz}{h}}\,dz = G\,h\,e^r\int_0^1 ue^{-ru}du = G\,h\,e^r\left|-\frac{(1+ru)\,e^{-ru}}{r^2}\right|_0^1 =$$

$$= Gh\,e^r\left(\frac{1-[1+r]\,e^{-r}}{r^2}\right) = Gh\left(\frac{e^r-1-r}{r^2}\right),$$

sen Gleichstellung mit der Formel: $K = \lambda Gh$ zur Ermittlung von r sofort transcendente Relation:

$$(52) \ldots \psi(r) = \frac{e^r - 1 - r}{r^2} = \lambda$$

ert. Es entspricht daher mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Function r) zufolge der Identität:

$$\psi'(r) = \frac{(r-2)\,e^r + (r+2)}{r^3} = \frac{1}{3!} + \frac{2r}{4!} + \frac{3\,r^2}{5!} + \ldots + \frac{(k+1)\,r^k}{(k+3)!} + \ldots$$

von 1 bis ∞ variirendem r stetig von $\psi(1) = e - 2 = 0{\cdot}7182818$ bis

$$\psi(\infty) = \lim_{r=\infty}\left(\frac{e^r-1-r}{r^2}\right) = \lim_{r=\infty}\left(\frac{e^r-1}{2r}\right) = \lim_{r=\infty}\left(\frac{e^r}{2}\right) = \infty$$

hst, jeder zwischen 1 und ∞ gelegenen Specialisirung von λ ein bestimmter, elmäßig die Einheit überschreitender Werth von r, durch dessen Substitution (50) man schließlich die dem betreffenden empirischen Zahlenwerthe von λ crespondirende Flächengleichung erhält [49].

Um nunmehr auch über die eigenthümlichen Formverhältnisse der für > 1 unter (50) subsumirbaren Gebilde den nöthigen Aufschluß zu gewinnen, achten wir in der Formel (51) die Aenderungen des in ihr auftretenden tors $ze^{-\frac{rz}{h}}$ bei von 0 bis h variirenden z auf Grundlage der Relationen:

$$\frac{d\left(ze^{-\frac{rz}{h}}\right)}{dz} = \left(1-\frac{rz}{h}\right)e^{-\frac{rz}{h}}, \quad \frac{d^2\left(ze^{-\frac{rz}{h}}\right)}{dz^2} = -\frac{r}{h}\left(2-\frac{rz}{h}\right)e^{-\frac{rz}{h}}.$$

selben lehren, daß der erste Differentialquotient von $ze^{-\frac{rz}{h}}$ für $0 < z < \frac{h}{r}$ tiv, für $\frac{h}{r} < z \leqq h$ negativ bleibt und für $z = \frac{h}{r}$ verschwindet, während e zweite Differentialquotient dieser Function gleichzeitig in $-\frac{r}{eh}$ übergeht, d. h. nehmen die aufeinanderfolgenden Querflächen g im Allgemeinen

[49] Eine eingehende Discussion von (52) wäre hier deshalb überflüssig, weil λ nach den bisherigen rungen für alle einheimischen Waldbäume zwischen 0 und 1 liegt und insoferne für $\lambda > 1$ nur ein retischer Nachweis der Lösbarkeit unseres ersten Problems wünschenswerth erscheint.

von S bis zu einer im Abstande $\frac{h}{r}$ von S befindlichen Querfläche
mit dem Inhalte:

$$(53)\ldots \overline{g} = G\left(\frac{e^{r-1}}{r}\right)$$

stetig zu,[50] hingegen von $z = \frac{h}{r}$ bis $z = h$ continuirlich ab, wonach d
hieher gehörigen Stammformen theilweise jenen von Chorisia, Brachychiton[51]
mehr oder weniger verwandt sind.

Uebrigens ist leicht einzusehen, daß die Relation (50) bei einer en
sprechenden Erweiterung des bisher für r angenommenen Variationsbezirk
außerdem noch zur Beschreibung der Mantelflächen von Stämmen dienen kan
für welche λ infolge eines stetigen Wachsthumes ihrer Querflächen von $z =$
bis $z = h$ kleiner als 1 bleibt. Denn da die Function $\psi(r)$ bei von 1 bis —
abnehmendem r von 0·7182818 bis 0 variirt, und die Identitäten: . . . . .
$\left|\frac{z e^{-\frac{rz}{h}}}{h e^{-r}}\right|_{z=0} = 0$, $\left|\frac{z e^{-\frac{rz}{h}}}{h e^{-r}}\right|_{z=h} = 1$ sowohl für positive als für negative Werthe von
gelten, so kann die Beziehung (52) auch für jede zwischen 0 und 1 liegen
Specialisirung von λ durch eine mit den übrigen Bedingungen des erst
Problems verträgliche Substitution für r befriedigt werden, womit die Richtigk
unserer letzten Behauptung vollständig dargethan erscheint. Sobald also d
Volumen des in Betracht gezogenen Stammes resp. Stammstückes kleiner
als jenes eines Cylinders von gleicher Endfläche und Achsenlänge, resultiren a
den Gleichungen (31) und (50) stets je zwei analytisch zulässige Definition
der Mantelfläche des ersteren, welche nur für $\lambda = \frac{1}{2}$ in eine einzige:

$$(54)\ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{pq}{p+q}}$$

zusammenfließen, in allen übrigen Fällen jedoch wesentlich von einan
verschiedenen Flächen angehören. An dieses auffallende Ergebniß knüpft
jetzt naturgemäß die weitere Frage, ob unser erstes Problem nicht vielleicht
beiden Hauptfällen mehr als eine einzige allgemeine Lösung zuläßt, oder e
sogar auf unendlich viele Arten vollständig erledigt werden kann.

Um hierüber in's Klare zu kommen, versuchen wir es, die demsel
eigenthümlichen Bedingungen überhaupt durch eine Gleichung von der Gest

$$(55)\ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{\Psi\left(\frac{z}{h}, r_1, r_2, r_3, \ldots\right)\right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

zu befriedigen, in welcher die Größen a, b, p, q; $r_1, r_2, r_3, \ldots$ vorläufig unbestim
gelassene Constanten vorstellen und Ψ irgend eine von $z = 0$ bis $z = h$ e

---

[50] Hieraus geht unter Anderem hervor, daß man für einen durch (50) charakterisirbaren Stamm
empirisch zu ermitteln braucht, in welchem aliquoten Theile seiner Höhe — von der Grundfläche G a
messen — sich seine stärkste Anschwellung zeigt, um mit Hilfe von (52) seine Grundflächenformzahl λ d
berechnen zu können. — So ergeben sich, wenn diese stärkste Ausbauchung beispielsweise in den
$\frac{1}{2}h$, $\frac{2}{3}h$, $\frac{3}{4}h$ über der jeweiligen Grundfläche stattfindet, aus (52) für λ der Reihe nach die Werthe:

$$\lambda = \frac{e^2-3}{4} = 1{\cdot}0972640,\ \lambda = \frac{e^3-4}{9} = 1{\cdot}7872819,\ \lambda = \frac{e^4-5}{16} = 3{\cdot}0998844.$$

[51] S. h. die zu der vorliegenden Abhandlung gegebene Einleitung, pag. 244.

che und stetige Function von z repräsentiren mag. Hiebei wird sofort ersichtlich, daß, wenn Ψ außerdem die in den beiden Relationen:

$$(56)\ldots\Psi(0, r_1, r_2, r_3, \ldots) = 0, \quad (57)\ldots\Psi(1, r_1, r_2, r_3, \ldots) = 1$$

usgedrückten Eigenschaften besitzt, die Constanten a, b, p, q ganz dieselben edeutungen wie in (31) und (50) erhalten, resp. die analytische Zulässigkeit on (55) dann lediglich von der Erfüllbarkeit der vierten Bedingung: $K = \lambda G h$ bhängt. Dieselbe gestattet, da unter Voraussetzung von (55) für die Hauptchsen $\overline{m_1 m_2}$, $\overline{n_1 n_2}$ des Querschnittes g allgemein die Ausdrücke:

$$\overline{m_1 m_2} = 2a\left\{\Psi\left(\frac{z}{h}, r_1, r_2, r_3, \ldots\right)\right\}^{\frac{q}{p+q}}, \overline{n_1 n_2} = 2b\left\{\Psi\left(\frac{z}{h}, r_1, r_2, r_3, \ldots\right)\right\}^{\frac{p}{p+q}}$$

estehen, auch die Darstellungsweise:

$$\mathrm{o}\,\varphi(p, q)\int_0^h \Psi\left(\frac{z}{h}, r_1, r_2, r_3, \ldots\right)dz = Gh\int_0^1 \Psi(u, r_1, r_2, r_3, \ldots)\,du = \lambda\,Gh,$$

nd beschränkt daher die möglichen Variationen von $\Psi, r_1, r_2, r_3, \ldots$ nur durch e Forderung:

$$(58)\ldots\int_0^1 \Psi(u, r_1, r_2, r_3, \ldots)du = \lambda,$$

elcher selbstverständlich auf *unendlich viele* Arten entsprochen werden kann. ieraus ergeben sich als Beantwortung der vorhin gestellten Frage nunmehr lgende Sätze:

1. Das erste Problem läßt *unendlich viele vollständige* Lösungen zu, eil unendlich viele von $z = 0$ bis $z = h$ endliche und stetige Functionen Ψ on z denkbar sind, welche gleichzeitig den in (56), (57) und (58) ausgesprochenen edingungen Genüge leisten, oder geometrisch interpretirt: *Es können die Mantelflächen eines Systems von Stämmen selbst bei gleichen Grundstärken* (D), *gleichen Grundflächen* (G), *gleichen Höhen* (h) *und gleichen Formzahlen* (λ) *der mit einander verglichenen Stammindividuen n der mannigfaltigsten Weise variiren.*

2. Jede aus (55) ableitbare Lösung von I wird eine *bestimmte*, so oft ie betreffende Specialisirung von (58) ausschließlich *eine einzige* arbiträre onstante: $r_1 = r$ enthält und zugleich eine *eindeutige* Berechnung der letzteren estattet, gewinnt hingegen einen *völlig unbestimmten* Charakter, falls entweder aus (58) *zwei* resp. *mehrere zulässige* Zahlenwerthe für r hervorehen [52], oder in die Function Ψ *zwei* resp. *mehrere arbiträre* Constanten ufgenommen werden.

---

[52] Sobald nämlich die Gleichung: $\int_0^1 \Psi(u,r)du = \lambda$ beispielsweise durch k auch mit den Bedingungen: $\Psi(0, r) = 0$, $\Psi(1, r) = 1$ vereinbare Werthe von $r: \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$ befriedigt wird, bildet *jede* Relation on der Gestalt:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{\frac{C_1\Psi\left(\frac{z}{h}, \rho_1\right) + C_2\Psi\left(\frac{z}{h}, \rho_2\right) + \ldots + C_k\Psi\left(\frac{z}{h}, \rho_k\right)}{C_1 + C_2 + \ldots + C_k}\right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

ne *vollständige Lösung des vorgelegten Problems*, für welche die *algebraische Summe* r *an sich völlig willkürlichen Größen*: $C_1, C_2, \ldots C_k$ *von der Nulle verschieden ausfällt*, Denn da in diesem Falle gleichzeitig die Beziehungen:

— Die Erledigung des uns vorgelegten Problems I läßt sich mithin er
dann schärfer formuliren, wenn wir uns entsprechend den in der Einleitun
entwickelten Gesichtspunkten die Aufgabe stellen, dasselbe nicht nur vollständi
sondern auch in jedem gegebenen Falle möglichst einfach zu lösen, wobei w
speciell durch die Annahmen:

$$\Psi\left(\frac{z}{h}, r_1, r_2, r_3, \ldots\right) = \left(\frac{z}{h}\right)^r, \text{ beziehungsweise: } \Psi\left(\frac{z}{h}, r_1, r_2, r_3, \ldots\right) = \frac{z e^{-\frac{rz}{h}}}{h e^{-r}}$$

unmittelbar auf die Relationen (31) und (50) geführt werden. Außerdem ve
dienen hier noch die Substitutionen:

$$\Psi\left(\frac{z}{h}, r_1, r_2, r_3, \ldots\right) = 1 - \left(\frac{h-z}{h}\right)^{\frac{1}{r}}, \text{ resp. } \Psi\left(\frac{z}{h}, r_1, r_2, r_3, \ldots\right) = \frac{\sin \frac{\pi r z}{h}}{\sin \pi r}$$

Erwähnung, insoferne sie im ersten resp. zweiten Hauptfalle für die Mant
flächen der untersuchten Stämme nahezu ebenso einfache Gleichungen w
(31) und (50) liefern. — Setzen wir nämlich zunächst allgemein:

$$(59) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{1 - \left(\frac{h-z}{h}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}^{\frac{pq}{p+q}},$$

so erhalten wir aus (58) zur Auffindung von r offenbar die Identität:

$$\int_0^1 \left\{1 - (1-u)^{\frac{1}{r}}\right\} du = \left| u + \frac{r(1-u)^{\frac{1+r}{r}}}{1+r} \right|_0^1 = \frac{1}{r+1} = \lambda,$$

wonach die in (59) und (31) auftretenden Constanten a, b, p, q, r völlig m
einander coincidiren und eben nur der analytische Bau von (59) etwas co
plicirter als jener von (31) erscheint.

— Was ferner die der zuletzt angeführten Specialisirung von Ψ correspo
dirende Flächengleichung:

$$(60) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{\sin \frac{\pi r z}{h}}{\sin \pi r}\right)^{\frac{pq}{p+q}}$$

anbelangt, so verwandelt sich (58) in diesem Falle in:

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi r u}{\sin \pi r} du = \frac{1 - \cos \pi r}{\pi r \sin \pi r} = \frac{2\left(\sin \frac{1}{2}\pi r\right)^2}{2\pi r \sin \frac{1}{2}\pi r \cos \frac{1}{2}\pi r} = \frac{1}{\pi r} \operatorname{tg} \frac{\pi r}{2} = \lambda,$$

d. h. es gilt zwischen r und λ stets die Beziehung: $\chi(r) = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\pi r}{2} = \lambda \pi$, wel
der Relation (52) blos deshalb an Einfachheit nachsteht, weil sie für keinen einzig

---

$$\Psi(0, \rho_1) = 0, \Psi(1, \rho_1) = 1; \Psi(0, \rho_2) = 0, \Psi(1, \rho_2) = 1; \ldots \Psi(0, \rho_k) = 0, \Psi(1, \rho_k) = 1$$

$$\int_0^1 \Psi(u, \rho_1)\, du = \int_0^1 \Psi(u, \rho_2)\, du = \ldots = \int_0^1 \Psi(u, \rho_k)\, du = \lambda$$

gelten, so erhalten wir für die Constanten a, b, p, q offenbar wieder dieselben allgemeinen Werthe wie
(31), resp. für den fraglichen Cubikinhalt K des untersuchten Stammes unter Voraussetzung einer derarti
Mantelfläche den Ausdruck:

$$K = \frac{G}{C_1 + C_2 + \ldots + C_k}\left\{C_1 \int_0^h \Psi\left(\frac{z}{h}, \rho_1\right) dz + C_2 \int_0^h \Psi\left(\frac{z}{h}, \rho_2\right) dz + \ldots + C_k \int_0^h \Psi\left(\frac{z}{h}, \rho_k\right) dz\right\} =$$

$$= \frac{Gh}{C_1 + C_2 + \ldots + C_k}\left\{C_1 \int_0^1 \Psi(u, \rho_1)\, du + C_2 \int_0^1 \Psi(u, \rho_2)\, du + \ldots + C_k \int_0^1 \Psi(u, \rho_k)\, du\right\} =$$

$= \lambda\, Gh$, wonach in der That alle charakteristischen Bedingungen unserer Aufgabe erfüllt sind.

ositiven Specialwerth von λ eine eindeutige Bestimmung von r ermöglicht. Denn da die Function $X(r)$ bei stetig bis in's Unbegrenzte zunehmendem r emäß den Formeln:

$$X'(r) = \frac{\pi}{2r\left(\cos\frac{1}{2}\pi r\right)^2} - \frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r - \sin\pi r}{2\left(r\cos\frac{1}{2}\pi r\right)^2};\ X(0) = \lim_{r=0}\left(\frac{1}{r}\operatorname{tg}\frac{\pi r}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$X(1) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty;\ X(2) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\pi = 0,\ X(3) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} = \infty;\ \ldots$$

$$\ldots X(2k) = \frac{1}{2k}\operatorname{tg}k\pi = 0,\ X(2k+1) = \frac{1}{2k+1}\operatorname{tg}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi = \infty;\ \ldots$$

nendlich oft alle zwischen 0 und ∞ denkbaren positiven Zahlen durchläuft, uß auch die Gleichung $X(r) = \lambda\pi$ für jede innerhalb dieser Grenzen gelegene Specialisirung von λ unendlich viele reelle positive Wurzeln: $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ ufweisen, welchen natürlich ebensoviele in analytischer Hinsicht einander öllig gleichartige Lösungen[53]:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{\sin\frac{\pi\rho_1 z}{h}}{\sin\pi\rho_1}\right)^{\frac{pq}{p+q}},\ \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{\sin\frac{\pi\rho_2 z}{h}}{\sin\pi\rho_2}\right)^{\frac{pq}{p+q}},\ \ldots\ \text{2c.}$$

ntsprechen.

Nachdem wir hiemit die wichtigsten Beziehungen zwischen drei veränderichen Coordinaten x, y, z kennen gelernt haben, unter welche eine vollständige Erledigung des ersten Problems möglicherweise subsumirt werden kann, sei chließlich ein kurzer Hinweis auf jenen eigenthümlichen Zusammenhang gestattet, velcher zwischen der Formzahl λ irgend eines in Betracht gezogenen Stammes und den in der jeweiligen Definitionsgleichung seiner Mantelfläche vorkommenen Constanten besteht. Zu diesem Zwecke gehen wir auf die allgemeine Relation 58) zurück, in welcher nach Ausführung der linker Hand angezeigten Integration eben λ offenbar nur die Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ auftreten, resp. λ wohl mit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ aber nie mit a, b, h, p, q variirt. Es können demnach selbst ei Zugrundelegung einer einzigen Specialform von (55), wie twa der Gleichung (31), einem und demselben Zahlenwerthe von λ im Allgemeinen unendlich viele in ihren Gestalten durchgängig on einander differirende Stammformen von den verschiedensten

[53] Dieselben erscheinen insgesammt als einfache Specialisirungen der mit unendlich vielen arbiträren Constanten $C_1, C_2, C_3 \ldots$ versehenen Gleichung:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{C_1\sin\frac{\pi\rho_1 z}{h} + C_2\sin\frac{\pi\rho_2 z}{h} + C_3\sin\frac{\pi\rho_3 z}{h} + \ldots \text{ in inf.}}{C_1\sin\pi\rho_1 + C_2\sin\pi\rho_2 + C_3\sin\pi\rho_3 + \ldots \text{ in inf.}}\right)^{\frac{pq}{p+q}}$$

elche, wie aus den Relationen:

$$C_1\sin\frac{\pi\rho_1 z}{h} + C_2\sin\frac{\pi\rho_2 z}{h} + \ldots\Big|_{z=0} = 0,\ \Big|C_1\sin\frac{\pi\rho_1 z}{h} + C_2\sin\frac{\pi\rho_2 z}{h} + \ldots\Big|_{z=h} = C_1\sin\pi\rho_1 + C_2\sin\pi\rho_2 + \ldots$$

$$\int_0^1 \sin\pi\rho_1 u\,du = \frac{1-\cos\pi\rho_1}{\pi\rho_1} = \lambda\sin\pi\rho_1,\ \int_0^1 \sin\pi\rho_2 u\,du = \frac{1-\cos\pi\rho_2}{\pi\rho_2} = \lambda\sin\pi\rho_2,\ \ldots$$

$$\int_0^1\left(\frac{C_1\sin\pi\rho_1 u + C_2\sin\pi\rho_2 u + \ldots \text{ in inf.}}{C_1\sin\pi\rho_1 + C_2\sin\pi\rho_2 + \ldots \text{ in inf.}}\right)du = \frac{C_1\lambda\sin\pi\rho_1 + C_2\lambda\sin\pi\rho_2 + \ldots \text{ in inf.}}{C_1\sin\pi\rho_1 + C_2\sin\pi\rho_2 + \ldots \text{ in inf.}} = \lambda$$

u entnehmen ist, augenscheinlich die allgemeinste auf Grundlage von (60) ableitbare Lösung des ersten Problems repräsentirt.

Grundstärken und Höhen entsprechen, wie dies unter Anderem aus fol
genden drei Beispielen entnommen werden mag:

a) Ist erstens $\lambda = \frac{1}{2}$, resp. $r = \frac{1-\lambda}{\lambda} = 1$, so ergeben sich für diese An
nahme aus (31) der Reihe nach die Specialisirungen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{h}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{4}{3}}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = \left(\frac{z}{h}\right)^2, \ldots$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{3}}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{4}}, \ldots$$

d. h. die Jedermann geläufige Cubirungsformel: $K = \frac{1}{2}\,Gh$ gilt nicht allei
für das elliptische und Rotations-Paraboloid, sondern überhaupt für jede
Körper, dessen Mantelfläche sich durch eine Gleichung von der Gestalt (54) ana
lytisch charakterisiren läßt. Es scheint daher auch geradezu unmöglich, au
der praktischen Brauchbarkeit des Ausdruckes: $\frac{1}{2}\,Gh$ von vornherei
speciell auf die Existenz paraboloidischer Stammformen zu schließe

b) Setzen wir zweitens $\lambda = \frac{1}{3}$, also $r = 2$, so liefert (31) direct da
Gleichungssystem:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{h}\right)^2, \ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{8}{3}}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = \left(\frac{z}{h}\right)^4, \ldots$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{z}{h}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{2}{3}}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots$$

wornach der bekannte Satz: „Der Cubikinhalt jedes geraden elliptischen res
Kreiskegels ist gleich dem Producte seiner Grundfläche in den dritten The
seiner Höhe" außerdem noch auf unendlich viele andere räumliche Gebil
seine Anwendung findet.

c) Wird endlich drittens $\lambda = \frac{1}{4}$ gewählt, so erhält r regelmäßig de
Werth 3, für welchen aus (31) successive die Relationen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{h}\right)^3, \ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = \left(\frac{z}{h}\right)^4, \ \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = \left(\frac{z}{h}\right)^6, \ldots$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{3}{2}}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{z}{h}, \ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{3}{4}}, \ldots$$

hervorgehen, so daß sich die Giltigkeit der bisher nur für das Neiloid aufgestellte
Cubirungsformel: $K = \frac{1}{4}\,Gh$ ebenfalls auf eine unbegrenzte Anzahl verschiede
gestalteter Körper erstreckt.

Alle bisher mitgetheilten eindeutigen Lösungen des ersten Problem
bieten, wie wir im Laufe dieser Betrachtungen gesehen haben, wohl die Mög
lichkeit, durch passende Wahl von p und q nebenbei auch der jeweiligen ge
metrischen Beschaffenheit der aufeinander folgenden Querflächen des in B
tracht gezogenen Stammes Rechnung zu tragen, gestatten jedoch nicht, glei
zeitig etwaige individuelle Eigenthümlichkeiten jener Grenzlinien analyti
wiederzugeben, welche seinen verschiedenen die Achse enthaltenden Längsschnitte
zukommen. — Um nun darzuthun, in welcher Weise selbst derartige Eige
schaften der Mantelfläche des betreffenden Stammes in der für sie aufzustellen

en Gleichung vollkommen präcis ausgedrückt werden können, wollen wir n Anschlusse an I hier noch folgende Frage beantworten, welche sich bei einem äheren Studium speciell den Stammformen unserer einheimischen Waldbäume ewissermaßen von selbst aufdrängt:

Wie ist die Mantelfläche eines von seiner Grundfläche F bis ur Spitze S sich stetig verjüngenden Stammes (s. die schematische ig. 18) von der Grundstärke $\overline{a_1 a_2} = D$, der Länge $SA = l$ und dem Solumen: $V = \lambda Fl$ analytisch zu definiren, wenn seine aufeinanderfolgenden Querschnitte im Allgemeinen elliptisch gestaltet sind nd die Grenzcurve jedes die Stammachse enthaltenden Längsschnittes egen die letztere von $z = 0$ bis $z = \varepsilon l = SB$, $(0 \leqq \varepsilon \leqq 1)$ regelmäßig oncav, von $z = \varepsilon l$ bis $z = l$ hingegen convex verläuft?

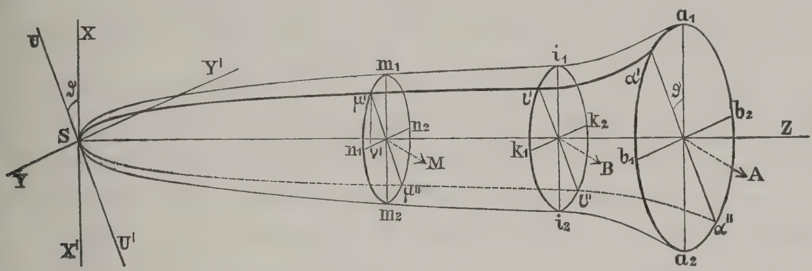


Fig. 18.

— Zur Erledigung dieses Problems verbinden wir die drei Coordinaten: $\mu'\nu' = x$, $\nu' M = y$, $MS = z$ eines beliebigen Punktes μ' der Mantelfläche des gegebenen Stammes durch eine Relation von der Gestalt:

$$(61) \quad \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left\{\frac{(c\,l + z)\,z^s}{(1 + c)\,l^{1+s}}\right\}^2,$$

n welcher a, b, c vorläufig unbestimmte positive Constanten bedeuten, s irgend einer zwischen 0 und 1 liegenden Zahl entspricht, und versuchen es zunächst, durch eine eingehende Discussion der Gleichung (61) ihre Zulässigkeit und die allgemeinen Werthe der Größen a,b,c,s mathematisch festzustellen. Hiebei stützen wir uns am besten auf die mit (61) coincidirende Beziehung:

$$x^2 : \left\{\frac{a\,(c\,l + z) z^s}{(1 + c)\; l^{1+s}}\right\}^2 + y^2 : \left\{\frac{b\;(c\,l + z) z^s}{(1 + c)\; l^{1+s}}\right\}^2 = 1,$$

indem dieselbe für die Hauptachsen und den Inhalt des dem Achsenpunkte M zugehörigen Querschnittes unmittelbar die Ausdrücke:

$$\overline{m_1 m_2} = \frac{2a\,(cl + z)\,z^s}{(1 + c)\; l^{1+s}},\; \overline{n_1 n_2} = \frac{2b\;(cl + z)\;z^s}{(1 + c)\; l^{1+s}},\; g = a\,b\,\pi \left\{\frac{(cl + z)\;z^s}{(1 + c)\; l^{1+s}}\right\}^2$$

liefert und daher zu folgenden Schlüssen berechtigt:

1. Die aufeinanderfolgenden Querflächen jeder durch (61) charakterisirbaren Stammform sind insgesammt elliptisch begrenzt und wachsen bei von 0 bis l variirendem z continuirlich von 0 bis $ab\pi$.

2. Was speciell die im Abstande l von S gelegene Querfläche betrifft, so erhält dieselbe durch die Substitutionen: $a = \frac{1}{2}\, D$, $b = \frac{2\,F}{D\,\pi}$ immer die gewünschte Maximalstärke D und den vorgeschriebenen Inhalt F.

3. Unter Voraussetzung von (61) muß für das von $z=0$ bis $z=l$ gerechnete Stammvolumen V stets die Formel:

$$V=\int_0^l g\,dz=\frac{ab\pi}{(1+c)^2 l^{2+2s}}\int_0^l (cl+z)^2 z^{2s}\,dz=\frac{Fl}{(1+c)^2}\int_0^1 (c+u)^2 u^{2s}\,du=$$

$$=\frac{Fl}{(1+c)^2}\int_0^1 (u^{2+2s}+2\,cu^{1+2s}+c^2 u^{2s})\,du=\frac{Fl}{(1+c)^2}\left(\frac{1}{3+2s}+\frac{c}{1+s}+\frac{c^2}{1+2s}\right)$$

gelten, mithin, falls V gleichzeitig den Werth: λFl erhalten soll, zwischen c und s die Relation:

$$(62)\;\ldots\;\frac{1}{3+2s}+\frac{c}{1+s}+\frac{c^2}{1+2s}=\lambda(1+c)^2$$

bestehen. — Um nunmehr auch die letzte in der uns gestellten Aufgabe enthaltene Bedingung auf (61) übertragen zu können, genügt es, jene krumme Linie: $\alpha'\iota'\mu'S\mu''\iota''\alpha''$ analytisch zu untersuchen, von welcher der durch die Punkte S, A und μ' bestimmte Längsschnitt des Stammes begrenzt wird. Zu diesem Zwecke beziehen wir die fragliche Curve auf ein ihrer Ebene angehöriges rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Abscissenachse mit SZ zusammenfällt, dessen Ordinatenachse durch die Schnittlinie UU' der Ebenen XYX'Y' und UU'$\alpha'\alpha''$ gebildet wird, weil wir hiedurch den Vortheil gewinnen, zur Charakteristik von $\alpha'\iota'\mu'S\mu''\iota''\alpha''$ nur eine einzige Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen, nämlich den Coordinaten $SM=z$ und $\mu'M=u$ des willkürlich gewählten Curvenpunktes μ' zu benöthigen. Dieselbe gestattet, wenn wir den Neigungswinkel XSU der beiden Geraden XX', UU' kurz mit ϑ bezeichnen und zugleich die dem rechtwinkeligen Dreiecke $\mu'\nu'M$ entspringenden Relationen: $x=u\cos\vartheta$, $y=u\sin\vartheta$ berücksichtigen, allgemein die Darstellungsweise:

$$\left(\frac{u\cos\vartheta}{a}\right)^2+\left(\frac{u\sin\vartheta}{b}\right)^2=\left\{\frac{(cl+z)z^s}{(1+c)l^{1+s}}\right\}^2$$

und führt demnach bezüglich u und $\frac{d^2u}{dz^2}=u''$ auf die für beliebige Werthe von ϑ giltigen Identitäten:

$$u=\frac{ab\,(cl+z)\,z^s}{(1+c)l^{1+s}\sqrt{a^2\sin^2\vartheta+b^2\cos^2\vartheta}}=C_\vartheta\,(cl+z)\,z^s,$$

$$u''=C_\vartheta\{cls\,(s-1)\,z^{s-2}+(s+1)\,sz^{s-1}\}=-\frac{s\,C_\vartheta\{cl(1-s)-(1+s)\,z\}}{z^{2-s}},$$

aus welchen unmittelbar hervorgeht, daß die Grenzcurven sämmtlicher die Achse SZ enthaltenden Längsschnitte von $z=0$ bis $z=\frac{c\,(1-s)\,l}{1+s}=\zeta$ concav, von $z=\zeta$ bis $z=\infty$ hingegen convex gegen SZ verlaufen. Soll also der Uebergang von der Concavität zur Convexität speciell für $z=\varepsilon l$ erfolgen, und insoferne jeder Peripheriepunkt der Ellipse $i_1\,\iota'\,k_1\,i_2\,\iota''\,k_2\,i_1$ gleichzeitig einen Inflexionspunkt vorstellen, so muß zwischen c und s außer der Beziehung (62) auch die folgende

$$(63)\;\ldots\;\frac{c(1-s)}{1+s}=\varepsilon,\ \text{resp.:}\ c=\frac{\varepsilon(1+s)}{1-s}$$

stattfinden, wonach sich auf Grundlage von (61) stets eine vollständige Lösung unseres Problems gewinnen läßt, sobald die aus (62) und (63) zur Ermitlung von s resultirende Gleichung:

$$\frac{1}{3+2s}+\frac{\varepsilon}{1-s}+\frac{\varepsilon^2\,(1+s)^2}{(1+2s)\,(1-s)^2}=\frac{\lambda\{(1+\varepsilon)-(1-\varepsilon)s\}^2}{(1-s)^2},\ \text{d. h.:}$$

$$(64) \ldots 4\lambda(1-\varepsilon)^2 s^4 - 2(1-\varepsilon)\{(8\lambda-1)\varepsilon+1\}s^3 +$$
$$\{(23\lambda-7)\varepsilon^2+2(\lambda+2)\varepsilon-3(3\lambda-1)\}s^2+\{2(7\lambda-4)\varepsilon^2+(16\lambda-5)\varepsilon+2\lambda\}s+$$
$$+\{3(\lambda-1)\varepsilon^2+3(2\lambda-1)\varepsilon+(3\lambda-1)\}=0$$

ırch eine mit den übrigen Bedingungen desselben vereinbare ubstitution für s erfüllt werden kann. Um aber noch eine schärfere ormulirung des eben ausgesprochenen beschränkenden Zusatzes zu ermöglichen, ird es schließlich nothwendig, je nachdem ε mit 0 resp. 1 coincidirt, oder nerhalb dieser Grenzen gelegen ist, folgende drei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: $\varepsilon = 0$.

Für $\varepsilon=0$ verwandelt sich (64) in: $4\lambda s^4-2s^3+3(1-3\lambda)s^2+2\lambda s-(1-3\lambda)=0$, ›er:

$$(65) \ldots (2s+1)(s-1)^2\{2\lambda s-(1-3\lambda)\}=0$$

ıd wird hienach im Ganzen durch drei Substitutionen: $s_1 = -\frac{1}{2}, s_2=1$, $= \frac{1-3\lambda}{2\lambda}$ befriedigt, von welchen, wie man sich leicht überzeugen kann, nur e dritte auf die zu erledigende Frage Bezug hat. Berücksichtigen wir außer- m, daß (61) für $s = s_3$ und $c = 0$ vollständig mit der den Annahmen: $p=q=2$, $= l$ entsprechenden Specialform von (31) übereinstimmt, so ergibt sich direct r Satz: Sobald die Grenzcurven der durch SZ geführten Längs- hnitte nirgends Inflexionspunkte aufweisen, erscheint die Giltig- it von (61) lediglich durch die Forderung beschränkt, daß die rundflächenformzahl λ des gegebenen Stammes die Einheit nicht erschreitet.

Zweiter Fall: $\varepsilon = 1$.

Für $\varepsilon = 1$ reducirt sich (64) auf die Beziehung: $16\lambda s^2 + (32\lambda-13)s +$ $-12\lambda - 7 = 0$, von deren Wurzeln:

$$s_1 = \frac{13-32\lambda+\sqrt{(13-16\lambda)^2+32\lambda}}{32\lambda}, \quad s_2 = \frac{13-32\lambda-\sqrt{(13-16\lambda)^2+32\lambda}}{32\lambda}$$

ısschließlich die erste praktisch brauchbar ist, indem s_2 unter der hier selbst- rständlichen Voraussetzung: $\lambda > 0$ immer negativ ausfällt und insoferne mit r ersten von (61) zu erfüllenden Bedingung: $\lim_{z=0}(z^s)=0$ im Widerspruche eht. Aber auch s_1 darf, soll c positiv bleiben, nur zwischen 0 und 1 variiren, ornach die Relation (61) in diesem Falle zwar für jeden zwischen und $\frac{7}{12}$ gelegenen Werth von λ unser Problem vollständig löst[54], ngegen für $\lambda < \frac{1}{3}$ beziehungsweise für $\lambda > \frac{7}{12}$ ihre Giltigkeit ver- ert. — So erhalten wir beispielsweise unter den Annahmen:

$$\lambda = 0{\cdot}5555556 = \frac{5}{9}, \lambda = 0{\cdot}421875 = \frac{27}{64}, \lambda = 0{\cdot}3435662 = \frac{1869}{5440}$$

---

[54] Ist speciell $\lambda = \frac{1}{3}$, also $s_1 = 1$, $c = \infty$, so verwandelt sich (61) jederzeit in die Gleichung der ıntelfläche eines geraden elliptischen Kegels von der Achsenlänge l und der Grundfläche F indem der Quotient: $\frac{+z}{+c} = \left(l + \frac{z}{c}\right) : \left(1 + \frac{1}{c}\right)$ für $c = \infty$ augenscheinlich den constanten Werth l erhält.

für s_1 und $c=\frac{1+s_1}{1-s_1}$ der Reihe nach die Zahlen: $s_1=\frac{1}{16}, c=\frac{17}{15}; s_1=\frac{1}{2}, c=3$ $s_1=\frac{13}{14}, c=27$, mithin für die Mantelflächen der durch die obigen Form zahlen charakterisirten Stämme in letzter Linie die Gleichungen:

$$(66)\ldots\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{17l+15z}{32l}\right)^2\left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{1}{8}},\ (67)\ldots\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{3l+z}{4l}\right)^2\left(\frac{z}{l}\right.$$

$$(68)\ldots\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{27l+z}{28l}\right)^2\left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{13}{7}},$$

deren Richtigkeit durch Bildung der den Specialisirungen: $s=\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \frac{13}{14}$ corre spondirenden Ausdrücke für V und $\frac{d^2u}{dz^2}$ ohne Schwierigkeit nachgewiesen wer den kann.

Dritter Fall: $0<\varepsilon<1$.

Liegt endlich ε zwischen 0 und 1, so geht (64) unter den Annahmen: $s=$ und $s=0$ in:

$$20\,(3\lambda-1)\,\varepsilon^2=0, \text{ beziehungsweise: } 3\lambda\,(1+\varepsilon)^2-(1+3\varepsilon+3\varepsilon^2)=0$$

über, so daß denselben augenscheinlich die Formzahlen:

$$\lambda=\frac{1}{3} \text{ und: } \lambda=\frac{1+3\varepsilon+3\varepsilon^2}{3\,(1+\varepsilon)^2}=\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\left\{1-\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right\}=\frac{1}{3}+\Delta$$

entsprechen, resp. das Anwendungsgebiet von (61) für $0<\varepsilon<1$ dur die Bedingung: $\frac{1}{3}<\lambda<\frac{1}{3}+\Delta$ bestimmt wird[55]. Hienach gilt für die an lytische Beschreibung der Mantelflächen solcher Stämme, deren Grundfläche formzahlen (λ) sich innerhalb der eben festgestellten Grenzen bewegen, allgeme die Regel: Man suche für die gegebenen Specialisirungen von ε und vor Allem die numerischen Werthe der Ausdrücke:

$$M=\frac{(8\lambda-1)\,\varepsilon+1}{2\lambda\,(1-\varepsilon)},\qquad N=\frac{(23\lambda-7)\,\varepsilon^2+2\,(\lambda+2)\,\varepsilon-3\,(3\lambda-1)}{4\lambda\,(1-\varepsilon)^2},$$

$$P=\frac{2\,(7\lambda-4)\,\varepsilon^2+(16\lambda-5)\,\varepsilon+2\lambda}{4\lambda\,(1-\varepsilon)^2},\qquad Q=\frac{3\,(1-\lambda)\,\varepsilon^2+3\,(1-2\lambda)\,\varepsilon-(3\lambda-}{4\lambda\,(1-\varepsilon)^2}$$

und ermittle auf Grundlage der letzteren speciell jene Wurze $s=s_1$ der biquadratischen Gleichung:

$$(69)\quad \Omega(s)=s^4-Ms^3+Ns^2+Ps-Q=0,$$

für welche die Differenz: $1-s$ größer als Null bleibt. Berechn man hierauf mit Hilfe der Relation (63) noch die zweite fraglic Unbekannte c, so liefert die Substitution der auf diese Art für und c gewonnenen Zahlen in (61) jederzeit die gewünschte mathem tische Charakteristik der in Betracht gezogenen Stammform.

Um übrigens das hier besprochene Verfahren auch praktisch zu erläuter sei es uns gestattet, folgende drei Beispiele in schematischer Darstellungswe mitzutheilen:

---

[55] Ist also beispielsweise $\varepsilon=\frac{19}{20}$, d. h. der sämmtliche Inflexionspunkte enthaltende Querschnitt Stammes in der Höhe $\frac{h}{20}$ über dessen jeweiliger Grundfläche gelegen, so wird die Gleichung (61) für Formzahlen verwerthbar, welche zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}+\frac{19}{60}\left\{1-\left(\frac{19}{39}\right)^2\right\}=\frac{2623}{4563}=0{\cdot}5748411$ variiren.

a) $\varepsilon = \frac{19}{20}, \lambda = 0{\cdot}5096198 = \frac{110667}{217156}; \ \Omega(s) = s^4 - 76{\cdot}9811236 s^3 +$ $+ 1460{\cdot}4284227 s^2 + 634{\cdot}6902193 s - 145{\cdot}9935369$. — Hieraus folgt:

$$\Omega\left(\frac{1}{6}\right) = 0{\cdot}0007716 - 0{\cdot}3563941 + 40{\cdot}5674562 + 105{\cdot}7817032 -$$

$- 145{\cdot}9935369 = 0; \ s_1 = \frac{1}{6}, \ c = \frac{133}{100}$, resp. für die untersuchte Fläche die Relation:

$$(70) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{133l + 100\,z}{233l}\right)^2 \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

b) $\varepsilon = \frac{19}{20}, \lambda = 0{\cdot}4190420 = \frac{4969}{11858}; \Omega(s) = s^4 - 77{\cdot}1931978 s^3 + 1480{\cdot}8935903 s^2 +$ $+ 126{\cdot}9844033 s - 424{\cdot}1289495$. — Dies vorausgesetzt wird:

$$\Omega\left(\frac{1}{2}\right) = 0{\cdot}0625 - 9{\cdot}6491497 + 370{\cdot}2233976 + 63{\cdot}4922016 - 424{\cdot}1289495 = 0;$$

$s_1 = \frac{1}{2}, \ c = \frac{57}{20}$, also (61) identisch mit der Beziehung:

$$(71) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{57l + 20z}{77l}\right)^2 \left(\frac{z}{l}\right).$$

c) $\varepsilon = \frac{19}{20}, \lambda = 0{\cdot}3598498 = \frac{2347081}{6522390}; \Omega(s) = s^4 - 77{\cdot}3894685 s^3 + 1499{\cdot}8337055 s^2 -$ $- 342{\cdot}8874702 s - 681{\cdot}5378727$. — Hienach ist:

$$\Omega\left(\frac{9}{11}\right) = 0{\cdot}4481251 - 42{\cdot}3868689 + 1004{\cdot}0209103 - 280{\cdot}5442938 -$$

$- 681{\cdot}5378727 = 0; s_1 = \frac{9}{11}, \ c = \frac{19}{2}$, d. h. es gilt in diesem Falle die Gleichung:

$$(72) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{19l + 2z}{21l}\right)^2 \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{18}{11}}.$$

— Außerdem wird schließlich aus diesen Specialisirungen ersichtlich, daß die Gleichung (61), obwohl sie vom rein analytischen Standpunkte eine ungleich beschränktere Giltigkeit als beispielsweise die Relation (50) besitzt, doch gerade auf jene Werthe von ε und λ anwendbar erscheint, welche bei unseren einheimischen Waldbäumen mit $\int$förmig begrenzten Längsschnitten wohl am häufigsten vorkommen dürften.

II.

Es sei V das als bekannt vorausgesetzte Gesammtvolumen irgend eines Stammes von der Axenlänge $SH = l$ (s. die schematische Fig. 19), bei welchem zwar der Inhalt F seiner Grundfläche empirisch nicht hinlänglich genau bestimmbar erscheint, wohl aber die Inhalte F und F_1 zweier in den Abständen $AH = \alpha l$ und $A_1H = \alpha_1 l$ von F gelegenen Querflächen ohne Schwierigkeit ermittelt werden können. — In welcher Weise läßt sich die Mantelfläche eines derartigen Stammes analytisch definiren, wenn außerdem noch die Maximalstärke $\overline{D}$ der Fläche $\overline{F}$ und die auf die letztere bezügliche Stammformzahl λ_1 gegeben sind?

Zur Erledigung dieser Frage ist es vor Allem nothwendig, die Variationsgrenzen der Coëfficienten α und α_1 näher kennen zu lernen, wobei wir hinsichtlich der Größe α im Allgemeinen zwei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem λ_1 eine echte oder eine unechte Schaftformzahl vorstellt. Im ersten Falle besitzt α,

da nach dem Vorgange Smalian's und Preßler's jede echte Formzahl (No
malformzahl) auf die im Abstande $\frac{l}{20}$ von F gelegene Stammquerfläche bezog
wird, für jede beliebige Achsenlänge l den constanten Werth 0·05. Im zweit

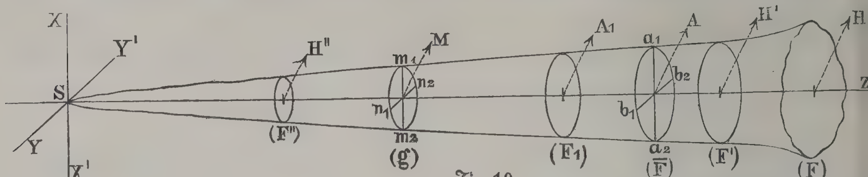


Fig. 19.

Falle, wo man der Berechnung von λ_1 bekanntlich die in der unveränderlich
Distanz: 1·3m von F befindliche Stammquerfläche zu Grunde legt, variirt
bei wachsendem l nach folgendem Schema:

l	α	l	α	l	α	l	α	l	α
3	0·4333333	15	0·0866667	27	0·0481481	39	0·0333333	51	0·0254902
4	0·3250000	16	0·0812500	28	0·0464286	40	0·0325000	52	0·0250000
5	0·2600000	17	0·0764706	29	0·0448276	41	0·0317073	53	0·0245283
6	0·2166667	18	0·0722222	30	0·0433333	42	0·0309524	54	0·0240741
7	0·1857143	19	0·0684211	31	0·0419355	43	0·0302326	55	0·0236364
8	0·1625000	20	0·0650000	32	0·0406250	44	0·0295455	56	0·0232143
9	0·1444444	21	0·0619048	33	0·0393939	45	0·0288889	57	0·0228070
10	0·1300000	22	0·0590909	34	0·0382353	46	0·0282609	58	0·0224138
11	0·1181818	23	0·0565217	35	0·0371429	47	0·0276596	59	0·0220339
12	0·1083333	24	0·0541667	36	0·0361111	48	0·0270833	60	0·0216667
13	0·1000000	25	0·0520000	37	0·0351351	49	0·0265306	65	0·0200000
14	0·0928571	26	0·0500000	38	0·0342105	50	0·0260000	70	0·0185714

Um demnach außer den echten auch die unechten Formzahlen (Brusthöh
formzahlen) in den Kreis unserer Untersuchungen ziehen zu können, muß
im Allgemeinen als eine zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ variirende Zahl an
sehen werden, womit übrigens die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, in
forstlichen Praxis die Variationen dieser Größe für gewisse Holzarten noch m
einzuschränken. — So würde sich α beispielsweise bei Tannen, falls wir e
sprechend den von Herrn Finanzrath K. Schindler[56] veröffentlichten H
massentafeln nur Achsenlängen von 6·15m bis 55·42m in Betracht zu zie
hätten[57], ausschließlich zwischen $\frac{1·3}{6·15} = 0·2113821$ und $\frac{1·3}{55·42} = 0·02345$
bewegen.

[56] S. h. die 1876 erschienene zweite Auflage seines Werkes: Portefeuille für Forstwirthe, Taxato
Ingenieure, Oekonomen ꝛc. enthaltend die wichtigsten Tafeln aus dem Gebiete der Forstkunde nach dem neu
Standpunkte der Wissenschaft und Erfahrung, pag. 251—288.

[57] Da nämlich die in diesen Tabellen angegebenen Stammhöhen h nicht von den Stammgrundfläc
sondern von den jeweiligen Abhiebsflächen angemessen und die letzteren zu 0·15m—0·42m über dem B
angenommen werden (vergl. das eben citirte Werk, pag. 251), so ist die untere Grenze der irgend e
Specialisirung von h zugehörigen Achsenlänge l offenbar h + 0·15, hingegen ihre obere h + 0·42 Meter.

Einen ungleich größeren Spielraum als die für α zulässigen Zahlenwerthe igen jene von α_1, insoferne man bei ihrer Wahl nur durch die Forderung schränkt wird, daß die im Abstande $\alpha_1 l$ von F gelegene Stammquerfläche F_1 ne bequeme Inhaltsbestimmung gestatten, also zwischen F' und F'' (der sten und letzten regelmäßigen Querfläche) sich befinden muß. Berücksichtigen ir nun, daß α_1 unter Beibehaltung der in unserer Einleitung adoptirten Be- ichnungsweise für $F_1 = F'$ mit $\frac{l-l'}{l} = 1 - \frac{1}{\nu}$, für $F_1 = F''$ mit $\frac{l-l''}{l} = 1 - \frac{1}{\nu'}$ zusammenfällt, so erhalten wir bezüglich α_1 allgemein die Bedingung:

$$\frac{\nu - 1}{\nu} \leqq \alpha_1 \leqq \frac{\nu' - 1}{\nu'},$$

elche beispielsweise unter der speciellen Voraussetzung durchwegs regelmäßig egrenzter Querflächen in: $0 < \alpha_1 \leqq 1$ übergeht.

Nach diesen einfachen Feststellungen versuchen wir es nunmehr, das uns rgelegte Problem allgemein durch eine Relation von der Gestalt:

$$(73) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{\frac{c l^s z^r + l^r z^s}{(c\,\delta^r + \delta^s)\, l^{r+s}}\right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

lösen, in welcher die Exponenten p, q den jeweiligen mittleren Grenzcurven r aufeinanderfolgenden Stammquerflächen analog wie in (31) angepaßt werden nnen, δ der jedesmal als bekannt anzusehenden Differenz: $1 - \alpha$ entspricht, dlich a, b, r, s und c vorläufig als unbestimmte Constanten zu betrachten nd. Es ist mithin im Folgenden der Nachweis zu liefern, daß sich unter An- ahme von (73) durch passende Wahl von a, b, r, s und c wirklich alle für is. Problem II wesentlichen Bedingungen erfüllen lassen, zu welchem wecke wir dieselben der Uebersichtlichkeit wegen in nachstehender Anordnung scutiren wollen:

Erste Bedingung:

Jede durch (73) charakterisirbare Fläche darf mit der Coordinatenebene YX'Y' nur einen einzigen, gleichzeitig der Stammachse SH angehörigen Punkt gemein haben, d. h. es müssen r und s stets größer als Null gewählt erden, unter welcher Voraussetzung sich für $z = 0$ wirklich auch x und y gelmäßig auf Null reduciren.

Zweite und dritte Bedingung:

Die fragliche Fläche muß von einer im Abstande $SA = SH - AH = l - \alpha l = \delta l$ on S senkrecht zu SZ gelegten Ebene in einer Curve durchschnitten werden, elche auf der letzteren ein Stück von dem Inhalte $\overline{F}$ abgrenzt, und deren große hse außerdem die vorgeschriebene Länge: $\overline{a_1 a_2} = \overline{D}$ besitzt. — Es sind demnach e beiden Parameter a und b in jedem gegebenen Falle aus den Relationen:

$$a = \frac{1}{2}\overline{D}, \quad b = \text{num}\{0{\cdot}3010300 + \log \overline{F} - [\log \varphi\,(p, q) + \log \overline{D}]\}$$

bestimmen, indem für $z = \delta l$ der Quotient: $\frac{c l^s z^r + l^r z^s}{(c\delta^r + \delta^s)\, l^{r+s}}$ allgemein gleich 1 ird, also (73) in: $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = 1$ übergeht.

Vierte Bedingung:

Das von S an gerechnete Volumen V jenes Körpers, welcher von d durch (73) definirten Mantelfläche und einer in der Distanz l von S befindlich zur Z-Achse verticalen Ebene begrenzt wird, muß für beliebige Werthe v $\overline{F}$ und l gleich $\lambda_1 \overline{F}l$ sein, welche Forderung sich mit Rücksicht auf die coëxistire den Beziehungen:

$$V = \int_0^l g\,dz = \frac{1}{4}\varphi(p,q) \int_0^l \overline{m_1\,m_2} \times \overline{n_1\,n_2}\,dz = \overline{F} \int_0^l \frac{c l^s z^r + l^r z^s}{(c\delta^r + \delta^s)\, l^{r+s}}\,dz =$$

$$= \frac{\overline{F}l}{c\delta^r + \delta^s} \int_0^1 (cu^r + u^s)\,du = \frac{\overline{F}l}{c\delta^r + \delta^s}\left(\frac{c}{r+1} + \frac{1}{s+1}\right)$$

augenscheinlich durch die Gleichung: $\frac{c}{r+1} + \frac{1}{s+1} = c\lambda_1\delta^r + \lambda_1\delta^s$ analyti präcisiren läßt. Sobald wir daher die vorläufig numerisch noch unbestimmt geb benen Exponenten r, s so wählen können, daß $\frac{1}{r+1} = \lambda_1\delta^r$ und $\frac{1}{s+1} = \lambda_1\,\delta^s$ wi erscheint auch die vierte Bedingung vollständig erfüllt, und es entsteht jetzt n die Frage, ob die jenen beiden Identitäten äquivalente Relation:

$$(74)\ \ldots \frac{1}{u+1} = \lambda_1\,\delta^u \text{ resp. } (1+u)\,\delta^u = \lambda_1^{-1}$$

thatsächlich für alle empirisch vorkommenden Formzahlen λ_1 zw von einander verschiedene endliche und positive Wurzeln r, s a zuweisen hat.

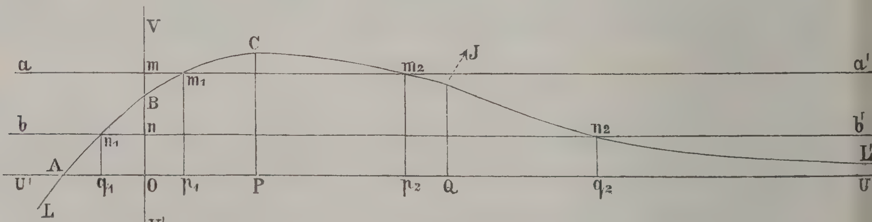


Fig. 20.

Um hierüber eine allgemeine Entscheidung zu ermöglichen, ist es zunä nothwendig, die analytische Beschaffenheit des Productes: $v = (1+u)\,\delta^u$ grün lich zu studiren, was wir am schnellsten durch eine geometrische Darstellu dieser Function von u erreichen. Hiebei bedienen wir uns der Einfachheit weg eines ebenen rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit den Achsen UU', V (s. die schematische Fig. 20) und beziehen alle in Betracht kommenden Specia sirungen von u und v auf eine und dieselbe Längeneinheit OA = OB = Es entspricht dann jeder willkürlich angenommenen Abscisse u eine bestimm Ordinate v, so daß die Endpunkte der bei stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ variire dem u sich ergebenden Ordinaten in ihrer ununterbrochenen Aufeinanderfo eine gewisse Curve LL' bilden, welche die zu untersuchende Function v ge metrisch versinnlicht. Ihre mathematische Charakteristik ist in den Formel

$$\lim_{u=-1} \upsilon = 0, \lim_{u=0} \upsilon = 1, \lim_{u=\infty} \upsilon = \lim_{u=\infty} \frac{1+u}{\delta^{-u}} = \lim_{u=\infty} \frac{\log e}{\delta^{-u} \log(\delta^{-1})} = 0;$$

$$\frac{d\upsilon}{du} = \delta^u + \frac{(1+u)\delta^u \log\delta}{\log e} = \frac{\{\log(\delta e) - u \log(\delta^{-1})\}\,\delta^u}{\log e}, \lim_{u=\infty} \frac{d\upsilon}{du} = 0;$$

$$\frac{d^2\upsilon}{du^2} = \frac{2\delta^u \log\delta}{\log e} + \frac{(1+u)\,\delta^u \log^2\delta}{\log^2 e} = -\frac{\log(\delta^{-1})\,\{\log(\delta e^2) - u\log(\delta^{-1})\}\,\delta^u}{\log^2 e}$$

halten, deren Discussion unmittelbar auf folgende Sätze führt:

1. Die krumme Linie LL′ steigt, da die Ausdrücke $\delta e = (1-\alpha)e$ und $\delta^{-1} = \frac{1}{1-\alpha}$ für

$$0 \leq \alpha < \frac{e-1}{e} = 0{\cdot}6321206, \text{ beziehungsweise } 0 < \alpha \leq 1$$

ößer als 1 bleiben, für alle empirisch möglichen Werthe des Coëfficienten α n Punkte A bis zu einem durch seine Coordinaten:

$$\bar{u} = \frac{\log(\delta e)}{\log(\delta^{-1})} = O\,P, \bar{\upsilon} = (1+\bar{u}) \times \text{num}\,(\bar{u}\log\delta) = \frac{\log e}{\delta e \log(\delta^{-1})} = CP$$

timmten oberen Culminationspunkte C und senkt sich hierauf allmälig immer d mehr gegen die Abscissenachse, deren positive Hälfte OU zugleich ihre mptote bildet.

2. Sie durchschneidet die Ordinatenachse in der constanten Entfernung B=1 vom Ursprunge des gewählten Coordinatensystems, so daß die Ordinate ihres Culminationspunktes unter allen Umständen größer als 1 ausfällt.

3. Sie verläuft von A bis zu ihrem durch die beiden Gleichungen:

$$u_1 = \frac{\log(\delta e^2)}{\log(\delta^{-1})} = \frac{\log(\delta^{-1}) + 2\log(\delta e)}{\log(\delta^{-1})} = 1 + 2\bar{u} = 1 + 2OP = OQ$$

$$_1 = (1+u_1) \times \text{num}\,(u_1 \log\delta) = \frac{2\log e}{\delta e^2 \log(\delta^{-1})} = \frac{2\bar{\upsilon}}{e} = 0{\cdot}7357589\bar{\upsilon} = JQ$$

ennzeichneten Inflexionspunkte J regelmäßig concav, von $u=u_1$ bis $u=\infty$ gegen convex gegen die Abscissenachse.

Zieht man hiernach durch irgend einen über B befindlichen Punkt m Ordinatenachse eine Parallele aa′ zu U′U, so trifft dieselbe, falls Om nicht ich oder größer als CP ist, die Curve LL′ stets in zwei, rechts von VV′ legenen Punkten m_1, m_2, deren Abscissen Op_1 Op_2 natürlich gewisse positive hlen entsprechen, d. h. die Relation (74) kann für jede zwischen $= \frac{\delta e \log(\delta^{-1})}{\log e}$ und 1 fallende Specialisirung von λ_1 durch zwei sitive Substitutionen: r, s für u befriedigt werden.

Ist zweitens λ_1 kleiner als $\frac{1}{\bar{\upsilon}}$, so kommt der Beziehung (74) überhaupt keine itive Wurzel zu, indem kein einziger Punkt der Linie LL′ eine den Werth $\bar{\upsilon}$ merisch überschreitende positive Ordinate besitzt.

Ist endlich λ_1 größer als 1, resp. λ_1^{-1} beispielsweise gleich On, so sind Abscissen Oq_1, Oq_2 jener Punkte n_1, n_2, welche eine durch n zu U′U gezogene rallele bb′ mit LL′ gemein hat, ausnahmslos mit entgegengesetzten Zeichen sehen, so daß die Auflösung der Identität (74) in jedem derartigen Falle ar wieder zwei reelle, aber ungleich bezeichnete Wurzeln: $-r$, $+s$ ern muß.

**

Es wird somit die vierte Bedingung nur dann auf die von u
angegebene Art erfüllbar sein, wenn sich λ_1 innerhalb der Grenz
$\frac{1}{\bar{v}}$ und 1 bewegt, von welchen die untere: $\frac{1}{\bar{v}}$ bei abnehmendem α der N
immer näher rückt, was sich aus folgender Tabelle entnehmen läßt:

α	α	$1:\bar{v}$	$\bar{u}$	α	α	$1:\bar{v}$	$\bar{u}$
$\frac{1}{2}$	0·5000000	0·942085	0·4426950	$\frac{1}{18}$	0·0555556	0·146741	16·4952371
$\frac{1}{3}$	0·3333333	0·734779	1·4663035	$\frac{1}{19}$	0·0526316	0·139235	17·4954946
$\frac{1}{4}$	0·2500000	0·586501	2·4760595	$\frac{1}{20}$	0·0500000	0·132458	18·4957257
$\frac{1}{5}$	0·2000000	0·485254	3·4814201	$\frac{1}{21}$	0·0476190	0·126310	19·4959343
$\frac{1}{6}$	0·1666667	0·413001	4·4848149	$\frac{1}{22}$	0·0454545	0·120707	20·4961235
$\frac{1}{7}$	0·1428571	0·359164	5·4871592	$\frac{1}{23}$	0·0434783	0·115579	21·4962958
$\frac{1}{8}$	0·1250000	0.317604	6·4888757	$\frac{1}{24}$	0·0416667	0·110869	22·4964535
$\frac{1}{9}$	0·1111111	0·284593	7·4901870	$\frac{1}{25}$	0·0400000	0·106527	23·4965983
$\frac{1}{10}$	0·1000000	0·257760	8·4912216	$\frac{1}{26}$	0·0384615	0·102512	24·4967317
$\frac{1}{11}$	0·0909091	0·235527	9·4920587	$\frac{1}{27}$	0·0370370	0·098789	25·4968550
$\frac{1}{12}$	0·0833333	0·216811	10·4927500	$\frac{1}{28}$	0·0357143	0·095327	26·4969694
$\frac{1}{13}$	0·0769231	0·200842	11·4933305	$\frac{1}{29}$	0·0344828	0·092099	27·4970758
$\frac{1}{14}$	0·0714286	0·187057	12·4938249	$\frac{1}{30}$	0·0333333	0·089082	28·4971749
$\frac{1}{15}$	0·0666667	0·175039	13·4942511	$\frac{1}{35}$	0·0285714	0·076545	33·4975844
$\frac{1}{16}$	0·0625000	0·164469	14·4946222	$\frac{1}{40}$	0·0250000	0·067100	38·4978902
$\frac{1}{17}$	0·0588235	0·155101	15·4949483	$\frac{1}{50}$	0·0200000	0·053818	48·4983165

— Umfassen nun die durch diese Betrachtungen theoretisch festgestel
Variationsgrenzen von λ_1 factisch alle Werthe, welche λ_1 nach den bisheri
Erfahrungen für unsere einheimischen Waldbäume annehmen kann, oder ni
Darüber geben direct jene Resultate Aufschluß, welche speciell für e
Schaftformzahlen von Smalian, Preßler, Schindler und Baur
Grundlage zahlreicher Beobachtungen abgeleitet worden sind und hier o
weiteren Commentar der Reihe nach mitgetheilt werden mögen:

a) Nach Smalian's sorgfältigen Untersuchungen[58] beträgt die jewei
echte Schaftformzahl λ_1

bei Eichen und Buchen . . . mindestens 0·36, im Mittel 0·49, höchstens 0
bei Erlen . . . . „ 0·38, „ „ 0·47, „ 0
bei Birken und Weiden . . „ 0·37, „ „ 0·45, „ 0
bei den übrigen Laubhölzern „ 0·37, „ „ 0·48, „ 0
endlich bei Nadelhölzern . . „ 0·36, „ „ 0·46, „ 0

[58] S. h. dessen in der 22. Anmerkung citirtes Werk, pag. 71 und 72.

vankt also im Allgemeinen zwischen den verhältnißmäßig engen Grenzen 0·36
) 0·60.

b) Nach einer im ersten Bande des von Hofrath Prof. Preßler und
of. Kunze veröffentlichten Werkes: „Die Holzmeßkunst in ihrem ganzen
ifange" gegebenen Formzahlenübersicht [59] gestatten die Variationen von λ_1
zende Darstellungsweise, wenn man das durch den höchsten gemeinjährigen
rchschnittsertrag charakterisirte „normale Forstalter" des untersuchten Bestandes
z mit A bezeichnet:

Holzalter	$\frac{1}{4}$ A		$\frac{1}{2}$ A		A		$\frac{3}{2}$ A		
Formclasse	abholzig		ziemlich abholzig		mittelholzig		vollholzig		sehr vollholzig
Tanne	0·42	bis	0·45	bis	0·48	bis	0·52	bis	0·56
Fichte	0·41	"	0·43	"	0·46	"	0·49	"	0·53
Kiefer	0·40	"	0·43	"	0·46	"	0·50	"	0·55
Lärche	0·40	"	0·42	"	0·44	"	0·47	"	0·50
Buche	0·40	"	0·44	"	0·47	"	0·51	"	0·55
Eiche	0·40	"	0·43	"	0·46	"	0·50	"	0·53
Erle	0·42	"	0·45	"	0·48	"	0·52	"	0·55
Birke	0·40	"	0·42	"	0·44	"	0·46	"	0·49

— Hiezu wird noch bemerkt, daß λ_1 für Ulmen, Ahorne, Eschen, Aspen,
eiden wahrscheinlich zwischen den Formzahlen der Erle und Birke liegt und
äußerst spitzem Wuchse und starkem bis über den Meßpunkt hinaufreichenden
irzelanlaufe ausnahmsweise auf 0·30 herabsinken kann.

c) Finanzrath Schindler gelangt auf Grundlage genauer Erhebungen [60]
den Gebirgs- und Flachländern Niederösterreichs und Ungarns, den Alpen-
sten, dem Böhmerwalde, dem böhmisch-mährischen Grenzgebirge, den Sudeten
) dem böhmischen und mährischen Hügellande zu nachstehenden Zahlen für λ_1:

Holzart	abholzig	mittelholzig	vollholzig	Holzart	abholzig	mittelholzig	vollholzig
Tannen	0·43	0·49	0·55	Buchen	0·41	0·48	0·55
Fichten	0·43	0·47	0·53	UlmeAhornEsche	0·43	0·48	0·53
Kiefern	0·42	0·47	0·53	Erlen	0·42	0·47	0·52
Lärchen	0·38	0·44	0·51	Aspen	0·42	0·47	0·52
Eichen	0·43	0·50	0·56	Weide u. Birke	0·36	0·43	0·50

— Hienach bestimmt sich, da für licht erwachsene Stämme 3 bis 6 Procent
ı λ_1 abzuziehen, für im Drucke erwachsene 3 bis 6 Procent zuzuschlagen sind,
untere Grenze von λ_1 zu 0·34, seine obere zu 0·59.

d) Endlich fixirt Prof. Dr. Baur in seiner großen Arbeit über die
hte [61] speciell für diese Holzart folgende Schwankungen von λ_1 bei verschiedenen
lzaltern und Bonitäten:

[59] Dieselbe findet sich mit einigen unbedeutenden numerischen Abänderungen schon in der früher citirten
schüre Preßler's „Das Gesetz der Stammbildung", pag. 131.

[60] S. h. dessen in der 56. Anmerkung citirtes Werk, pag. 245, 246, 247.

[61] „Die Fichte in Bezug auf Ertrag, Zuwachs und Form." Berlin, 1877. Verlag von J. Springer.

Holzalter	1. Bonität	2. Bonität	3. Bonität
21 bis 40 Jahre	0·30 bis 0·66	0·27 bis 0·70	— bis —
41 „ 60 „	0·34 „ 0·60	0·37 „ 0·79	0·31 „ 0·88
61 „ 80 „	0·40 „ 0·59	0·35 „ 0·67	0·36 „ 0·61
81 „ 111 „	0·41 „ 0·58	0·42 „ 0·58	— „ —

— Nach diesen Daten[62] erstrecken sich mithin die Variationen von λ_1 vo 0·27 bis 0·88, während nach den neuesten gleichfalls auf die Fichte bezüglich Untersuchungen Prof. Kunze's ihre Schaftformzahlen nur zwischen 0·320 un 0·775 variiren[63].

So mannigfaltig nun auch die Abänderungen sind, welche λ_1 nach d hier gegebenen Zusammenstellungen nicht allein für verschiedene, sondern selb für eine und dieselbe Holzart aufweist, so genügen doch alle in a), b), c) un d) angeführten Specialisirungen dieser Größe der für $\alpha = \frac{1}{20}$ aus unserer Ta belle hervorgehenden Bedingung: $0{\cdot}132458 < \lambda_1 < 1$, wonach unsere an die Gleichung (74) bezügliche Frage für sämmtliche bisher eruir Normalformzahlen bejahend zu beantworten ist. — Ob dies eben allgemein von den unechten Formzahlen gilt, läßt sich hieraus allerding noch nicht mathematisch strenge deduciren, wohl aber in jedem gegeben Falle durch numerische Berechnung[64] des Ausdruckes:

$$(75) \ldots \tau = \lambda_1^{-1}\, \delta \log(\delta^{-1}) = \frac{1-\alpha}{\lambda_1} \log\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

sehr leicht entscheiden, indem die Forderung: $\frac{1}{\upsilon} < \lambda_1 < 1$ offenbar den beid folgenden: $\lambda_1 < 1$ und: $\tau < \frac{\log e}{e} = 0{\cdot}1597680$ äquivalent ist.

Fünfte Bedingung:

Die in der Relation (73) charakterisirte krumme Fläche muß endlich beschaffen sein, daß speciell der dem Achsenpunkt A_1 zugehörige Querschn des von ihr begrenzten Körpers seinem Inhalte nach mit der im Abstan $SA_1 = SH - A_1H = (1-\alpha_1)\,l = \delta_1 l$ von S gelegenen Stammquerfläche identisch ist, resp. zwischen $\overline{F}$, F_1; δ, δ_1 und c die Beziehung:

$$\lim_{z=\delta_1 l} g = \overline{F} \lim_{z=\delta_1 l} \left\{\frac{c l^s z^r + l^r z^s}{(c\delta^r + \delta^s)\, l^{r+s}}\right\} = \overline{F}\left(\frac{c\delta_1^r + \delta_1^s}{c\delta^r + \delta^s}\right) = F_1$$

stattfindet. Dieselbe erlaubt nach Einführung der Abkürzungen: $\frac{\overline{F}}{F_1} = m, \frac{\delta}{\delta_1} =$ auch die Darstellungsweise: $m(c + \delta_1^{s-r}) = cn^r + \delta_1^{s-r} n^s$ und wird augenscheinl

---

[62] Zur richtigen Würdigung dieser Angaben diene die Thatsache, daß dieselben auf Untersuchun basirt sind, welche die k. württemberg. forstliche Versuchsanstalt in 99 dem Alter und der Bonität nach v schiedenen Fichtenbeständen an 1536 Stämmen angestellt hat.

[63] Nach einer gütigen mündlichen Mittheilung Prof. Kunze's gelegentlich meines Aufenthaltes Tharand. (8. und 9. August 1877).

[64] Um die hiebei nöthige Verwandlung von $1 - \alpha = 1 - \frac{1{\cdot}3}{l}$ in den entsprechenden Decimalbruch möglichster Zeitersparniß durchzuführen, benütze man, falls keine Rechenmaschine zur Hand ist, das vortreffl Werk: Table of the reciprocals of numbers, from 1 to 100,000, with their differences, by which the r procals of numbers may be obtained up to 10,000,000. — By Lieut.-Col. W. H. Oakes. London 1

durch befriedigt, daß wir die letzte bisher unbestimmt gebliebene Größe c
rch den Quotienten[65]:

$$(76) \ldots c = \left(\frac{m - n^s}{n^r - m}\right) \delta_1^{s-r}$$

etzen. Da nun die jeweiligen Werthe von δ und δ_1 ebenso wie jene von
und s stets von einander verschieden ausfallen, resp. die Differenzen: $m - n^s$
d $n^r - m$ nicht gleichzeitig verschwinden können, so ist hiemit der
achweis abgeschlossen, daß sich das Problem II für $\frac{1}{\upsilon} < \lambda_1 < 1$ auf
rundlage der Flächengleichung (73) in der That vollständig und
ideutig lösen läßt.

Es erwächst uns jetzt nur noch die Aufgabe, zu zeigen, wie man mit
lfe der Relation (74) die irgend welchen Specialisirungen von α und λ_1
rrespondirenden numerischen Werthe von r und s finden kann. Zu
sem Zwecke bedienen wir uns der Substitution: $u = \frac{t}{\log(\delta^{-1})} - 1$, für welche
die Function υ in:

$$\frac{(1+u)\,\delta^{1+u}}{\delta} = \frac{t \times \mathrm{num}\,\{(1+u)\log\delta\}}{\delta\log(\delta^{-1})} = \frac{t \times \mathrm{num}\,(-t)}{\delta\log(\delta^{-1})} = \frac{t\,10^{-t}}{\delta\log(\delta^{-1})}$$

wandelt, mithin aus (74) zur Ermittlung von t die transcendente Gleichung:

$$(77) \ldots t10^{-t} = \lambda_1^{-1}\,\delta\log(\delta^{-1}) = \tau$$

ultirt. Dieselbe besitzt, da das für $t = \log e = 0{\cdot}4342945$ eintretende Maximum
s Productes: $t\,10^{-t}$ mit $\frac{\log e}{e}$ zusammenfällt, für jeden zwischen 0 und 0·1597680
genden Specialwerth von τ zwei den Bedingungen: $0 < t_1 < \log e$, $\log e < t_2 < \infty$
nügende positive Wurzeln: t_1, t_2, deren erste Näherungswerthe: t'_1, t'_2 mittelst
: auf Seite 49 stehenden Tabelle[66] nach folgenden Regeln zu berechnen sind:

1. Um t'_1 zu ermitteln, kürze man τ vorerst auf fünf Decimalen ab und
he zu der durch die letzteren gebildeten Zahl N in den mit 0, 1, 2, ... 9
erschriebenen Verticalspalten zwischen $t = 0{\cdot}00$ und $t = 0{\cdot}43$ die nächst
einere Zahl N_1, deren Argument unmittelbar die drei ersten Ziffern von t'_1
fert. Subtrahirt man hierauf N_1 von N und der in der Tafel neben N_1
henden größeren Zahl N_2, so bestimmt die erste, eventuell zu corrigirende
ecimale des Quotienten $\frac{N - N_1}{N_2 - N_1}$ noch die vierte Ziffer von t'_1.

2. Um ferner t'_2 zu finden, eruire man zu N unter den auf 15976
lgenden Zahlen vor Allem die nächst größere, N′, indem der ihr
rrespondirende Werth von t mit den Anfangsziffern von t'_2 zusammenfällt;
nächste Ziffer dieser Unbekannten entspricht dann der ersten Decimale des

[65] Hieraus ergeben sich, wenn F_1 mit der ersten, resp. letzten regelmäßigen Stammquerfläche identi-
t wird, die Gleichungen:

$$c = \frac{\mu - (\delta\nu)^s}{(\delta\nu)^r - \mu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{s-r} \quad \text{beziehungsweise:} \quad c = \frac{\mu' - (\delta\nu')^s}{(\delta\nu')^r - \mu'}\left(\frac{1}{\nu'}\right)^{s-r}$$

em unter diesen Annahmen F_1 in F', resp. F'', δ_1 in $\frac{1}{\nu}$ resp. $\frac{1}{\nu'}$ übergeht.

[66] Da die numerische Bestimmung des Ausdruckes: $t\,10^{-t}$ für jedes positive t auf ein Resultat von
Gestalt: $0{\cdot}\beta$ führen muß — unter β irgend eine meist unbegrenzte Reihe von Decimalen verstanden —, so
ur Kenntniß des letzteren in jedem gegebenen Falle nur jene von β erforderlich. Die vorliegende Tabelle
hält nun die den Substitutionen: $t = 0{\cdot}00$, 0·01, 0·02, ... 3·97, 3·98, 3·99 und: $t = 4{\cdot}0$, 4·1, 4·2, ... 5·7,
5·9 correspondirenden Werthe der Größe β von $t = 0{\cdot}00$ bis $t = 3{\cdot}89$ auf fünf, von $t = 3{\cdot}90$ bis $t = 5{\cdot}9$
sechs Decimalen genau und liefert insoferne eine für die Praxis vollständig ausreichende Uebersicht der
riationen von $t\,10^{-t}$.

Quotienten $\frac{N' - N}{N' - N''}$, dessen Dividend durch die Differenz zwischen N' und N, dessen Divisor durch jene zwischen N' und der in der Tabelle neben N' stehenden nächst kleineren Zahl N'' gebildet wird.

Sind auf diese Art einmal t'_1 und t'_2 gewonnen, so lassen sich nunmehr t_1 und t_2 durch wiederholte Anwendung der jedem Näherungswerth von t, t' zugehörigen Correcturformel:

$$(78) \ldots \Delta t' = \frac{\tau - t' 10^{-t'}}{\{1 - t' (\log e)^{-1}\} 10^{-t'}} = \frac{\tau 10^{t'} - t'}{1 - 2\cdot3025851\, t'}$$

mit beliebiger Genauigkeit ableiten und schließlich mittelst der Gleichungen:

$$(79) \ldots r = \frac{t_1}{\log(\delta^{-1})} - 1, \quad (80) \ldots s = \frac{t_2}{\log(\delta^{-1})} - 1$$

auch die entsprechenden Zahlenwerthe von r und s deffinitiv feststellen. — Zur praktischen Erläuterung dieses Verfahrens mögen hier folgende drei Beispiele mitgetheilt werden:

a) Durch welche Relation zwischen drei veränderlichen Coordinaten sind auf Grundlage von (73) die Mantelflächen solcher Stämme zu definiren, deren Formzahlen λ_1, falls $\bar{F}$ regelmäßig mit der im Abstande $\frac{1}{3} l$ von F gelegenen Stammquerfläche identificirt wird, den constanten Werth: 0·75 besitzen? — In diesem Falle ist $\delta = \frac{2}{3}$, $\tau = \frac{8}{9} \log \frac{3}{2} = 0\cdot1565256$, also:

$$t'_1 = 0\cdot352,\ \Delta t'_1 = \frac{0\cdot0000346}{0\cdot1894900} = 0\cdot0001826;\ t'_2 = 0\cdot528,\ \Delta t'_2 = \frac{0\cdot0000590}{0\cdot2157649} = \\ = 0\cdot0002734;$$

$$t_1 = 0\cdot3521826,\ r = \frac{t_1}{\log\frac{3}{2}} - 1 = 1; t_2 = 0\cdot5282734, s = \frac{t_2}{\log\frac{3}{2}} - 1 = 1\cdot9999\ldots = 2$$

für welche Daten die allgemeine Flächengleichung: (73) offenbar in:

$$(81) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{\frac{9\,(cl + z)\,z}{2\,(3c + 2)\,l^2}\right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

übergeht. Hieraus ergeben sich unter der speciellen Annahme: $p = q = 2$, je nachdem wir die arbiträre Constante c gleich 0 oder ∞ setzen, die beiden Relationen: $(82) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{3z}{2l}\right)^2$ beziehungsweise: $(83) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{3z}{2l}$, deren geometrische Deutung sich sehr einfach gestaltet. Die erstere gehört nämlich einem geraden elliptischen Kegel von der Achsenlänge l an, dessen Grundfläche mit den Halbachsen: $\frac{3}{2}$ a und $\frac{3}{2}$ b versehen ist, während die letztere ein elliptisches Paraboloid charakterisirt, dessen Grundfläche die Halbachsen: $\frac{1}{2} a \sqrt{6}$ und $\frac{1}{2} b \sqrt{6}$ aufweist. Es gilt daher die in den Anfangsbedingungen dieses Beispieles unmittelbar angenommene Cubirungsformel: $V = \frac{3}{4} \bar{F} l$ unter Anderem auch für den geraden Kreiskegel und das Rotationsparaboloid,[67] was übrigens schon von Hoßfeld bewiesen worden ist.

[67] S. h. die im 2. Jahrgange des „Centralblattes für das gesammte Forstwesen" publicirte Abhandlung d. Verf.: „Ueber einige allgemeine für die Holzmeßkunde belangreiche Cubirungsformeln", pag. 622.

Fünfstellige Hilfstafel zur Auflösung der Gleichung: $t\,10^{-t} = \tau$.

;	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00000	00977	01910	02800	03648	04456	05226	05958	06654	07315
·1	07943	08539	09103	09637	10142	10619	11069	11493	11892	12267
2	12619	12948	13256	13543	13811	14059	14288	14500	14695	14873
3	15036	15183	15316	15435	15541	15634	15715	15783	15841	15888
4	15924	15951	15968	15976	15975	15967	15950	15926	15894	15856
5	15811	15761	15704	15641	15574	15501	15424	15342	15256	15165
6	15071	14974	14873	14769	14662	14552	14439	14324	14207	14088
7	13967	13844	13719	13593	13466	13337	13207	13076	12945	12812
8	12679	12545	12411	12277	12142	12007	11871	11736	11601	11465
9	11330	11195	11061	10927	10793	10659	10526	10394	10262	10131
0	10000	09870	09741	09613	09485	09358	09232	09107	08983	08860
·1	08738	08616	08496	08377	08259	08141	08025	07910	07796	07683
·2	07571	07461	07351	07243	07135	07029	06924	06820	06718	06616
·3	06515	06416	06318	06221	06125	06030	05937	05844	05753	05663
·4	05574	05486	05399	05313	05228	05145	05062	04981	04901	04822
·5	04743	04666	04590	04515	04441	04368	04297	04226	04156	04087
·6	04019	03952	03886	03821	03757	03694	03632	03570	03510	03451
·7	03392	03334	03277	03221	03166	03112	03059	03006	02954	02903
·8	02853	02803	02755	02707	02660	02613	02568	02523	02478	02435
·9	02392	02350	02308	02268	02227	02188	02149	02111	02073	02036
·0	02000	01964	01929	01895	01861	01827	01794	01762	01730	01699
·1	01668	01638	01608	01579	01550	01522	01494	01467	01440	01414
·2	01388	01363	01338	01313	01289	01265	01242	01219	01197	01174
·3	01153	01131	01110	01090	01070	01050	01030	01011	00992	00974
·4	00955	00938	00920	00903	00886	00869	00853	00837	00821	00806
·5	00791	00776	00761	00747	00733	00719	00705	00692	00679	00666
·6	00653	00641	00628	00617	00605	00593	00582	00571	00560	00549
·7	00539	00528	00518	00508	00499	00489	00480	00470	00461	00452
·8	00444	00435	00427	00419	00411	00403	00395	00387	00380	00372
·9	00365	00358	00351	00344	00338	00331	00325	00318	00312	00306
·0	00300	00294	00288	00283	00277	00272	00267	00261	00256	00251
·1	00246	00241	00237	00232	00227	00223	00219	00214	00210	00206
·2	00202	00198	00194	00190	00186	00183	00179	00176	00172	00169
·3	00165	00162	00159	00156	00153	00150	00147	00144	00141	00138
·4	00135	00133	00130	00127	00125	00122	00120	00118	00115	00113
·5	00111	00108	00106	00104	00102	00100	00098	00096	00094	00092
·6	00090	00089	00087	00085	00083	00082	00080	00078	00077	00075
·7	00074	00072	00071	00069	00068	00067	00065	00064	00063	00061
·8	00060	00059	00058	00057	00056	00054	00053	00052	00051	00050
·9	00049_1	00048_1	00047_1	00046_2	00045_2	00044_3	00043_4	00042_5	00041_7	00040_8
4·	00040_0	00032_6	00026_5	00021_6	00017_5	00014_2	00011_6	00009_4	00007_6	00006_2
5·	00005_0	00004_1	00003_3	00002_7	00002_1	00001_7	00001_4	00001_1	00000_9	00000_7

b) Welche Specialform von (73) entspricht den Substitutionen: $\alpha = 0{\cdot}1904438$, $\lambda_1 = 0{\cdot}6695403$? — Dies vorausgesetzt, erhalten wir für τ, t'_1, t_1; t'_2, t_2; r, s der Reihe nach die Werthe:

$\tau = 0{\cdot}1109406$, $t'_1 = 0{\cdot}161$, $t_1 = 0{\cdot}1605677$; $t'_2 = 0{\cdot}918$, $t_2 = 0{\cdot}9175296$, $r = \frac{3}{4}$, $s = 9$, mithin aus (31) in letzter Linie die ziemlich complicirte Gleichung

$$(84)\ldots\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{\frac{c\,l^9 z^{\frac{3}{4}} + l^{\frac{3}{4}} z^9}{(0{\cdot}8534641c + 0{\cdot}1493562)\,l^{\frac{39}{4}}}\right\}^{\frac{pq}{p+q}}.$$

c) Ist endlich für eine Reihe gleichartiger Stämme $\alpha = 0{\cdot}0929365$, $\lambda_1 = 0{\cdot}3349862$, resp. $\tau = 0{\cdot}1147071$, so bestehen hinsichtlich t'_1, t_1; t'_2, t_2, r und s die Identitäten:

$t'_1 = 0{\cdot}169$, $t_1 = 0{\cdot}1694492$; $t'_2 = 0{\cdot}890$, $t_2 = 0{\cdot}8896086$, $r = 3$, $s = 20$, wonach die allgemeine Gleichung ihrer Mantelflächen folgende Schreibweise gestattet:

$$(85)\ldots\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{\frac{(c\,l^{17} + z^{17})\,z^3}{(0{\cdot}7462995c + 0{\cdot}1421523)\,l^{20}}\right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

Außerdem dürften diese Beispiele die große Mannigfaltigkeit der unter (73) subsumirbaren Flächen ersichtlich machen, welche, nebenbei bemerkt, auch sämmtliche durch (31) zu charakterisirende Gebilde als einfache Specialformen umfassen. Denn sobald für die in Betracht gezogenen Specialisirungen von $\bar{F}$, F_1, δ, δ_1 und λ_1 der numerische Werth des Ausdruckes:

$$(86)\ldots\frac{\log\bar{F} - \log F_1}{\log\delta - \log\delta_1} = \frac{\log m}{\log n}$$

mit einem der Exponenten r, s übereinstimmt, reducirt sich (73) gemäß den Formeln

$$\lim_{n^r = m} c = \infty,\ \lim_{c=\infty}\left\{\frac{c l^s z^r + l^r z^s}{(c\,\delta^r + \delta^s)\,l^{r+s}}\right\} = \lim_{c=\infty}\left\{\frac{l^s z^r + c^{-1} l^r z^s}{(\delta^r + c^{-1}\delta^s)\,l^{r+s}}\right\} = \left(\frac{z}{\delta l}\right)^r,$$

$$\lim_{n^s = m} c = 0,\ \lim_{c=0}\left\{\frac{c l^s z^r + l^r z^s}{(c\,\delta^r + \delta^s)\,l^{r+s}}\right\} = \left(\frac{z}{\delta l}\right)^s$$ auf die einfache Gleichung

$$(87)\ldots\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{\delta l}\right)^{\frac{pq\log m}{(p+q)\log n}}$$

welche sich von (31) nur insoferne unterscheidet, als hier an die Stelle von h und r die gleichartigen Größen δl und $\frac{\log m}{\log n}$ getreten sind.

Zur theoretischen Ergänzung unserer über die Relation (74) angestellten Betrachtungen erlauben wir uns schließlich noch folgende Sätze kurz zu erwähnen.

1. Für sehr kleine Werthe von τ gelingt die Berechnung von r am schnellsten mit Hilfe des Ausdruckes:[68]

$$(88)\ldots r = \frac{\delta}{\lambda_1}\left\{1 + \frac{\tau}{\log e} + \frac{3}{2}\left(\frac{\tau}{\log e}\right)^2 + \ldots + \frac{(k+1)^{k-1}}{k!}\left(\frac{\tau}{\log e}\right)^k + \ldots\right\} - 1$$

dessen allgemeine Richtigkeit leicht darzulegen ist. Transformirt man nämlich die Beziehung (77) in: $t = \tau\,10^t$, so liefert das Reversionstheorem von Lagrange unter Berücksichtigung der Formeln:

$$\lim_{t=0}\frac{d\,(10^{2t})}{dt} = \frac{2}{\log e},\ \lim_{t=0}\frac{d^2(10^{3t})}{dt^2} = \left(\frac{3}{\log e}\right)^2,\ \lim_{t=0}\frac{d^3(10^{4t})}{dt^3} = \left(\frac{4}{\log e}\right)^3,$$

$$\ldots\ldots\lim_{t=0}\frac{d^k\{10^{(k+1)t}\}}{dt^k} = \left(\frac{k+1}{\log e}\right)^k\ldots\ldots$$

[68] Unter der speciellen Voraussetzung: $\alpha = 0$ folgt hieraus wegen $\delta = 1$, $\tau = 0$, $\lambda_1 = \lambda$ wieder direct die Formel (34).

ır Bestimmung der Wurzel t_1 die für $0 \leqq \tau < \frac{\log e}{e}$ convergente Reihe:

$$t_1 = \tau + \frac{\tau^2}{2\,!}\left(\frac{2}{\log e}\right) + \frac{\tau^3}{3\,!}\left(\frac{3}{\log e}\right)^2 + \ldots + \frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!}\left(\frac{k+1}{\log e}\right)^k + \ldots \text{ in inf.}$$

eren Substitution in (79) unmittelbar auf das Resultat (88) führt.

2. Sind allgemein $\overline{u}_k$, $\overline{u}_{k+1}$ zwei den Annahmen: $\alpha = \frac{1}{k}$, $\alpha = \frac{1}{k+1}$ rrespondirende obere Grenzen von r, so nähert sich die Differenz: $\Delta\overline{u}_k = \overline{u}_{k+1} - \overline{u}_k$ mit wachsendem k immer mehr und mehr der Einheit, ofür schon die auf Seite 508 mitgetheilte Tabelle einen Beleg liefert, aber auch n analytischer Beweis erbracht werden kann. Zu diesem Zwecke bilden wir ırch Subtraction der keiner weiteren Erklärung bedürftigen Identitäten:

$$\overline{u}_{k+1} = \left\{\log e : \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right\} - 1,\ \overline{u}_k = -\left\{\log e : \log\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right\} - 1$$

e Gleichung: $\Delta\overline{u}_k = \log e \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) : \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\log\left(1 - \frac{1}{k}\right)$, in welcher ch der rechter Hand stehende Quotient nach Substitution der Entwicklungen:

$$\text{ıg}\, e \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\log^2 e}{k^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(n+1)\,k^{2n}} = -\frac{\log^2 e}{k^2}\left(1 + \frac{1}{2\,k^2} + \frac{1}{3\,k^4} + \ldots\right),$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\log\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{\log^2 e}{k^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\,k^n} \times \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(n+1)\,k^n} =$$

$$= -\frac{\log^2 e}{k^2}\left(1 + \frac{5}{12\,k^2} + \frac{47}{180\,k^4} + \frac{319}{1680\,k^6} + \frac{1879}{12600\,k^8} + \ldots\right)$$

lbst ohne Schwierigkeit in eine unendliche Reihe verwandeln läßt, und erhalten ıf diese Art für $\Delta\overline{u}_k$ die interessante Formel:

$$(89)\ \ldots\ \Delta\overline{u}_k = 1 + \frac{1}{12\,k^2} + \frac{3}{80\,k^4} + \frac{275}{12096\,k^6} + \frac{8183}{518400\,k^8} + \ldots \text{ in inf.}$$

So oft wir demnach zweite und höhere Potenzen von $\frac{1}{k}$ ohne merklichen ehler vernachlässigen dürfen, wird $\Delta\overline{u}_k$ geradezu gleich 1, womit unsere letzte ehauptung vollständig begründet erscheint.

III.

Es seien für irgend einen Stamm von der Achsenlänge l die ınhalte: F_1, F_2, ... F_k, ... F_m von m Querflächen nebst deren Abänden: $l_1 = \delta_1\,l$, $l_2 = \delta_2\,l$, ... $l_k = \delta_k\,l$, ... $l_m = \delta_m\,l$ von der Stammıitze S gegeben, ferner noch die Maximalstärke D_k des Querhnittes F_k und die auf ihn bezogene Stammformzahl λ_k bekannt. - Wie ist auf Grundlage dieser Daten die Mantelfläche eines erartigen Stammes am einfachsten analytisch zu beschreiben?

Um diese Frage allgemein beantworten zu können, gehen wir von der lächengleichung:

$$(90)\ \ldots\ \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{\frac{z\,(l^m + c_1\,l^{m-1}\,z + c_2\,l^{m-2}\,z^2 + \ldots + c_m\,z^m)}{\delta_k\,(1 + c_1\,\delta_k + c_2\,\delta_k^2 + \ldots + c_m\,\delta_k^m)\,l^{m+1}}\right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

ıs, welche nach Feststellung der die mittleren Formen der untersuchten Stammıerschnitte charakterisirenden Specialwerthe von p und q im Ganzen noch $+\,2$ unbestimmte Parameter: a, b; c_1, c_2, ... c_m enthält, also durch

richtige Wahl der letzteren einer gleichen Zahl von Bedingungen ange-
paßt werden kann. Als solche betrachten wir nunmehr die $m + 2$ in unseren
Problem enthaltenen Angaben und wollen im Folgenden versuchen, dieselben i
möglichst übersichtlicher Gestalt in die Relation (90) einzuführen.

Zu diesem Zwecke ermitteln wir vorerst analog wie bei den Probleme
I und II mit Hilfe von (90) die irgend einer Abscisse z zugehörige Querfläche g

$$g = ab\,\varphi(p, q) \left\{ \frac{z\,(l^m + c_1\,l^{m-1}z + c_2\,l^{m-2}z^2 + \ldots + c_m\,z^m)}{\delta_k\,(1 + c_1\,\delta_k + c_2\,\delta_k^2 + \ldots + c_m\,\delta_k^m)\,l^{m+1}} \right\},$$

welcher Ausdruck, da g für $z = \delta_k l$ gleich F_k werden muß, resp. der Factor
$ab\,\varphi(p, q)$ mit F_k identisch ist, auch die Schreibweise:

$$(91) \ldots g = F_k \left\{ \frac{z\,(l^m + c_1\,l^{m-1}\,z + c_2 l^{m-2}\,z^2 + \ldots + c_m\,z^m)}{\delta_k\,(1 + c_1\,\delta_k + c_2\,\delta_k^2 + \ldots + c_m\,\delta_k^m)\,l^{m+1}} \right\}$$

gestattet. Setzen wir dann, entsprechend unseren ursprünglichen Feststellunge
in (91) z der Reihe nach gleich $\delta_1\,l, \delta_2\,l, \ldots \delta_{k-1}\,l, \delta_{k+1}\,l, \ldots \delta_m\,l$ und gleic
zeitig $g = F_1, F_2, \ldots F_{k-1}, F_{k+1}, \ldots F_m$, so ergeben sich nach Substitution de
Abkürzungen:

$$\frac{F_k}{F_1} = \mu_1, \frac{F_k}{F_2} = \mu_2, \ldots \frac{F_k}{F_{k-1}} = \mu_{k-1}, \frac{F_k}{F_{k+1}} = \mu_{k+1}, \ldots \frac{F_k}{F_m} = \mu_m$$

und einigen leichten Transformationen die $m - 1$ Beziehungen:

$$\begin{array}{l}
(\delta_k^2 - \delta_1^2\,\mu_1)\,c_1 + (\delta_k^3 - \delta_1^3\,\mu_1)\,c_2 + \ldots + (\delta_k^{m+1} - \delta_1^{m+1}\,\mu_1)\,c_m = \delta_1\,\mu_1 - \delta_k, \\
(\delta_k^2 - \delta_2^2\,\mu_2)\,c_1 + (\delta_k^3 - \delta_2^3\,\mu_2)\,c_2 + \ldots + (\delta_k^{m+1} - \delta_2^{m+1}\,\mu_2)\,c_m = \delta_2\,\mu_2 - \delta_k, \\
\quad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots \\
(\delta_k^2 - \delta_{k-1}^2\mu_{k-1})c_1 + (\delta_k^3 - \delta_{k-1}^3\mu_{k-1})\,c_2 + \ldots + (\delta_k^{m+1} - \delta_{k-1}^{m+1}\,\mu_{k-1})\,c_m = \delta_{k-1}\mu_{k-1} - \delta_k \\
(\delta_k^2 - \delta_{k+1}^2\mu_{k+1})c_1 + (\delta_k - \delta_{k+1}^3\mu_{k+1})\,c_2 + \ldots + (\delta_k^{m+1} - \delta_{k+1}^{m+1}\,\mu_{k+1})\,c_m = \delta_{k+1}\mu_{k+1} - \delta_k \\
\quad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots \\
(\delta_k^2 - \delta_m^2\,\mu_m)\,c_1 + (\delta_k^3 - \delta_m^3\,\mu_m)\,c_2 + \ldots + (\delta_k^{m+1} - \delta_m^{m+1}\,\mu_m)\,c_m = \delta_m\,\mu_m - \delta_k,
\end{array}$$

zu welchen gemäß den beiden letzten in unserer Aufgabe vorkommenden Be-
stimmungen noch die Relationen:

$$2a = D_k, \int_0^l g\,dz = F_k \int_0^l \frac{z\,(l^m + c_1\,l^{m-1}z + c_2\,l^{m-2}\,z^2 + \ldots + c_m\,z^m)\,dz}{\delta_k\,(1 + c_1\,\delta_k + c_2\,\delta_k^2 + \ldots + c_m\,\delta_k^m)\,l^{m+1}} =$$

$$= F_k l \int_0^1 \frac{u\,(1 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_m u^m)\,du}{\delta_k\,(1 + c_1\delta_k + c_2\delta_k^2 + \ldots + c_m\delta_k^m)} = \left\{ \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,c_1 + \frac{1}{4}\,c_2 + \ldots + \frac{1}{m+2}\,c_m}{\delta_k\,(1 + c_1\,\delta_k + c_2\,\delta_k^2 + \ldots + c_m\,\delta_k^m)} \right\} F_k l =$$

$= \lambda_k F_k\,l$ hinzutreten. Die erste derselben liefert im Vereine mit der Identität
$ab\,\varphi(p, q) = F_k$ direct die jeweiligen Werthe von a und b, die zweite, welch
sich auch in der Form:

$$\left(\delta_k^2\,\lambda_k - \frac{1}{3}\right) c_1 + \left(\delta_k^3\,\lambda_k - \frac{1}{4}\right) c_2 + \ldots + \left(\delta_k^{m+1}\lambda_k - \frac{1}{m+2}\right) c_m = \frac{1}{2} - \delta_k \lambda_k$$

wiedergeben läßt, ergänzt die $m - 1$ übrigen für $c_1, c_2, \ldots c_m$ aufgestellten Be-
dingungen zu einem System von m hinsichtlich dieser Unbekannten lineare
Gleichungen, wonach wir zu folgendem Schlusse berechtigt sind[69]:

Die Relation (90) ermöglicht stets eine vollständige und ein
deutige Lösung des dritten Problems, sobald für die betreffende
Specialisirungen von $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m; \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_m$ und λ_k die Deter
minante:

[69] Der mit der Determinantentheorie noch nicht vertraute Leser dürfte sich die zum Verständnisse dies
Satzes nöthigen Vorbegriffe am raschesten durch das Studium der Broschüre: „Die Determinanten, element
behandelt" von Dr. O. Hesse (Leipzig 1871) oder des Werkchens: „Einleitung in die Theorie der Determ
nanten zum Gebrauche an Mittelschulen, sowie zum Selbstunterrichte" von Prof. E. Bartl (Prag, 1878) aneigne

$$\begin{vmatrix}
\delta_k^2\lambda_k - \frac{1}{3}, & \delta_k^3\lambda_k - \frac{1}{4}, & \delta_k^4\lambda_k - \frac{1}{5}, & \ldots & \delta_k^{m+1}\lambda_k - \frac{1}{m+2} \\
\delta_k^2 - \delta_1^2\mu_1, & \delta_k^3 - \delta_1^3\mu_1, & \delta_k^4 - \delta_1^4\mu_1, & \ldots & \delta_k^{m+1} - \delta_1^{m+1}\mu_1 \\
\delta_k^2 - \delta_2^2\mu_2, & \delta_k^3 - \delta_2^3\mu_2, & \delta_k^4 - \delta_2^4\mu_2, & \ldots & \delta_k^{m+1} - \delta_2^{m+1}\mu_2 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\delta_k^2 - \delta_{k-1}^2\mu_{k-1}, & \delta_k^3 - \delta_{k-1}^3\mu_{k-1}, & \delta_k^4 - \delta_{k-1}^4\mu_{k-1}, & \ldots & \delta_k^{m+1} - \delta_{k-1}^{m+1}\mu_{k-1} \\
\delta_k^2 - \delta_{k+1}^2\mu_{k+1}, & \delta_k^3 - \delta_{k+1}^3\mu_{k+1}, & \delta_k^4 - \delta_{k+1}^4\mu_{k+1}, & \ldots & \delta_k^{m+1} - \delta_{k+1}^{m+1}\mu_{k+1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\delta_k^2 - \delta_m^2\mu_m, & \delta_k^3 - \delta_m^3\mu_m, & \delta_k^4 - \delta_m^4\mu_m, & \ldots & \delta_k^{m+1} - \delta_m^{m+1}\mu_m
\end{vmatrix}$$

on der Nulle verschieden ausfällt, und $c_1, c_2, \ldots c_m$ der ana-
ogen Forderung:

$$1 + c_1\,\delta_k + c_2\,\delta_k^2 + \ldots + c_m\,\delta_k^m \gtrless 0$$

enügen. Zugleich geht aus diesen Betrachtungen hervor, daß, je größer m t, desto mehr Querflächen zur Bestimmung der in (90) enthaltenen arbiträren arameter erforderlich sind, an welche Wahrnehmung sich natürlich die weitere rage knüpft, ob man sich über die zur mathematischen Charakteristik einer gebenen Stammform nöthige Minimalzahl von Querflächen vielleicht uf empirischem Wege unterrichten kann. Um hierüber in's Klare zu mmen, transformiren wir die Formel (91) durch Einführung der Substitutionen:

$$m + 1 = n,$$

$$\frac{F_k}{\delta_k\,(1 + c_1\delta_k + \ldots + c_{n-1}\delta_k^{n-1})\,l} = C_1,\quad \frac{c_1\,F_k}{\delta_k\,(1 + c_1\delta_k + \ldots + c_{n-1}\delta_k^{n-1})\,l^2} = C_2,$$

$$\frac{c_2\,F_k}{\delta_k\,(1 + c_1\delta_k + \ldots + c_{n-1}\delta_k^{n-1})\,l^3} = C_3, \ldots \frac{c_{n-1}F_k}{\delta_k\,(1 + c_1\delta_k + \ldots + c_{n-1}\delta_k^{n-1})\,l^n} = C_n$$

auf:

$$(92)\ldots g = C_1\,z + C_2\,z^2 + C_3\,z^3 + \ldots + C_n\,z^n,$$

nd nehmen außerdem an, daß g speciell für $z = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ erfahrungs-
mäß die Werthe: $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ erhalten mag. Dies vorausgesetzt, verwandelt h die Gleichung (92) nach Elimination aller in ihr auftretenden Coëfficienten: $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ nunmehr in den Ausdruck:

$$g = \frac{z(z - x_2)(z - x_3)\ldots(z - x_n)}{x_1\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)}\,f_1 + \frac{z\,(z - x_1)\,(z - x_3)\ldots(z - x_n)}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)}\,f_2 + \ldots$$

$$+ \frac{z(z - x_1)\ldots(z - x_{k-1})\,(z - x_{k+1})\ldots(z - x_n)}{x_k(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}\,f_k + \ldots + \frac{z\,(z - x_1)\ldots(z - x_{n-1})}{x_n\,(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}\,f_n,$$

ns welchem schließlich für das von $z = 0$ bis $z = l$ gerechnete Volumen V des Körpers, dessen Mantelfläche durch eine Relation von der Gestalt (90) finirt werden kann, die Cubirungsformel:

$$(93)\ldots V =$$

$$= f_1\int_0^l \frac{z\,(z - x_2)\,(z - x_3)\ldots(z - x_n)}{x_1\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)}\,dz + f_2\int_0^l \frac{z\,(z - x_1)\,(z - x_3)\ldots(z - x_n)}{x_2\,(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)}\,dz +$$

$$+ \ldots + f_n\int_0^l \frac{z\,(z - x_1)\,(z - x_2)\ldots(z - x_{n-1})}{x_n\,(x_n - x_1)\,(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}\,dz$$

sultirt. Da sich nun dieselbe andererseits aus der unserer letzten Abhandlung[70] Grunde gelegten Beziehung (2) durch die Substitutionen: $x_0 = 0,\ f_0 = 0$ uch direct ableiten läßt[71], so gilt offenbar folgender Satz:

[70] „Ueber einige allgemeine für die Holzmeßkunde belangreiche Cubirungsformeln", pag. 557.

[71] Bekanntlich hat ja bei einem bestimmten Integrale die Bezeichnungsweise jener Veränderlichen, nach lcher integrirt wird, auf dessen Endwerth keinen Einfluß.

Die Inhaltsbestimmung eines bezüglich seiner Form durch (90) charakterisirten Stammes ist in derselben Weise durchführbar, wi jene eines Rotationskörpers, dessen Mantelfläche durch Drehung einer ebenen Curve von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

um die X-Achse des gewählten Coordinatensystemes erzeugt wird.

Hiemit combiniren wir jetzt noch die durch frühere Untersuchungen[72] erwiesene Thatsache, daß speciell für $f_0 = 0$ und äquidistante Querflächen $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots$ unter Voraussetzung von Meridiancurven ersten, dritten, fünften siebenten ... Grades die Formeln:

$$V = \frac{1}{2} f_1 l, V = \frac{l}{6}(4 f_1 + f_2), V = \frac{l}{90}\left\{7 f_4 + 12 f_2 + 32 (f_1 + f_3)\right\},$$

$$V = \frac{l}{840}\left\{41 f_6 + 216 (f_1 + f_5) + 27 (f_2 + f_4) + 272 f_3\right\}, \ldots$$

respective bei etwaiger Unbestimmbarkeit der Stammgrundfläche die Relationen

$$V = f_1 l, V = \frac{l}{3}\left\{2 (f_1 + f_3) - f_2\right\}, V = \frac{l}{20}\left\{11 (f_1 + f_5) + 26 f_3 - 14 (f_2 + f_4)\right\},$$

$$V = \frac{l}{945}\left\{460 (f_1 + f_7) + 2196 (f_3 + f_5) - 954 (f_2 + f_6) - 2459 f_4\right\}, \ldots$$

bestehen und erhalten dadurch zur Erledigung der angeregten Frage nachstehend Regel: Will man den irgend einem Systeme gleichartiger Stämme zugehörige Specialwerth von m finden, so bestimme man deren Volumina einerseits durc sorgfältige sectionsweise Cubirung, andererseits nach den eben angeführte Cubirungsformeln, in der Reihe derselben so weit vorschreitend, bis man z einem Ausdrucke gelangt, welcher die nach dem ersten Verfahren gefundene wahren Stamminhalte im Mittel mit hinlänglicher Genauigkei liefert. Ist dann allgemein r die Ordnungszahl der dem letztere correspondirenden Meridiancurve, so fällt m entweder mit r—1 ode r—2 zusammen, d. h. es genügen, falls gleichzeitig D_k und λ_k bekann sind, unter allen Umständen je r—1 Querflächen: $F_1, F_2, \ldots F_k \ldots F_{r-1}$ zur analytischen Beschreibung der untersuchten Stammformen wobei man natürlich der Einfachheit wegen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ unmittelba mit den in jenem Ausdrucke vorkommenden äquidistanten Querflächen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ identificiren kann.

Um endlich noch umfassendere, mit unseren ursprünglichen Annahmen verein bare Lösungen des Problems III kennen zu lernen, betrachten wir die Gleichung[73]

[72] S. h. die in unserer eben citirten Arbeit gewonnenen Gleichungen: (8) und (30); (10) und (33 (17) und (36); (20) und (37); (22) und (38); (24) und (39), deren Giltigkeitsgrenzen durch die Relationen (9 (11), (18), (21), (23) und (25) bestimmt erscheinen.

[73] Coincidiren die Functionen: $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_m$ speciell mit $1, (l^{-1} z), (l^{-1} z)^2, \ldots (l^{-1} z)$ so verwandelt sich die Relation (94) direct in (90), während sie für:

$$\delta_k = \delta, \; c_1 = \frac{1}{c}, c_2 = c_3 = \ldots = c_m = 0, \; \Psi_0 = (l^{-1} z)^{r-1}, \; \Psi_1 = (l^{-1} z)^{s-1}$$

in (73) übergeht und unter den Annahmen:

$$\delta_k = 1, \; l = h; \; c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0; \; r_0 = r_1, \; r'_0 = r_2, \ldots;$$

$$\Psi_0 \; (1, r_1, r_2, \ldots) = 1, h^{-1} z \, \Psi_0 \; (h^{-1} z, r_1, r_2, \ldots) = \Psi \; (h^{-1} z, r_1, r_2, \ldots)$$

mit der Beziehung (55) identisch wird, welche bekanntlich alle von uns untersuchten Lösungen des ersten Proble in sich begreift.

$$(94) \ldots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = Z^{\frac{pq}{p+q}},$$

welcher das rechter Hand stehende Symbol Z dem Quotienten:

$$\frac{z\,[\Psi_0\,(l^{-1}z, r_0, r'_0, \ldots) + c_1\,\Psi_1\,(l^{-1}z, r_1, r'_1, \ldots) + \ldots + c_m\,\Psi_m\,(l^{-1}z, r_m, r'_m, \ldots)]}{\delta_k\,l\,[\Psi_0\,(\delta_k, r_0, r'_0, \ldots) + c_1\,\Psi_1\,(\delta_k, r_1, r'_1, \ldots) + \ldots + c_m\,\Psi_m\,(\delta_k, r_m, r'_m, \ldots)]}$$

spricht, also neben einer Reihe arbiträrer Constanten: a, b, p, q; c_1 c_2, . c_m; r_0, r_1, ... r_m; r'_0, r'_1, ... r'_m; ... noch $m+1$ von einander ver=edene, durch die Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit von $z = o$ bis $= l$ beschränkte Functionen der Veränderlichen z: Ψ_0, Ψ_1, ... Ψ_m auftreten.

Für $z = \delta_k l$ geht Z in 1 über, wonach die Größen a, b, p, q hier gerade wie in (90) zu ermitteln sind, hingegen die Beziehung (91) mit der allgemeineren: $= F_k Z$ vertauscht werden muß. Setzen wir ferner zur größeren Uebersichtlichkeit:

$$(95) \ldots \delta_k\,\Psi_s\,(\delta_k, r_s, r'_s, \ldots) - \delta_u\,\mu_u\,\Psi_s\,(\delta_u, r_s, r'_s, \ldots) = P_s\,(u),$$

treten an die Stelle der $m-1$ ersten für c_1, c_2, ... c_m früher aufgestellten entitäten in diesem Falle die folgenden:

$$\begin{array}{c}
c_1\,P_1\,(1) + c_2\,P_2\,(1) + \ldots + c_m\,P_m\,(1) = -P_0\,(1),\\
c_1\,P_1\,(2) + c_2\,P_2\,(2) + \ldots + c_m\,P_m\,(2) = -P_0\,(2),\\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
c_1\,P_1\,(k-1) + c_2\,P_2\,(k-1) + \ldots + c_m\,P_m\,(k-1) = -P_0\,(k-1),\\
c_1\,P_1\,(k+1) + c_2\,P_2\,(k+1) + \ldots + c_m\,P_m\,(k+1) = -P_0\,(k+1),\\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
c_1\,P_1\,(m) + c_2\,P_2\,(m) + \ldots + c_m\,P_m\,(m) = -P_0\,(m),
\end{array}$$

hrend das $(m+2)$te in III enthaltene Postulat: $\int\limits_0^l g\,dz = \lambda_k\,F_k\,l$ nach Ein=rung der Abkürzung:

$$(96) \ldots \delta_k\,\lambda_k\,\Psi_s\,(\delta_k, r_s, r'_s, \ldots) - \int\limits_0^1 u\,\Psi_s\,(u, r_s, r'_s, \ldots)\,du = \gamma_s$$

Relation: $\gamma_1\,c_1 + \gamma_2\,c_2 + \ldots + \gamma_m\,c_m = -\gamma_0$ bedingt. Sobald wir mach über die bisher unbestimmt gebliebenen Functionen: Ψ_0, Ψ_1, ... Ψ_m und Größen: r_0, r_1, ... r_m; r'_0, r'_1, ... r'_m; ... derart verfügen, daß die von c_2, ... c_m gänzlich unabhängigen Ausdrücke: γ_0, γ_1, ... γ_m; $P_0\,(1)$, $P_1\,(1)$, $P_m\,(1)$; $P_0\,(2)$, $P_1\,(2)$, ... $P_m\,(2)$; ... $P_0\,(m)$, $P_1\,(m)$, ... $P_m\,(m)$ die den Forderungen:

$$(97) \ldots \begin{vmatrix}
\gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \ldots & \gamma_m\\
P_1\,(1), & P_2\,(1), & P_3\,(1), & \ldots & P_m\,(1)\\
P_1\,(2), & P_2\,(2), & P_3\,(2), & \ldots & P_m\,(2)\\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots\\
P_1\,(k-1), & P_2\,(k-1), & P_3\,(k-1), & \ldots & P_m\,(k-1)\\
P_1\,(k+1), & P_2\,(k+1), & P_3\,(k+1), & \ldots & P_m\,(k+1)\\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots\\
P_1\,(m), & P_2\,(m), & P_3\,(m), & \ldots & P_m\,(m)
\end{vmatrix} \lesseqgtr 0$$

) ... $\Psi_0\,(\delta_k, r_0, r'_0, \ldots) + c_1\,\Psi_1\,(\delta_k, r_1, r'_1, \ldots) + c_2\,\Psi_2\,(\delta_k, r_2, r'_2, \ldots) + \ldots + c_m\,\Psi_m\,(\delta_k, r_m, r'_m, \ldots) \lesseqgtr 0$ erfüllen, lassen sich die $m+2$ übrigen 94) aufgenommenen Constanten: a, b, p, q; c_1, c_2, ... c_m jederzeit ein=ig feststellen, d. h.: Das Problem III gestattet analog wie die unter das= als einfache Specialfälle subsumirbaren Aufgaben I und II unendlich

viele vollständige Lösungen, indem $\Psi_0, \Psi_1, \ldots \Psi_m; r_0, r_1, \ldots r_m; r'_0, r'_1 \ldots r'_m; \ldots$ auf unendlich viele Arten den beiden Bedingungen (97) und (98 angepaßt werden können.

Es ließe sich also — unter $D'_k, D''_k; \lambda'_k, \lambda''_k; F'_1\, F''_1; F'_2, F''_2; \ldots F'_m$, F die einander correspondirenden Specialwerthe der Größen $D_k, \lambda_k, F_1, F_2, \ldots F$ für zwei beliebige, derselben Holzart angehörige Stämme von gleicher Achsenlänge verstanden — auf Grundlage der Identitäten:

$$D'_k = D''_k,\ \lambda'_k = \lambda''_k,\ F'_1 = F''_1,\ F'_2 = F''_2, \ldots F'_m = F''_m$$

für keine noch so große endliche Anzahl paarweise übereinstimmende Querflächen mit mathematischer Sicherheit behaupten, daß demzufolg auch den Mantelflächen dieser Stämme genau dieselben Formen zu kommen müßten.

Eine dritte, ebenso wichtige Consequenz der Gleichung (94) ergibt si schließlich auf folgendem Wege: Wir dividiren die beiden durch partielle Differen tiation von (94) nach x und y ableitbaren Formeln:

$$\frac{p\,x^{p-1}}{a^p} = \frac{p\,q\,Z^{\frac{pq}{p+q}-1}}{p+q}\frac{d\,Z}{d\,z}\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{q\,y^{q-1}}{b^q} = \frac{p\,q\,Z^{\frac{pq}{p+q}-1}}{p+q}\frac{d\,Z}{d\,z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

durch einander und differentiiren das erhaltene Resultat:

$$(99) \ldots p\,b^q\,x^{p-1}\frac{\partial z}{\partial y} = q\,a^p\,y^{q-1}\frac{\partial z}{\partial x}$$

abermals partiell nach denselben Variabelen, wodurch wir zu den Relationen

$$p\,b^q\,x^{p-1}\left\{\frac{p-1}{x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right\} = q\,a^p\,y^{q-1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$p\,b^q\,x^{p-1}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = q\,a^p\,y^{q-1}\left\{\frac{q-1}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right\}$$

gelangen. Die Multiplication der ersten mit $\frac{\partial z}{\partial y}$, der zweiten mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ liefert da mit Rücksicht auf (99) die beiden neuen Beziehungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{p-1}{x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{q-1}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

aus welchen nach Elimination von $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ die merkwürdige Identität:

$$(100) \ldots \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{p-1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{q-1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

hervorgeht, d. h.: Die Gleichungen aller in dieser Arbeit besprochen Flächen sind particuläre Integrale einer und derselben partiell Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welche außer den Größ p, q keine anderweitigen arbiträren Constanten enthält.

Nachdem hiemit die Hauptfragen unserer Abhandlung eingehend erört worden sind, erscheint es angemessen, ihr Verhältniß zu den bisherigen math matischen Anschauungsweisen über Stammformen noch mit wenigen Wor zu kennzeichnen.

Anstatt nämlich, wie dies bisher geschah, die Stämme a priori als th weise mit Paraboloiden, Kreiskegeln und Neiloiden vergleichbare Rotationskör

ufehen[74], stützen wir uns in den vorliegenden Untersuchungen in erster Linie eine Reihe rein empirischer Daten, die sich durch die Ermittlung der rmzahlen, Höhen und gewisser Querflächen der betrachteten Stämme ect gewinnen lassen. Die analytische Verknüpfung dieser für ihre jeweiligen ntelflächen charakteristischen Angaben führt dann unter drei allgemeinen in Einleitung mitgetheilten Voraussetzungen stets auf Relationen zwischen drei änderlichen Coordinaten x, y, z, welche verschiedene mögliche Definitionen er Mantelflächen vorstellen, jedoch in mathematischer Hinsicht zumeist sehr nplicirt gestaltet sind. Auf diese Art ergibt sich von selbst die weitere Forderung, jedem gegebenen Falle aus den verschiedenen vollständigen Lösungen des tellten Problems die einfachste auszuwählen, wodurch nunmehr eindeutige ledigungen der hier behandelten Fragen möglich werden.

Hiebei enthalten sämmtliche auf die letzteren bezügliche Flächengleichungen, bekanntlich die Stammhöhen und Stammquerflächen für verschiedene Holzalter schiedene Werthe annehmen, mindestens je drei von der Zeit t abhängige rameter und definiren insoferne den Stamm des Baumes als ein bilde, dessen Mantelfläche innerhalb bestimmter Zeitabschnitte eine ihe analytisch charakterisirbarer Formen stetig durchläuft. Sie anlassen demnach im Verein mit der fundamentalen Beziehung (100) schließ- einerseits die zum Theil in die analytische Mechanik einschlägige Frage, ob artige Gebilde aus den Elementen der Materie nicht vielleicht r unter der Annahme von mit der Zeit t variirenden Kräften aufbaut werden können, andererseits die Aufstellung neuer Gesichtspunkte für Construction von Massentafeln und verschiedene praktisch wichtige Probleme forstlichen Zuwachslehre, welche wir in späteren Arbeiten eingehend darlegen rden.

[74] Die gleichfalls hieher gehörige Annahme, daß die Mantelflächen der Stämme speciell durch Curven der allgemeinen Gleichung $y^2 = p\,x^r$ erzeugbare Rotationsflächen seien [vergl. hiemit unsere zweite Folge- aus der Relation (31)], ist am eingehendsten von Herrn Th. Gelinek, königl. ungar. Forsttaxator, rsucht worden, indem derselbe alle den Formzahlen: $\lambda = 0{\cdot}25,\ 0{\cdot}26,\ 0{\cdot}27, \ldots 0{\cdot}58,\ 0{\cdot}59,\ 0{\cdot}60$ entsprechenden cialisirungen von r auf drei Decimalstellen angibt und außerdem auf Grundlage dieser Resultate ein ein- s Verfahren zur graphischen Darstellung gewisser Stammformen entwickelt. — S. h. dessen lesenswerthe andlung „A fatörzsek ábrázolása és azok alakszámainak egyenletei" (erschienen 1876 im Mai-Hefte (pag. -266) und Juni-Hefte (pag. 333—338) der forstlichen Zeitschrift: „Erdészeti Lapok"), deren Veröffentlichung eutscher Sprache im Interesse der Sache sehr erwünscht wäre.

K. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme in Wien.

Centralblatt

für das gesammte Forstwesen.

Redigirt von Oberlandforstmeister A. Micklitz und Professor G. Hempel.

Verlag von Faesy & Frick, k. k. Hofbuchhandlung.

Heft 11. Erscheint jeden Monat. **Wien, November 1876.** Halbjährig fl. 4.--, mit Postversendung fl. 4.25. II. Jahrg.

Separat-Abdruck.

Ueber einige allgemeine für die Holzmeßkunde belangreiche Cubirungsformeln.

Von

Dr. Oscar Simony.

Zu den zahlreichen, einer rein analytischen Behandlungsweise fähigen Problemen der Holzmeßkunde gehört in erster Linie jenes der näherungsweisen Cubirung gegebener Stämme, welches bereits seine eigene, allerdings vielfach in Reproductionen schon früher gefundener geometrischer Sätze sich bewegende Literatur aufzuweisen hat. Dessenungeachtet wurde bisher noch keine Formel abgeleitet, welche dieses Problem unter den allgemeinsten, mit einer einfachen Lösung desselben vereinbaren Voraussetzungen erledigt hätte, so daß die vorliegenden Betrachtungen zunächst insoferne beachtenswerth sein dürften, als sie mit der Ableitung einer derartigen Cubirungsformel unter folgenden Annahmen beginnen:

1. Der zu cubirende Baumschaft muß in jedem gegebenen Falle so geformt sein, daß seine Oberfläche näherungsweise durch Drehung einer bestimmten ebenen Curve um eine geradlinige Rotationsachse erhalten werden kann.

2. Betrachtet man die letztere als Abscissenachse eines rechtwinkeligen zweiachsigen Coordinatensystems und ihren Durchschnittspunkt mit einer der beiden Grundflächen des Baumschaftes als Ursprung, so muß diese Curve durch eine Gleichung von der Gestalt: $F(x, y, a_1, a_2, a_3, \ldots) = 0$ analytisch definirbar sein, wobei x, y die Coordinaten irgend eines Curvenpunktes, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gewisse constante Größen vorstellen.

3. Die Auflösung dieser Relation nach y^2 muß entweder unmittelba auf ein Resultat von der Form:

$$y^2 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n \qquad (1)$$

führen oder wenigstens unter Anwendung des Satzes von Mac Laurin fü y^2 eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende convergente Reihe liefer in welcher alle auf $A_n x^n$ folgende Glieder: $A_{n+1} x^{n+1}, A_{n+2} x^{n+2}$ ꝛc. oh merklichen Fehler vernachlässigt werden dürfen.

4. Der Baumschaft muß endlich so gestaltet sein, daß sich im Allgemein $n+1$ zur Stammachse senkrecht gelegene Querschnittsflächen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ f deren Abscissen der Reihe nach mit $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet werden möge hinlänglich genau auf empirischem Wege bestimmen lassen.

Dies vorausgeschickt, besteht also unsere erste in dieser Abhandlung z lösende Aufgabe darin, das Volumen V jenes Rotationskörpers zu finden, dess Meridiancurve durch die Beziehung (1) charakterisirt wird, sobald außer d Größen $f_0, f_1, f_2, \ldots f_n$; $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ auch die Distanz l seiner beiden En flächen gegeben erscheint.

Indem wir zu diesem Zwecke vor Allem die $n+1$ durch das vie Postulat bedingten Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= (A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_0^2 + A_3 x_0^3 + \ldots + A_n x_0^n)\,\pi \\ f_1 &= (A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3 + \ldots + A_n x_1^n)\,\pi \\ &\quad\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= (A_0 + A_1 x_n + A_2 x_n^2 + A_3 x_n^3 + \ldots + A_n x_n^n)\,\pi \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

nach $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ auflösen und die hiebei gewonnenen Werthe dieser Co stanten in (1) substituiren, erhalten wir nach beiderseitiger Multiplication mit mit Rücksicht auf die bekannte Interpolationsformel von Lagrange direct d Gleichung:

$$y^2\pi = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} f_1 +$$

$$+ \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n-1})(x_k-x_n)} f_k +$$

$$+ \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} f_n,$$ d. h. für die fragliche Unbekannt $V = \int_0^l y^2\pi\,dx$ offenbar den Ausdruck:

$$(2) \qquad V =$$

$$= f_0 \int_0^l \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\,dx + f_1 \int_0^l \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\,dx +$$

$$+ \ldots + f_k \int_0^l \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n-1})(x_k-x_n)}\,dx +$$

$$+ \ldots + f_n \int_0^l \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\,dx,$$

welcher zugleich das Eingangs erwähnte Problem in der gewünschten Allgemei heit erledigt. Daß derselbe übrigens in analytischer Hinsicht auch die zweite v

s geforderte Eigenschaft der Einfachheit in hohem Grade besitzt, ist leicht ein-
sehen. Denn da die Nenner aller in (2) auftretenden Differentialfactoren von
unabhängig sind, so liefert jeder der letzteren nach Ausführung der betreffen-
n Multiplicationen ein bezüglich x rationales ganzes Polynom nten Grades,
lches unter Anwendung der bekannten Formel:

$$\int_0^1 x^a\, dx = \left| \frac{x^{a+1}}{a+1} \right|_0^1 = \frac{1^{a+1}}{a+1}$$

ts ohne Schwierigkeit zwischen den Grenzen o und l integrirt werden kann
d sich, falls für $x_0, x_1, \ldots x_n$ bestimmte numerische Angaben vorliegen, zuletzt
f eine reelle, positive oder negative Zahl reducirt. Nur die praktische Brauch-
rkeit des Resultates (2) ist insoferne eine geringe zu nennen, als die zahl-
chen mit der Berechnung der Coëfficienten von f_0, f_1, $f_2, \ldots f_n$ verbundenen
gebraischen Multiplicationen viel Zeit beanspruchen, so daß der Gedanke
heliegt, dieselben durch eine speciellere Formulirung unserer anfänglichen Vor-
ssetzungen wenigstens so viel als möglich abzukürzen. — Am geeignetsten er-
eint hiezu unbedingt die in denselben als ein besonderer Fall enthaltene
ypothese, daß speciell die den Abscissen: $x_0 = o$, $x_1 = \frac{l}{n}$, $x_2 = \frac{2l}{n}$
$= \frac{3l}{n}, \ldots x_n = l$ entsprechenden Querschnittsflächen einer hinlänglich genauen
pirischen Messung zugänglich seien, mithin $f_0, f_1, f_2 \ldots f_n$ ein System von
+ 1 äquidistanten Querflächen bilden.

Unter dieser Annahme verwandeln sich nämlich die Quotienten:

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\ldots(x_0 - x_n)}, \quad \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)}$$

$$\ldots \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_{n-1})(x_k - x_n)} \ldots$$

ch Einführung der provisorischen Abkürzungen:

$= \delta$, $x(x - \delta)(x - 2\delta)(x - 3\delta)\ldots(x - n\delta) = X$ der Reihe nach in die
sdrücke:

$$\frac{(x - \delta)(x - 2\delta)(x - 3\delta)\ldots(x - n\delta)}{(-\delta)(-2\delta)(-3\delta)\ldots(-n\delta)} = \frac{(-1)^n}{n!\,\delta^n}\left(\frac{X}{x}\right),$$

$$\frac{x(x - 2\delta)(x - 3\delta)\ldots(x - n\delta)}{(\delta)(-\delta)(-2\delta)\ldots(-[n-1]\delta)} = \frac{(-1)^{n-1}}{1!(n-1)!\,\delta^n}\left(\frac{X}{x - \delta}\right),$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

$$\frac{x(x - \delta)(x - 2\delta)\ldots(x - [k-1]\delta)(x - [k+1]\delta)\ldots(x - [n-1]\delta)(x - n\delta)}{(k\delta)([k-1]\delta)([k-2]\delta)\ldots(\delta)(-\delta)\ldots(-[n-k-1]\delta)(-[n-k]\delta)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!\,\delta^n}\left(\frac{X}{x - k\delta}\right), \text{ic.},$$

ren Substitution in (2) augenscheinlich auf die Formel:

$$= \frac{1}{\delta^n}\left\{\frac{(-1)^n f_0}{n!}\int_0^1 \frac{X\,dx}{x} + \frac{(-1)^{n-1} f_1}{1!(n-1)!}\int_0^1 \frac{X\,dx}{x - \delta} + \frac{(-1)^{n-2} f_2}{2!(n-2)!}\int_0^1 \frac{X\,dx}{x - 2\delta} + \ldots\right.$$

$$\left. \frac{(-1)^{n-k} f_k}{k!(n-k)!}\int_0^1 \frac{X\,dx}{x - k\delta} + \ldots - \frac{f_{n-1}}{(n-1)!\,1!}\int_0^1 \frac{X\,dx}{x - (n-1)\delta} + \frac{f_n}{n!}\int_0^1 \frac{X\,dx}{x - n\delta}\right\} \quad (3)$$

führt, also eine wesentliche Vereinfachung unseres ursprünglichen Ergebnisse bedingt. Ersetzen wir dann noch in (3) x mittelst der Gleichung: $x = \delta u$ durc eine neue Veränderliche u und bezeichnen das Product:

$$u(u-1)(u-2)(u-3)\ldots(u-n+1)(u-n) \qquad (4)$$

kurz mit $F(n, u)$, so ergibt sich nach der hiemit verbundenen Umänderung de sämmtlichen Integralen gemeinsamen oberen Grenze l in n und einigen andere leichten Reductionen schließlich die Relation:

$$V = \frac{l}{n}\Bigg\{\frac{(-1)^n f_o}{n!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{u} + \frac{(-1)^{n-1} f_1}{1!(n-1)!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{u-1} + \frac{(-1)^{n-2} f_2}{2!(n-2)!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{u-2} +$$

$$+ \ldots + \frac{(-1)^{n-k} f_k}{k!(n-k)!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{u-k} + \ldots - \frac{f_{n-1}}{(n-1)!\,1!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{u-n+1} + \frac{f_n}{n!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{u-n}\Bigg\} =$$

$$= \frac{l}{n}\sum_{k=o}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k} f_k}{k!(n-k)!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{u-k}. \qquad (5)$$

Dieselbe gestattet, da die Factoren von $lf_0, lf_1, lf_2, \ldots lf_k, \ldots lf_n$ nur mit de Ordnungszahl n der Erzeugungscurve der Mantelfläche des gegebenen Rotations körpers variirende Coëfficienten:

$$\alpha_o = \frac{(-1)^n}{n!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{nu}, \alpha_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{1!(n-1)!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{n(u-1)}, \alpha_2 = \frac{(-1)^{n-2}}{2!(n-2)!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{n(u-2)}$$

$$\ldots \alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{n(u-k)}, \ldots \alpha_n = \frac{1}{n!}\int_o^n \frac{F(n,u)\,du}{n(u-n)}$$

repräsentiren, jederzeit die Darstellungsweise: [1]

$$V = l\{\alpha_o f_o + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k + \ldots + \alpha_n f_n\} \qquad (6)$$

und berechtigt uns außerdem bezüglich $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ folgenden interessante Lehrsatz auszusprechen: Besteht für das von $x = o$ bis $x = l$ gerechnet Volumen V irgend eines Rotationskörpers, dessen Oberfläche dur Drehung einer Curve von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_k x^k \qquad (7)$$

um die Abscissenaxe des gewählten Coordinatensystems erzeug werden kann, eine Formel von der Gestalt (6), so erfüllen die Con stanten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ stets die $k+1$ Bedingungen:

[1] Dasselbe Endresultat liefert nach Einführung der hier gewählten Symbolik die von Profess M. Kunze (Tharander forstliches Jahrbuch, 19. Band, 3. Heft, pag. 251, Lehrbuch der Holzmeßkunst, 2. Au gabe, pag. 77) aufgestellte Reihe:

$$V = \int_o^{nh} G_x\,dx = G_o\int_o^{nh} dx + \Delta G_o \int_o^{nh} \frac{x}{h}\,dx + \frac{\Delta^2 G_o}{1.2}\int_o^{nh} \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)dx + \ldots,$$

sobald wir bei ihrer Berechnung noch das (n+1)te Glied:

$$\frac{\Delta^n G_o}{1.2.3\ldots n}\int_o^{nh} \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-n+1\right)dx$$

berücksichtigen. Da jedoch die auf diesem Wege für V ableitbare Formel:

$$V = \frac{l}{n}\Bigg\{f_o\int_o^n du + \Delta f_o \int_o^n u\,du + \frac{\Delta^2 f_o}{1.2}\int_o^n u(u-1)\,du + \frac{\Delta^3 f_o}{1.2.3}\int_o^n u(u-1)(u-2)\,du +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta^n f_o}{1.2\,3\ldots n}\int_o^n u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)\,du\Bigg\}$$

keine directe Bestimmung der Coëfficienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gestattet, so ist ihr theoretischer Werth ungle geringer als jener der Gleichung (5).

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{p=o}^{p=n} \alpha_p = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 1,\\
&\sum_{p=1}^{p=n} p\,\alpha_p = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + (n-1)\,\alpha_{n-1} + n\,\alpha_n = \frac{n}{2}\\
&\sum_{p=1}^{p=n} p^2\alpha_p = \alpha_1 + 2^2\alpha_2 + 3^2\alpha_3 + \ldots + (n-1)^2\alpha_{n-1} + n^2\alpha_n = \frac{n^2}{3},\\
&\sum_{p=1}^{p=n} p^3\alpha_p = \alpha_1 + 2^3\alpha_2 + 3^3\alpha_3 + \ldots + (n-1)^3\alpha_{n-1} + n^3\alpha_n = \frac{n^3}{4},\\
&\quad\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\\
&\sum_{p=1}^{p=n} p^k\alpha_p = \alpha_1 + 2^k\alpha_2 + 3^k\alpha_3 + \ldots + (n-1)^k\alpha_{n-1} + n^k\alpha_n = \frac{n^k}{k+1}
\end{aligned}\right\}(B)$$

Denn die Beziehung (6) muß in Hinblick auf die Relation (7) und die aus letzteren hervorgehenden Identitäten:

$$\left.\begin{aligned}
&f_o = A_o\pi,\ f_1 = (A_o + A_1\,\delta + A_2\,\delta^2 + A_3\,\delta^3 + \ldots + A_k\,\delta^k)\,\pi,\\
&f_2 = (A_o + 2A_1\,\delta + 2^2A_2\,\delta^2 + 2^3A_3\,\delta^3 + \ldots + 2^kA_k\,\delta^k)\,\pi,\\
&\ldots\ldots\\
&f_n = (A_o + n\,A_1\,\delta + n^2A_2\,\delta^2 + n^3A_3\,\delta^3 + \ldots + n^kA_k\,\delta^k)\,\pi
\end{aligned}\right\}(C)$$

genden zwei Ausdrücken:

$$y^2\pi\,dx = \pi l\left\{A_o + \frac{1}{2}A_1\,l + \frac{1}{3}A_2\,l^2 + \frac{1}{4}A_3\,l^3 + \ldots + \frac{1}{k+1}A_k\,l^k\right\} =$$

$$= \pi l\left\{A_o + \frac{n}{2}A_1\,\delta + \frac{n^2}{3}A_2\,\delta^2 + \frac{n^3}{4}A_3\,\delta^3 + \ldots + \frac{n^k}{k+1}A_k\,\delta^k\right\},$$

$$\begin{aligned}
&\pi l\{\alpha_o\,A_o + \alpha_1\,(A_o + A_1\,\delta + A_2\,\delta^2 + A_3\,\delta^3 + \ldots + A_k\,\delta^k) +\\
&+ \alpha_2\,(A_o + 2\,A_1\,\delta + 2^2A_2\,\delta^2 + 2^3A_3\,\delta^3 + \ldots + 2^kA_k\,\delta^k) + \ldots\\
&+ \alpha_n\,(A_o + n\,A_1\,\delta + n^2A_2\,\delta^2 + n^3A_3\,\delta^3 + \ldots + n^kA_k\,\delta^k)\} =\\
&= \pi\,l\,\{(\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\,A_o + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\,\alpha_n)\,A_1\,\delta +\\
&(\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \ldots + n^2\alpha_n)\,A_2\,\delta^2 + (\alpha_1 + 2^3\alpha_2 + \ldots + n^3\alpha_n)\,A_3\,\delta^3 + \ldots,\\
&+ (\alpha_1 + 2^k\alpha_2 + \ldots + n^k\alpha_n)\,A_k\,\delta^k\}
\end{aligned}$$

ichzeitig äquivalent sein, was augenscheinlich nur dann der Fall ist, wenn beiderseitigen Coëfficienten von A_o, $A_1\,\delta$, $A_2\,\delta^2$, $A_3\,\delta^3$, ... $A_k\,\delta^k$ miteinander ncidiren.

Nachdem wir so die wichtigsten allgemeinen Consequenzen der Formel genügend erörtert haben, erwächst uns nunmehr die Aufgabe, auch noch die Substitutionen: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ entsprechenden Specialisirungen (5) in Kürze zu betrachten, weil dieselben in Folge ihrer Einfachheit zugleich größten praktischen Werth besitzen. — Um jedoch möglichst übersichtlich zu , wollen wir uns hiebei folgender schematischen Darstellungsweise bedienen:

Erster Specialfall: $n = 1$.

$$,u) = u^2 - u,\ \int_o^1 \frac{F(1,u)\,du}{u} = \left|u\left(\frac{u}{2} - 1\right)\right|_o^1 = -\frac{1}{2},\ \int_o^1 \frac{F(1,u)\,du}{u-1} = \left|\frac{u^2}{2}\right|_o^1 = \frac{1}{2},\ \alpha_o = \alpha_1 = \frac{1}{2}.$$

$$V = l\,(\alpha_o\,f_o + \alpha_1\,f_1) = \frac{1}{2}(f_o + f_1) \qquad (8)$$

Diese Formel[2] gilt, da α_0, α_1 offenbar auch die Bedingung: $\alpha_0 + \alpha_1 =$ erfüllen, zufolge unseres letzten Lehrsatzes für alle Rotationskörper, deren B grenzungsflächen sich in der bereits früher besprochenen Weise durch Curven v der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1 x = A_1 \left(x + \frac{A_0}{A_1}\right) \qquad (9)$$

erzeugen lassen, bildet also nur den analytischen Ausdruck des bekannten Satz Das Volumen jedes abgestumpften Rotationsparaboloides ist gleich dem P ducte aus seiner Höhe in die halbe Summe seiner beiden Endflächen.[3]

Zweiter Specialfall: $n = 2$.

$$F(2, u) = u^3 - 3u^2 + 2u, \int_0^2 \frac{F(2,u)\,du}{u} = \Big| u\left(\frac{u^2}{3} - \frac{3u}{2} + 2\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}, \alpha_0 = $$

$$\int_0^2 \frac{F(2,u)\,du}{u-1} = \Big|u^2\left(\frac{u}{3} - 1\right)\Big|_0^2 = -\frac{4}{3}, \alpha_1 = \frac{2}{3}; \int_0^2 \frac{F(2,u)\,du}{u-2} = \Big|u^2\left(\frac{u}{3} - \frac{1}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = $$

$$V = l\,(\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \frac{1}{6}\,(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad (10)$$

Da α_0, α_1, α_2 gleichzeitig den vier Bedingungen: $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 + 2\alpha_2 =$ $\alpha_1 + 2^2\,\alpha_2 = \frac{4}{3}$, $\alpha_1 + 2^3\,\alpha_2 = 2$ genügen, so lassen sich nach dieser Form alle jene Rotationskörper cubiren, deren Oberflächen durch Meridiancurven der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + A_3\,x^3 \qquad (11)$$

charakterisirt werden können.[5] Die Relation (10) gilt daher unter Anderem a für den geraden Kreiskegel, die Kugel, das Rotations-Ellipsoid, das einfache getheilte Rotations-Hyperboloid, das Rotations-Paraboloid und Neiloid, wie namentlich von Dr. Fr. Riecke sehr eingehend dargethan worden ist.[6] — gleich muß erwähnt werden, daß dieselbe unter gewissen die Constanten A_0, A_2, A_3 betreffenden Annahmen noch weitere Umformungen gestattet, wofür we stens folgende zwei Beispiele einen Beleg liefern mögen:

a) Es sei $A_1^2 - 4A_0 A_2 = 0$, $A_3 = 0$, folglich die diesen Voraussetzun entsprechende Specialform von (11):

$$y^2 = A_0 + 2x\sqrt{A_0 A_2} + A_2 x^2 = (\sqrt{A_0} + x\sqrt{A_2})^2, \text{oder:}\ y = \pm(\sqrt{A_0} + x\sqrt{A_2}).$$

---

[2] Führen wir in (8) die Radien R und r von f_0 und f_1 ein und machen von der identischen Glei $\frac{R^2 + r^2}{2} = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2$ Gebrauch, so liefert (8) noch die weitere Relation $V = \pi\, l \left(\frac{R+}{2}\right.$ $+ \pi\, l \left(\frac{R-r}{2}\right)^2$, welche zuerst von L. Smalian (Hartig's Journal für das Forst-, Jagd- und Fischerei vom Jahre 1806, Nr. 32) in die Holzmeßkunde eingeführt wurde.

[3] Siehe hierüber z. B. Dr. G. König's Forst-Mathematik, 5. Auflage, pag. 307 und 308; M. Kunze's Lehrbuch der Holzmeßkunst, 2. Ausgabe, pag. 32 und 33; Dr. Fr. Baur's Holzmeßkunst, 2 lage, pag. 44 und 45 ꝛc.

[4] Für $f_2 = 0$ folgt hieraus die speciellere Formel: $V = \frac{1}{6}\,(f_0 + 4f_1)$, welche zuerst in Behlen' gemeiner Forst- und Jagd-Zeitung, 6. Jahrgang, Nr. 77 zur Bestimmung des Inhaltes unentwipfelter St empfohlen wurde.

[5] Vergleiche hiemit den Beweis Kunze's in dessen Lehrbuch der Holzmeßkunst pag. 79.

[6] Siehe hierüber die im Jahre 1849 in Stuttgart erschienene Abhandlung Riecke's: „Ueb Berechnung des körperlichen Inhaltes unbeschlagener Baumstämme", pag. 6, 15 und 62.

Indem wir mit Hilfe der aus (12) hervorgehenden Identitäten: $\sqrt{A_0} = \left(\frac{f_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$, $_0 + l\sqrt{A_2} = \left(\frac{f_2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ in (10) das Glied: $4f_1 = 4(\sqrt{A_0} + \frac{1}{2}\sqrt{A_2})^2\pi$ durch Ausdruck:

$$4f_1 = (2\sqrt{A_0} + l\sqrt{A_2})^2\pi = (\sqrt{f_0} + \sqrt{f_2})^2 = f_0 + 2\sqrt{f_0 f_2} + f_2$$

zen, erhalten wir zur Bestimmung von V direct die Gleichung:[7]

$$V = \frac{1}{3}(f_0 + \sqrt{f_0 f_2} + f_2) = \frac{\pi l}{3}(R^2 + Rr + r^2), \qquad (13)$$

he gemäß dieser Ableitung selbstverständlich nur auf den abgestutzten geraden skegel ihre Anwendung findet.

b) Es sei zweitens $A_1^3 - 27A_0^2A_3 = o, A_2^3 - 27A_0A_3^2 = o$, resp. $A_1 = 3\sqrt[3]{A_0^2A_3}$, $= 3\sqrt[3]{A_0A_3^2}$, mithin durch die diesen Substitutionen correspondirende Transationsgleichung von (11):

$$= A_0 + 3x\sqrt[3]{A_0^2A_3} + 3x^2\sqrt[3]{A_0A_3^2} + A_3x^3 = (\sqrt[3]{A_0} + x\sqrt[3]{A_3})^3 \qquad (14)$$

von der Abscissenachse in zwei congruente Zweige getheilte semicubische Parabel nnzeichnet, deren Spitze vom Ursprunge der Coordinaten den Abstand: $= -\left(\frac{A_0}{A_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ besitzt. In diesem Falle folgt aus (14) zunächst:

$_0 = \left(\frac{f_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{A_0} + l\sqrt[3]{A_3} = \left(\frac{f_2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$, also für $4f_1 = 4\left(\sqrt[3]{A_0} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{A_3}\right)^3\pi$ Beziehung:

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt[3]{A_0} + l\sqrt[3]{A_3})^3\pi = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{f_0} + \sqrt[3]{f_2})^3 = \frac{1}{2}(f_0 + 3\sqrt[3]{f_0^2f_2} + 3\sqrt[3]{f_0f_2^2} + f_2),$$

aß sich für V schließlich das Resultat:[8]

$$\frac{1}{4}(f_0 + \sqrt[3]{f_0^2f_2} + \sqrt[3]{f_0f_2^2} + f_2) = \frac{\pi l}{4}\{R^2 + r^2 + (\sqrt[3]{R^2} + \sqrt[3]{r^2})\sqrt[3]{R^2r^2}\} \qquad (15)$$

bt, sobald wir wieder, wie in (13), die Radien der Flächen f_0 und f_2 R und r bezeichnen.[9]

Dritter Specialfall: n = 3.

$$, u) = u^4 - 6u^3 + 11u^2 - 6u, \int_0^3 \frac{F(3,u)du}{u} = \left| u\left(\frac{u^3}{4} - 2u^2 + \frac{11u}{2} - 6\right)\right|_0^3 = -\frac{9}{4},$$

$$\frac{F(3,u)\,du}{u-1} = \left|u^2\left(\frac{u^2}{4} - \frac{5u}{3} + 3\right)\right|_0^3 = \frac{9}{4}, \int_0^3 \frac{F(3,u)\,du}{u-2} = \left|u^2\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4u}{3} + \frac{3}{2}\right)\right|_0^3 = -\frac{9}{4},$$

[7] Dieselbe erhält, wenn wir außerdem noch die Gleichung: $R^2 + Rr + r^2 = 3\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2$ ver-ren, die Gestalt: $V = \pi l\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\pi l\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$, in welcher sie besonders von W. Hoßfeld (siehe 1812 in Leipzig erschienenes Werk: Niedere und höhere praktische Stereometrie oder kurze und leichte ssung und Berechnung aller regel- und unregelmäßigen Körper 2c.) zur Cubirung von Baumschäften hlen wurde.

[8] Da allgemein $(\sqrt[3]{R^2} + \sqrt[3]{r^2})\sqrt[3]{R^2r^2} = (\sqrt[3]{R^2r} - \sqrt[3]{Rr^2})^2 + 2Rr$ ist, so erlaubt dasselbe auch die Schreib-ise $V = \pi l\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi l\left(\frac{\sqrt[3]{R^2r} - \sqrt[3]{Rr^2}}{2}\right)^2$, worauf schon Riecke in seiner zuvor erwähnten Abhandlung, 3 und 14, hingewiesen hat.

[9] Der Vollständigkeit wegen sei hiezu noch bemerkt, daß die Formeln (8), (13) und (15) für r = o in

$$V = \frac{f_0 l}{2}, \; V = \frac{R^2\pi l}{3} = \frac{f_0 l}{3}, \; V = \frac{R^2\pi l}{4} = \frac{f_0 l}{4}$$

erhen und so unmittelbar die bekannten Ausdrücke für die Volumina eines Paraboloides, Kreiskegels eiloides von gleicher Grundfläche f_0 und gleicher Achsenlänge l liefern.

$$\int_0^3 \frac{F(3,u)\,du}{u-3} = \left| u^2\left(\frac{u^2}{4} - u + 1\right)\right|_0^3 = \frac{9}{4}, \alpha_0 = \alpha_3 = \frac{1}{8}, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{8}, \text{ also:}$$

$$V = l\,(\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3) = \frac{1}{8}\left\{(f_0 + f_3) + 3(f_1 + f_2)\right\} \qquad (1$$

Diese Formel [10] gilt, da von den Größen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ abermals nur vi Bedingungen: $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = \frac{3}{2}$, $\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + 3^2\alpha_3 =$ $\alpha_1 + 2^3\alpha_2 + 3^3\alpha_3 = \frac{27}{4}$ befriedigt werden, unter denselben Voraussetzungen w jene von Riecke und verdient hienach nur in theoretischer Hinsicht eini Beachtung.

Vierter Specialfall: n = 4.

In diesem Falle verwandelt sich $F(n,u)$ in $F(4,u) = u^5 - 10u^4 + 35u^3 - 50u^2 + 24$ so daß die bestimmten Integrale: $\int_0^4 \frac{F(4,u)du}{u}$, $\int_0^4 \frac{F(4,u)du}{u-1}$, $\int_0^4 \frac{F(4,u)du}{u-2}$, $\int_0^4 \frac{F(4,u)d}{u-3}$ $\int_0^4 \frac{F(4,u)\,du}{u-4}$ der Reihe nach die Werthe:

$$u\left(\frac{u^4}{5} - \frac{5u^3}{2} + \frac{35u^2}{3} - 25u + 24\right)\Big|_0^4 = \frac{112}{15}, \left|u^2\left(\frac{u^3}{5} - \frac{9u^2}{4} + \frac{26u}{3} - 12\right)\right|_0^4 = -\frac{12}{1}$$

$$\left|u^2\left(\frac{u^3}{5} - 2u^2 + \frac{19u}{3} - 6\right)\right|_0^4 = \frac{32}{15}, \left|u^2\left(\frac{u^3}{5} - \frac{7u^2}{4} + \frac{14u}{3} - 4\right)\right|_0^4 = -\frac{128}{15},$$

$\left|u^2\left(\frac{u^3}{5} - \frac{3u^2}{2} + \frac{11u}{3} - 3\right)\right|_0^4 = \frac{112}{15}$ erhalten, resp. für die dieser Specialisirung v n zugehörigen Constanten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Relationen: $\alpha_0 = \alpha_4 =$ $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{16}{45}$, $\alpha_2 = \frac{2}{15}$ bestehen. Hieraus folgt schließlich:

$$V = \frac{1}{90}\left\{7\,(f_0 + f_4) + 12\,f_2 + 32\,(f_1 + f_3)\right\}, \qquad (17)$$

welche Formel [11] in Hinblick auf die Beziehungen: $\sum_{p=0}^{p=4}\alpha_p = 1$, $\sum_{p=1}^{p=4} p\,\alpha_p =$ $\sum_{p=1}^{p=4} p^2\,\alpha_p = \frac{16}{3}$, $\sum_{p=1}^{p=4} p^3\,\alpha_p = 16$, $\sum_{p=1}^{p=4} p^4\,\alpha_p = \frac{256}{5}$, $\sum_{p=1}^{p=4} p^5\,\alpha_p = \frac{512}{3}$ zur Cubirung a Rotationskörper geeignet erscheint, deren Oberflächen sich durch Drehung ebe Curven von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + A_3\,x^3 + A_4\,x^4 + A_5\,x^5 \qquad (18)$$

um die Abscissenachse des gewählten Coordinatensystems erzeugen lassen.

---

[10] Die Einführung derselben in die Holzmeßkunde geschah zuerst durch Prof. C. Breymann i irrigen Meinung, hiemit eine die Riecke'sche an Genauigkeit übertreffende Cubirungsformel gewonne haben. — Siehe hierüber dessen 1868 in Wien erschienenes Lehrbuch: Anleitung zur Holzmeßkunst, Waldert bestimmung und Waldwerthberechnung, pag. 5, 6, 7, 292 und 293.

[11] Die für dieselbe Specialisirung von n in Kunze's Lehrbuch der Holzmeßkunst, pag. 7 gegebene Gleichung ist durch drei Druckfehler verunstaltet.

Fünfter Specialfall: n = 5.

$$F(5,u) = u^6 - 15u^5 + 85u^4 - 225u^3 + 274u^2 - 120u;$$

$$\int_0^5 \frac{F(5,u)\,du}{u} = \left| u\left(\frac{u^5}{6} - 3u^4 + \frac{85u^3}{4} - 75u^2 + 137u - 120\right)\right|_0^5 = -\frac{475}{12}, \alpha_0 = \frac{19}{288};$$

$$\int_0^5 \frac{F(5,u)\,du}{u-1} = \left| u^2\left(\frac{u^4}{6} - \frac{14u^3}{5} + \frac{71u^2}{4} - \frac{154u}{3} + 60\right)\right|_0^5 = \frac{125}{4}, \ldots \alpha_1 = \frac{25}{96};$$

$$\int_0^5 \frac{F(5,u)\,du}{u-2} = \left| u^2\left(\frac{u^4}{6} - \frac{13u^3}{5} + \frac{59u^2}{4} - \frac{107u}{3} + 30\right)\right|_0^5 = -\frac{125}{12}, \ldots \alpha_2 = \frac{25}{144};$$

$$\int_0^5 \frac{F(5,u)\,du}{u-3} = \left| u^2\left(\frac{u^4}{6} - \frac{12u^3}{5} + \frac{49u^2}{4} - 26u + 20\right)\right|_0^5 = \frac{125}{12}, \ldots \alpha_3 = \frac{25}{144};$$

$$\int_0^5 \frac{F(5,u)\,du}{u-4} = \left| u^2\left(\frac{u^4}{6} - \frac{11u^3}{5} + \frac{41u^2}{4} - \frac{61u}{3} + 15\right)\right|_0^5 = -\frac{125}{4}, \ldots \alpha_4 = \frac{25}{96};$$

$$\int_0^5 \frac{F(5,u)\,du}{u-5} = \left| u^2\left(\frac{u^4}{6} - 2u^3 + \frac{35u^2}{4} - \frac{50u}{3} + 12\right)\right|_0^5 = \frac{475}{12}, \ldots \alpha_5 = \frac{19}{288}.$$

$$V = \frac{1}{288}\left\{19(f_0 + f_5) + 75(f_1 + f_4) + 50(f_2 + f_3)\right\}. \qquad (19)$$

Dieser Ausdruck für V besitzt, da seine charakteristischen Constanten α_0, α_1, α_3, α_4, α_5 analog wie jene von (17) im Ganzen sechs Bedingungen:

$$\sum_{p=0}^{p=5}\alpha_p = 1, \sum_{p=1}^{p=5} p\alpha_p = \frac{5}{2}, \sum_{p=1}^{p=5} p^2\alpha_p = \frac{25}{3}, \sum_{p=1}^{p=5} p^3\alpha_p = \frac{125}{4}, \sum_{p=1}^{p=5} p^4\alpha_p = 125, \sum_{p=1}^{p=5} p^5\alpha_p = \frac{3125}{6}$$

üllen, kein größeres Anwendungsgebiet als (17), berechtigt also im Vereine t (16) zu dem auffallenden Schlusse, daß überhaupt nur die Substituon gerader Zahlen für n nützliche Resultate liefern kann.

Sechster Specialfall: n = 6.

$$F(6,u) = u^7 - 21u^6 + 175u^5 - 735u^4 + 1624u^3 - 1764u^2 + 720u;$$

$$\int_0^6 \frac{F(6,u)\,du}{u} = \left| u\left(\frac{u^6}{7} - \frac{7u^5}{2} + 35u^4 - \frac{735u^3}{4} + \frac{1624u^2}{3} - 882u + 720\right)\right|_0^6 = \frac{1476}{7};$$

$$\int_0^6 \frac{F(6,u)\,du}{u-1} = \left| u^2\left(\frac{u^5}{7} - \frac{10u^4}{3} + 31u^3 - 145u^2 + 348u - 360\right)\right|_0^6 = -\frac{1296}{7};$$

$$\int_0^6 \frac{F(6,u)\,du}{u-2} = \left| u^2\left(\frac{u^5}{7} - \frac{19u^4}{6} + \frac{137u^3}{5} - \frac{461u^2}{4} + 234u - 180\right)\right|_0^6 = \frac{324}{35};$$

$$\int_0^6 \frac{F(6,u)\,du}{u-3} = \left| u^2\left(\frac{u^5}{7} - 3u^4 + \frac{121u^3}{5} - 93u^2 + \frac{508u}{3} - 120\right)\right|_0^6 = -\frac{2448}{35};$$

$$\int_0^6 \frac{F(6,u)\,du}{u-4} = \left| u^2\left(\frac{u^5}{7} - \frac{17u^4}{6} + \frac{107u^3}{5} - \frac{307u^2}{4} + 132u - 90\right)\right|_0^6 = \frac{324}{35};$$

$$\int_0^6 \frac{F(6,u)\,du}{u-5} = \left| u^2\left(\frac{u^5}{7} - \frac{8u^4}{3} + 19u^3 - 65u^2 + 108u - 72\right)\right|_0^6 = -\frac{1296}{7}$$

$$\int_0^6 \frac{F(6,u)\,du}{u-6} = \left| u^2\left(\frac{u^5}{7} - \frac{5u^4}{2} + 17u^3 - \frac{225u^2}{4} + \frac{274u}{3} - 60\right)\right|_0^6 = \frac{1476}{7}.$$

Hieraus folgt: $\alpha_0 = \alpha_6 = \frac{41}{840}$, $\alpha_1 = \alpha_5 = \frac{9}{35}$, $\alpha_2 = \alpha_4 = \frac{9}{280}$, $\alpha_3 = \frac{34}{105}$, alſo

$$V = \frac{1}{840}\{41(f_0 + f_6) + 216(f_1 + f_5) + 27(f_2 + f_4) + 272\, f_3\}, \qquad (20)$$

welche Formel Meridiancurven von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6 + A_7 x^7 \qquad (21)$$

vorausſetzt, weil α_0, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 gleichzeitig den Relationen:

$$\sum_{p=0}^{p=6}\alpha_p = 1, \sum_{p=1}^{p=6} p\alpha_p = 3, \sum_{p=1}^{p=6} p^2\alpha_p = 12, \sum_{p=1}^{p=6} p^3\alpha_p = 54, \sum_{p=1}^{p=6} p^4\alpha_p = \frac{1296}{5}, \sum_{p=1}^{p=6} p^5\alpha_p = 1296$$

$$\sum_{p=1}^{p=6} p^6\alpha_p = \frac{46656}{7}, \sum_{p=1}^{p=6} p^7\alpha_p = 34992$$ Genüge leiſten.

Siebenter Specialfall: $n = 8$.

$F(8,u) = u^9 - 36u^8 + 546u^7 - 4536u^6 + 22449u^5 - 67284u^4 + 118124u^3 -$ $- 109584u^2 + 40320u$. — Indem wir das Product: $F(8,u)\,du$ der Reihe nach durch u, $u-1$, $u-2$, $u-3$, ... $u-8$ dividiren und die hiebei gewonnenen Reſultate zwiſchen den Grenzen 0 und 8 integriren, ergeben ſich zunächſt die Gleichungen:

$$\int_0^8 \frac{F(8,u)du}{u} = \int_0^8 \frac{F(8,u)\,du}{u-8} = \frac{506368}{45}; \int_0^8 \frac{F(8,u)\,du}{u-1} = \int_0^8 \frac{F(8,u)\,du}{u-7} = -\frac{37683}{45}$$

$$\int_0^8 \frac{F(8,u)\,du}{u-2} = \int_0^8 \frac{F(8,u)\,du}{u-6} = -\frac{118784}{315}; \int_0^8 \frac{F(8,u)\,du}{u-3} = \int_0^8 \frac{F(8,u)du}{u-5} = -\frac{671744}{315}$$

$$\int_0^8 \frac{F(8,u)\,du}{u-4} = -\frac{232448}{315},$$ alſo ſchließlich zur Berechnung von V der Ausdruck

$$V = \frac{1}{28350}\{989(f_0 + f_8) + 5888(f_1 + f_7) + 10496(f_3 + f_5) -$$
$$- 928(f_2 + f_6) - 4540\, f_4\}, \qquad (22)$$

deſſen conſtante Coëfficienten: $\alpha_0 = \alpha_8 = \frac{989}{28350}$, $\alpha_1 = \alpha_7 = \frac{2944}{14175}$, $\alpha_2 = \alpha_6 =$ $= -\frac{464}{14175}$, $\alpha_3 = \alpha_5 = \frac{5248}{14175}$, $\alpha_4 = -\frac{454}{2835}$ die Relationen:

$$\sum_{p=0}^{p=8}\alpha_p = 1, \sum_{p=1}^{p=8} p\alpha_p = 4, \sum_{p=1}^{p=8} p^2\alpha_p = \frac{64}{3}, \sum_{p=1}^{p=8} p^3\alpha_p = 128, \sum_{p=1}^{p=8} p^4\alpha_p = \frac{4096}{5}, \sum_{p=1}^{p=8} p^5\alpha_p = \frac{16384}{3}$$

$$\sum_{p=1}^{p=8} p^6\alpha_p = \frac{262144}{7}, \sum_{p=1}^{p=8} p^7\alpha_p = 262144, \sum_{p=1}^{p=8} p^8\alpha_p = \frac{16777216}{9}, \sum_{p=1}^{p=8} p^9\alpha_p = \frac{67108864}{5}$$

erfüllen. — Die Cubirungsformel (22) iſt demnach auf alle Rotationskörper anwendbar, deren Begrenzungsflächen durch Meridiancurven von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots + A_9 x^9 \qquad (23)$$

lytisch charakterisirt werden können.

Achter Specialfall: $n = 10$.

$$10, u) = u^{11} - 55 u^{10} + 1320 u^9 - 18150 u^8 + 157773 u^7 - 902055 u^6 + 3416930 u^5 - 8409500 u^4 + 12753576 u^3 - 10628640 u^2 + 3628800 u;$$

$$\frac{F(10,u)du}{u} = \int_0^{10} \frac{F(10,u)du}{u-10} = \frac{32134000}{33}; \int_0^{10} \frac{F(10,u)du}{u-1} = \int_0^{10} \frac{F(10,u)du}{u-9} = -\frac{21260000}{33};$$

$$\frac{F(10,u)du}{u-2} = \int_0^{10} \frac{F(10,u)du}{u-8} = -\frac{6470000}{99}; \int_0^{10} \frac{F(10,u)du}{u-3} = \int_0^{10} \frac{F(10,u)du}{u-7} = -\frac{4540000}{33};$$

$$\frac{F(10,u)du}{u-4} = \int_0^{10} \frac{F(10,u)du}{u-6} = -\frac{5790000}{77}, \int_0^{10} \frac{F(10,u)du}{u-5} = -\frac{71228000}{693}, \text{ also:}$$

$$= \frac{1}{598752} \{16067 (f_0 + f_{10}) + 106300 (f_1 + f_9) + 272400 (f_3 + f_7) + 427368 f_5 - 48525 (f_2 + f_8) - 260550 (f_4 + f_6)\} \qquad (24)$$

Diese Formel gilt, da ihre charakteristischen Constanten: $\alpha_0 = \alpha_{10} = \frac{16067}{598752}$, $= \alpha_9 = \frac{26575}{149688}$, $\alpha_2 = \alpha_8 = -\frac{16175}{199584}$, $\alpha_3 = \alpha_7 = \frac{5675}{12474}$, $\alpha_4 = \alpha_6 = -\frac{4825}{11088}$, $\alpha_5 = \frac{17807}{24948}$

zwölf Bedingungen: $\sum_{p=0}^{p=10} \alpha_p = 1$, $\sum_{p=1}^{p=10} p\, \alpha_p = 5$, $\sum_{p=1}^{p=10} p^2 \alpha_p = \frac{100}{3}$, $\sum_{p=1}^{p=10} p^3 \alpha_p = 250$,

$p^4 \alpha_p = 2 \times 10^3$, $\sum_{p=1}^{p=10} p^5 \alpha_p = \frac{5 \times 10^4}{3}$, $\sum_{p=1}^{p=10} p^6 \alpha_p = \frac{10^{16}}{7}$, $\sum_{p=1}^{p=10} p^7 \alpha_p = 125 \times 10^4$,

$p^8 \alpha_p = \frac{10^8}{9}$, $\sum_{p=1}^{p=10} p^9 \alpha_p = 10^8$, $\sum_{p=1}^{p=10} p^{10} \alpha_p = \frac{10^{10}}{11}$, $\sum_{p=1}^{p=10} p^{11} \alpha_p = \frac{25 \times 10^9}{3}$

riedigen, für alle Rotationskörper, deren Oberflächen durch Drehung ebener ven von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots + A_{11} x^{11} \qquad (25)$$

die Abscissenachse des gewählten Coordinatensystems entstehen können, und tzt insoferne unter den hier betrachteten Specialisirungen der Relation (5) größte Anwendungsgebiet. Da jedoch andererseits in (24) bereits eilf in der xis nie völlig genau bestimmbare Größen: $f_0, f_1, \ldots f_{10}$ auftreten, so wäre weitere Fortsetzung unserer auf (5) bezüglichen Untersuchungen nicht mehr theilhaft, weßhalb hier nur noch folgende merkwürdige Consequenzen derselben kurze Erwähnung verdienen:

1. Je zwei Querflächen f_a, f_b deren Indices a und b zusammen ommen die Anzahl n der gewählten Sectionen liefern, sind in betreffenden Formel für V mit demselben Coëfficienten ver- en, d. h. es ist allgemein: $\alpha_k = \alpha_{n-k}$.

2. Ist n eine gerade Zahl, so sind die beiden Gleichungssysteme

$$\sum_{p=0}^{p=n} \alpha_p = 1, \sum_{p=1}^{p=n} p\, \alpha_p = \frac{n}{2}, \sum_{p=1}^{p=n} p^2 \alpha_p = \frac{n^2}{3}, \ldots \sum_{p=1}^{p=n} p^n \alpha_p = \frac{n^n}{n+1} \text{ und:}$$

$$\sum_{p=o}^{p=n}\alpha_p = 1,\ \sum_{p=1}^{p=n} p^2\,\alpha_p = \frac{n_2}{3},\ \sum_{p=1}^{p=n} p^3\,\alpha_p = \frac{n^3}{4}, \ldots \sum_{p=1}^{p=n} p^{n+1}\,\alpha_p = \frac{n^{n+1}}{n+2}$$ einander

bezüglich $\alpha_o\ \alpha_1\ \alpha_2, \ldots \alpha_n$ jederzeit äquivalent.

Alle bisher aus (2) abgeleiteten Volumformeln enthalten, wie eine verg chende Betrachtung derselben lehrt, beide Endflächen des gegebenen Rotationskörp so daß ihre praktische Brauchbarkeit wesentlich verringert wird, sobald eine di Flächen bei dem zu cubirenden Baumstamme z. B. in Folge des Wurzelanla nicht mit der gehörigen Schärfe ermittelt werden kann. Es erscheint daher wünsch werth für derartige Fälle neben der Relation (5) noch eine zweite aufzuste in welcher lediglich die den Abscissen $x_1 = \frac{l}{n}, x_2 = \frac{2l}{n}, x_3 = \frac{3l}{n}, \ldots x_n = l$ sprechenden Querflächen: $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ vorkommen und für gewisse S cialisirungen von n womöglich auch der Coëfficient von f_n verschwindet. — diesem Zwecke setzen wir in (2) $x_0 = \infty, x_1 = \delta, x_2 = 2\delta, x_3 = 3\delta, \ldots x_n =$ unter welchen Annahmen das erste Glied des Ausdruckes (2) regelmäßig g Null wird,[12] hingegen in den übrigen Gliedern desselben die Factoren von mit Rücksicht auf die Gleichungen:

$$\lim_{x_0=\infty}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right) = \lim_{x_0=\infty}\left\{\left(\frac{x}{x_0}-1\right):\left(\frac{x_1}{x_0}-1\right)\right\} = 1, \ldots \lim_{x_0=\infty}\left(\frac{x-x_0}{x_k-x_0}\right) =$$
$$= \lim_{x_0=\infty}\left\{\left(\frac{x}{x_0}-1\right):\left(\frac{x_k}{x_0}-1\right)\right\} = 1$$

der Reihe nach die Werthe:

$$\frac{(x-2\delta)(x-3\delta)(x-4\delta)\ldots(x-n\delta)}{(-\delta)(-2\delta)(-3\delta)\ldots(-[n-1]\delta)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,\delta^{n-1}}\left(\frac{X}{x\,[x-\delta]}\right),$$
$$\frac{(x-\delta)(x-3\delta)(x-4\delta)\ldots(x-n\delta)}{(\delta)(-\delta)(-2\delta)\ldots(-[n-2]\delta)} = \frac{(-1)^{n-2}}{1!(n-2)!\delta^{n-1}}\left(\frac{X}{x\,[x-2\delta]}\right),$$
$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$
$$\frac{(x-\delta)(x-2\delta)\ldots(x-[k-1]\delta)(x-[k+1]\delta)\ldots(x-[n-1]\delta)(x-n\delta)}{([k-1]\delta)([k-2]\delta)\ldots(\delta)(-\delta)\ldots(-[n-k-1]\delta)(-[n-k]\delta)}$$
$$= \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!\delta^{n-1}}\left(\frac{X}{x[x-k\delta]}\right) \text{ ꝛc.},$$

erhalten, beziehungsweise zur Bestimmung von V vorläufig die Formel:

$$(26)\quad V =$$
$$= \frac{1}{\delta^{n-1}}\left\{\frac{(-1)^{n-1}f_1}{(n-1)!}\int_0^l \frac{X\,dx}{x(x-\delta)} + \frac{(-1)^{n-2}f_2}{1!(n-2)!}\int_0^l \frac{X\,dx}{x(x-2\delta)} + \frac{(-1)^{n-3}f_3}{2!(n-3)!}\int_0^l \frac{X\,dx}{x(x-3\delta)} + \right.$$
$$+ \frac{(-1)^{n-k}f_k}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^l \frac{X\,dx}{x(x-k\delta)} + \ldots - \frac{f_{n-1}}{(n-2)!\,1!}\int_0^l \frac{X\,dx}{x(x-[n-1]\delta)} + \frac{f_n}{(n-1)!}\int_0^l \frac{X\,d}{x(x-}$$

resultirt. Ihre weitere Transformation gestaltet sich dann analog wie jen (3) und liefert nach Einführung des Productes:

$$(u-1)(u-2)(u-3)\ldots(u-n+1)(u-n) = \Phi(n,u)\quad (2$$

zunächst die Beziehung:

$$V = \frac{l}{n}\left\{\frac{(-1)^{n-1}f_1}{(n-1)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)\,du}{u-1} + \frac{(-1)^{n-2}f_2}{1!(n-2)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)du}{u-2} + \frac{(-1)^{n-3}f_3}{2!(n-3)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)du}{u-3}\right.$$

---

[12] Da nämlich jeder Baumstamm eine endliche Länge besitzt, so entspricht der Abscisse $x_o = \infty$ der Querschnitt $f_0 = o$, während das Product: $(x_o - x_1), (x_o - x_2) \ldots (x_o - x_n)$ gleichzeitig unendlich gr

$$\ldots \frac{(-1)^{n-k} f_k}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)\,du}{u-k} + \ldots \frac{f_{n-1}}{(n-2)!\,1!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)du}{u-n+1} + \frac{f_n}{(n-1)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)du}{u-n}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k} f_k}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)\,du}{u-k}, \qquad (28)$$

h. unter Anwendung der Substitutionen:

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)\,du}{n(u-1)},\ \beta_2 = \frac{(-1)^{n-2}}{1!(n-2)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)\,du}{n(u-2)},\ \beta_3 = \frac{(-1)^{n-3}}{2!(n-3)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)du}{n(u-3)};$$

$$\ldots \beta_k = \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)\,du}{n(u-k)}, \ldots \beta_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^n \frac{\Phi(n,u)\,du}{n(u-n)}$$

: das fragliche Volumen V schließlich ein Resultat von der Gestalt:

$$V = l\{\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \ldots + \beta_k f_k + \ldots + \beta_n f_n\}, \qquad (29)$$

lches sich nur insoferne von (6) unterscheidet, als an die Stelle von α_0, α_1, . . . α_n nunmehr die Constanten o, β_1, β_2, . . . β_n getreten sind. Um demnach Giltigkeitsgrenzen der Formel (29) in jedem gegebenen Falle definitiv fest-tellen, brauchen wir blos zu untersuchen, bis zu welchem Werthe von k mmtliche Gleichungen des Systems:

$$\sum_{p=1}^{p=n}\beta_p = 1, \sum_{p=1}^{p=n} p\beta_p = \frac{n}{2}, \sum_{p=1}^{p=n} p^2\beta_p = \frac{n^2}{3}, \sum_{p=1}^{p=n} p^3\beta_p = \frac{n^3}{4}, \ldots \sum_{p=1}^{p=n} p^k\beta_p = \frac{n^k}{k+1}$$

rch β_1, β_2, . . . β_n erfüllt werden, indem der von uns bezüglich $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ wiesene Lehrsatz selbstverständlich direct auf die charakteristischen Coëfficienten 1 (29) übertragen werden kann. — Die wichtigsten aus der Identität (28) eitbaren Specialfälle sind nun in übersichtlicher Darstellungsweise die folgenden:

Erster Specialfall: $n = 2$.

$$(2,u) = \frac{F(2,u)}{u}, \int_0^2 \frac{\Phi(2,u)du}{u-1} = \Big| u\Big(\frac{u}{2}-2\Big)\Big|_0^2 = -2, \int_0^2 \frac{\Phi(2,u)du}{u-2} = \Big| u\Big(\frac{u}{2}-1\Big)\Big|_0^2 = 0, \text{ d.h.}$$

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, V = l(\beta_1 f_1) = f_1 l. \qquad (30)$$

Dieser Ausdruck[13] besitzt, da für $n = 2$ auch $\frac{n}{2}$ mit β_1 zusammenfällt, sselbe Anwendungsgebiet wie (8) und entspricht mithin der bekannten Regel: as Volumen jedes abgekürzten Rotationsparaboloides ist gleich dem Producte s seiner Höhe in seine Mittelfläche.[14]

Zweiter Specialfall: $n = 3$.

$$\Phi(3,u) = \frac{F(3,u)}{u}, \int_0^3 \frac{\Phi(3,u)\,du}{u-1} = \Big| u\Big(\frac{u^2}{3} - \frac{5u}{2} + 6\Big)\Big|_0^3 = \frac{9}{2},$$

---

[13] Derselbe wurde zuerst von Kästner, später (1825) von Huber (Zeitschrift für das Forst- und dwesen in Bayern, 3. Band, 1. Heft) für forstliche Zwecke empfohlen und auch dessen im Jahre 1828 in- ichen erschienenen Werke: „Hilfstafeln für Bedienstete des Forst- und Baufaches zur leichten und schnellen chnung des Massengehaltes roher Holzstämme“ zu Grunde gelegt.

[14] Siehe hierüber z. B. König's Forstmathematik, pag. 308, Kunze's Lehrbuch der Holzmeßkunst, 33, Baur's Holzmeßkunst, pag. 45, ꝛc.

$$\int_0^3 \frac{\Phi(3,u)du}{u-2} = \left| u\left(\frac{u^2}{3} - 2u + 3\right)\right|_0^3 = 0, \int_0^3 \frac{\Phi(3,u)du}{u-3} = \left| u\left(\frac{u^2}{3} - \frac{3u}{2} + 2\right)\right|_0^3 = \frac{3}{2}$$

Hieraus folgt: $\beta_1 = \frac{3}{4}, \beta_2 = 0, \beta_3 = \frac{1}{4}$, also:

$$V = l(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3) = \frac{1}{4}(3f_1 + f_3). \qquad (31)$$

Diese zuerst von Hoßfeld[15] aufgestellte Formel[16] gilt mit Rücksicht auf durch β_1, β_2, β_3 erfüllten Bedingungen: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1, \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 =$ $\beta_1 + 2^2\beta_2 + 3^2\beta_3 = 3$ für alle Körper, deren Oberflächen durch Drehung eb Curven von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \qquad (32)$$

um die Abscissenaxe des gewählten Coordinatensystems erzeugt werden kön läßt sich also nur auf den geraden Kreiskegel und Rotationskörper mit Mar flächen zweiter Ordnung anwenden, was bereits Riecke sehr gründlich wiesen hat.[17]

Dritter Specialfall: $n = 4$.

Da $\Phi(n, u)$ in diesem Falle mit $\frac{F(4, u)}{u}$ coincidirt, und die Integr

$$\int_0^4 \frac{\Phi(4,u)du}{u-1} = \left| u\left(\frac{u^3}{4} - 3u^2 + 13u - 24\right)\right|_0^4, \int_0^4 \frac{\Phi(4,u)du}{u-2} = \left| u\left(\frac{u^3}{4} - \frac{8u^2}{3} + \frac{19u}{2} - 12\right)\right|_0^4,$$

$$\int_0^4 \frac{\Phi(4,u)du}{u-3} = \left| u\left(\frac{u^3}{4} - \frac{7u^2}{3} + 7u - 8\right)\right|_0^4, \int_0^4 \frac{\Phi(4,u)du}{u-4} = \left| u\left(\frac{u^3}{4} - 2u^2 + \frac{11u}{2} - 6\right.\right.$$

sich der Reihe nach auf $-16, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}$, 0 reduciren, so bestehen β_1, β_2, β_3, β_4 die Beziehungen: $\beta_1 = \beta_3 = \frac{2}{3}, \beta_2 = -\frac{1}{3}$ $\beta_4 = 0$, wor schließlich:

$$V = l(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3) = \frac{1}{3}\{2(f_1 + f_3) - f_2\} \qquad (33)$$

folgt. — Diese Formel[18] ist, da β_1, β_2, β_3 den Bedingungen: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ $\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = 2, \beta_1 + 2^2\beta_2 + 3^2\beta_3 = \frac{16}{3}, \beta_1 + 2^3\beta_2 + 3^3\beta_3 = 16$ genügen, alle Rotationskörper anwendbar, welche sich mit Hilfe der von Ri empfohlenen Gleichung (10) cubiren lassen, verdient übrigens vor der letzt insoferne den Vorzug, als in ihr keine der beiden Endflächen des gegeb Rotationskörpers auftritt.

---

[15] Siehe hierüber dessen früher citirtes Werk, §. 67, pag, 123, ferner König's Forstmathe pag. 305 und 308, Kunze's „Lehrbuch der Holzmeßkunst“, pag. 59 und 60, Baur's „Holzmeßkunst“ p und 46, ꝛc.

[16] Dieselbe verwandelt sich, falls $f_3 = 0$ ist, in $V = \frac{3}{4} f_1 l$, in welcher Gestalt sie bekanntlich zur Cub unentwipfelter Baumstämme vorzüglich geeignet erscheint.

[17] Siehe hierüber dessen in unserer sechsten Anmerkung citirte Abhandlung, pag. 5, 64 und 65.

[18] f_1, f_2, f_3 repäsentiren hiebei nach der üblichen Ausdrucksweise die der Untermitte, Mitte und mitte des zu cubirenden Stammes zugehörigen Querflächen.

Vierter Specialfall: n = 5.

Entsprechend dem Werthe von $\Phi\,(5, u) = \frac{F\,(5, u)}{u}$ ergeben sich für die be-
mten Integrale: $\int\limits_0^5 \frac{\Phi(5,u)du}{u-1}, \int\limits_0^5 \frac{\Phi(5,u)du}{u-2}, \int\limits_0^5 \frac{\Phi(5,u)du}{u-3}, \int\limits_0^5 \frac{\Phi(5,u)du}{u-4}, \int\limits_0^5 \frac{\Phi\ (5,\ u)\ du}{u-5}$
die dieser Specialisirung von n charakteristischen Coëfficienten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$
Reihe nach die Ausdrücke:

$$\frac{u^4}{5} - \frac{7u^3}{2} + \frac{71u^2}{3} - 77u + 120\Big)\Big|_0^5 = \frac{425}{6}, \Big|u\Big(\frac{u^4}{5} - \frac{13u^3}{4} + \frac{59u^2}{3} - \frac{107u}{2} + 60\Big)\Big|_0^5 = \frac{175}{12},$$

$$\frac{u^4}{5} - 3u^3 + \frac{49u^2}{3} - 39u + 40\Big)\Big|_0^5 = \frac{50}{3}, \Big|u\Big(\frac{u^4}{5} - \frac{11u^3}{4} + \frac{41u^2}{3} - \frac{61u}{2} + 30\Big)\Big|_0^5 = \frac{25}{12},$$

$$\frac{u^4}{5} - \frac{5u^3}{2} + \frac{35u^2}{3} - 25u + 24\Big)\Big|_0^5 = \frac{95}{6};\ \beta_1 = \frac{85}{144}, \beta_2 = -\frac{35}{72}, \beta_3 = \frac{5}{6}, \beta_4 = -\frac{5}{72},$$

$= \frac{19}{144}$, so daß zur Berechnung von V augenscheinlich die Formel:

$$V = \frac{1}{144}\left\{85 f_1 + 120\, f_3 + 19\, f_5 - 10\,(7\, f_2 + f_4)\right\} \qquad (34)$$

tirt. — Dieselbe gilt in Hinblick auf die Identitäten:

$$= 1,\quad \sum_{p=1}^{p=5} p\,\beta_p = \frac{5}{2},\quad \sum_{p=1}^{p=5} p^2\,\beta_p = \frac{25}{3},\quad \sum_{p=1}^{p=5} p^3\,\beta_p = \frac{125}{4},\quad \sum_{p=1}^{p=5} p^4\,\beta_p = 125$$

alle Rotationskörper, deren Begrenzungsflächen durch Meridiancurven von
allgemeinen Gleichung:

$$y^2 = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + A_3\,x^3 + A_4\,x^4 \qquad (35)$$

ytisch charakterisirt werden können, liefert jedoch durch ihre relativ bedeutende
plication andererseits den Beweis, daß die Substitution größerer un-
der Zahlen für n in der Relation (28) ohne praktischen Nutzen
würde.

Fünfter Specialfall: n = 6.

Mit Hilfe der Relation $\Phi\,(6, u) = \frac{F\,(6, u)}{u}$ erhalten wir ohne Schwierig-
die Gleichungen:

$$\frac{(6,u)du}{u-1} = \Big|u\Big(\frac{u^5}{6} - 4u^4 + \frac{155\,u^3}{4} - \frac{580\,u^2}{3} + 522\,u - 720\Big)\Big|_0^6 = -396, \beta_1 = \frac{11}{20};$$

$$\frac{(6,\,u)\,du}{u-2} = \Big|u\Big(\frac{u^5}{6} - \frac{19\,u^4}{5} + \frac{137\,u^3}{4} - \frac{461\,u^2}{3} + 351\,u - 360\Big)\Big|_0^6 = -\frac{504}{5}, \beta_2 = -\frac{7}{10};$$

$$\frac{(6,\,u)\,du}{u-3} = \Big|u\Big(\frac{u^5}{6} - \frac{18\,u^4}{5} + \frac{121\,u^3}{4} - 124\,u^2 + 254\,u - 240\Big)\Big|_0^6 = -\frac{468}{5}, \beta_3 = \frac{13}{10};$$

$$\frac{(6,\,u)\,du}{u-4} = \Big|u\Big(\frac{u^5}{6} - \frac{17\,u^4}{5} + \frac{107\,u^3}{4} - \frac{307\,u^2}{3} + 198\,u - 180\Big)\Big|_0^6 = -\frac{252}{5}, \beta_4 = -\frac{7}{10};$$

$$\frac{(6,\,u)\,du}{u-5} = \Big|u\Big(\frac{u^5}{6} - \frac{16\,u^4}{5} + \frac{95\,u^3}{4} - \frac{260\,u^2}{3} + 162\,u - 144\Big)\Big|_0^6 = -\frac{396}{5}, \beta_5 = \frac{11}{20};$$

$$\int_0^6 \frac{\Phi(6,u)\,du}{u-6} = \left| u\left(\frac{u^5}{6} - 3\,u^4 + \frac{85\,u^3}{4} - 75\,u^2 + 137\,u - 120\right)\right|_0^6 = 0,\ \beta_6 = 0,$$

folglich zur Ermittelung von V in letzter Linie den Ausdruck:

$$V = \frac{1}{20}\{11(f_1+f_5) + 26\,f_3 - 14(f_2 + f_4)\}, \qquad (36)$$

dessen Anwendungsgebiet mit Rücksicht auf die Identitäten:

$$\sum_{p=1}^{p=5}\beta_p = 1, \sum_{p=1}^{p=5} p\,\beta_p = 3, \sum_{p=1}^{p=5} p^2\beta_p = 12, \sum_{p=1}^{p=5} p^3\beta_p = 54, \sum_{p=1}^{p=5} p^4\beta_p = \frac{1296}{5}, \sum_{p=1}^{p=5} p^5\beta_p = 1$$

offenbar vollständig mit jenem der Formeln (17) und (19) übereinstimmt.

Sechster Specialfall n = 8.

$$\Phi(8,u) = \frac{F(8,u)}{u}, \int_0^8 \frac{\Phi(8,u)du}{u-1} = -\frac{58880}{3}, \int_0^8 \frac{\Phi(8,u)du}{u-2} = -\frac{40704}{7}, \int_0^8 \frac{\Phi(8,u)du}{u-3} = -\,31$$

$$\int_0^8 \frac{\Phi(8,u)du}{u-4} = -\frac{314752}{105}, \int_0^8 \frac{\Phi(8,u)du}{u-5} = -\frac{93696}{35}, \int_0^8 \frac{\Phi(8,u)du}{u-6} = -\frac{13568}{7},$$

$$\int_0^8 \frac{\Phi(8,u)du}{u-7} = -\frac{58880}{21}, \int_0^8 \frac{\Phi(8,u)du}{u-8} = 0;\ \beta_1 = \beta_7 = \frac{92}{189},\ \beta_2 = \beta_6 = -\frac{106}{105},$$

$$\beta_3 = \beta_5 = \frac{244}{105},\ \beta_4 = -\frac{2459}{945},\ \text{also:}$$

$$V = \frac{1}{945}\{460(f_1 + f_7) + 2196\,(f_3 + f_5) - 954\,(f_2 + f_6) - 2459 f_4\} \quad (37)$$

Dieser Ausdruck für V gilt, da seine charakteristischen Constanten die Bedingun

$$\sum_{p=1}^{p=7}\beta_p = 1, \sum_{p=1}^{p=7} p\beta_p = 4, \sum_{p=1}^{p=7} p^2\beta_p = \frac{64}{3}, \sum_{p=1}^{p=7} p^3\beta_p = 128, \sum_{p=1}^{p=7} p^4\beta_p = \frac{4096}{5}, \sum_{p=1}^{p=7} p^5\beta_p = 1$$

$$\sum_{p=1}^{p=7} p^6\beta_p = \frac{262144}{7}, \sum_{p=1}^{p=7} p^7\beta_p = 262144$$ befriedigen, unter denselben Beschränku

wie die Cubirungsformel (20).

Siebenter Specialfall: n = 10.

$$\Phi(10,u) = \frac{F(10,u)}{u}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)du}{u-1} = -1618000, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)du}{u-2} = -\frac{4676000}{9}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)}{u-3}$$

$$= -\frac{3334000}{9}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)du}{u-4} = -\frac{5507000}{21}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)du}{u-5} = -\frac{13564400}{63}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)}{u-6}$$

$$= -\frac{11014000}{63}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)du}{u-7} = -\frac{3334000}{21}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)du}{u-8} = -\frac{1169000}{9}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)}{u-9}$$

$$= -\frac{1618000}{9}, \int_0^{10} \frac{\Phi(10,u)du}{u-10} = 0;\ \beta_1 = \beta_9 = \frac{4045}{9072},\ \beta_2 = \beta_8 = -\frac{835}{648},\ \beta_3 = \beta_7 =$$

$$\beta_4 = \beta_6 = -\frac{27535}{4536},\ \beta_5 = \frac{33911}{4536},\ \text{also:}$$

$$= \frac{1}{9072}\{4045(f_1+f_9)+33340(f_3+f_7)+67822f_5-11690(f_2+f_8)- -55070(f_4+f_6)\}. \qquad (38)$$

eses Resultat besitzt entsprechend den Gleichungen: $\sum_{p=1}^{p=9}\beta_p = 1, \sum_{p=1}^{p=9} p\,\beta_p = 5,$

$p^2\beta_p = \frac{100}{3}, \sum_{p=1}^{p=9} p^3\beta_p = 250, \sum_{p=1}^{p=9} p^4\beta_p = 2\times 10^3, \sum_{p=1}^{p=9} p^5\beta_p = \frac{5\times 10^4}{3}, \sum_{p=1}^{p=9} p^6\beta_p = \frac{10^6}{7},$

$p^7\beta_p = 125\times 10^4, \sum_{p=1}^{p=9} p^8\beta_p = \frac{10^8}{9}, \sum_{p=1}^{p=9} p^9\beta_p = 10^9$ dieselben Giltigkeitsgrenzen

die Formel (22).

Achter Specialfall: $n = 12$.

Die vollständige Durchführung der in diesem Falle erforderlichen lang-
erigen Rechnungen liefert bezüglich V als Endresultat den Ausdruck:

$$V = \frac{1}{23100}\{9626(f_1+f_{11})+123058(f_3+f_9)+427956(f_5+f_7)- -35771(f_2+f_{10})-266298(f_4+f_8)-494042f_6\}, \qquad (39)$$

: dessen Coëfficienten: $\beta_1 = \beta_{11} = \frac{4813}{11550}$, $\beta_2 = \beta_{10} = -\frac{35771}{23100}$, $\beta_3 = \beta_9 = \frac{61529}{11550}$,

$= \beta_8 = -\frac{44383}{3850}$, $\beta_5 = \beta_7 = \frac{35663}{1925}$, $\beta_6 = -\frac{247021}{11550}$ die zwölf Relationen:

$\beta_p = 1, \sum_{p=1}^{p=11} p\,\beta_p = 6, \sum_{p=1}^{p=11} p^2\beta_p = 48, \sum_{p=1}^{p=11} p^3\beta_p = 432, \sum_{p=1}^{p=11} p^4\beta_p = \frac{20736}{5},$

$p^5\beta_p = 41472, \sum_{p=1}^{p=11} p^6\beta_p = \frac{2985984}{7}, \sum_{p=1}^{p=11} p^7\beta_p = 4478976, \sum_{p=1}^{p=11} p^8\beta_p = 47775744,$

$p^9\beta_p = \frac{2579890176}{5}, \sum_{p=1}^{p=11} p^{10}\beta_p = \frac{61917364224}{11}, \sum_{p=1}^{p=11} p^{11}\beta_p = 61917364224$

tehen, so daß der Formel (39) eine ebenso allgemeine Bedeutung wie der
eichung (24) zukommt. Da ferner nach unseren früheren Untersuchungen auch
schen den Ergebnissen (8) und (30), (10) und (33), (17) und (36), (20)
(37), (22) und (38) ein analoger Zusammenhang stattfindet, so gelangen
nunmehr inductiv zu dem Satze:

Versteht man unter p eine beliebige positive ganze Zahl, so
itzen die beiden den Substitutionen $n = 2p$ in (5) und $n = 2(p+1)$
(28) correspondirenden Specialformeln für V stets dasselbe
wendungsgebiet.

Zugleich ergeben sich speciell aus den Relationen (30), (33), (36), (37),
) und (39) ohne Schwierigkeit noch folgende weitere Consequenzen, welche
große Verwandtschaft der Flächencoëfficienten α und β besonders deutlich er-
ten lassen:

1. Ist n eine gerade Zahl, so erfüllen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ regelmäßig
Beziehungen:

$$\beta_1 = \beta_{n-1},\ \beta_2 = \beta_{n-2},\ \beta_3 = \beta_{n-3}, \ldots \beta_k = \beta_{n-k}, \ldots \beta_n = o.$$

2. Unter derselben Voraussetzung bezüglich n resultiren aus d
beiden Gleichungssystemen:

$$\sum_{p=1}^{p=n-1}\beta_p = 1, \sum_{p=1}^{p=n-1} p\,\beta_p = \frac{n}{2}, \sum_{p=1}^{p=n-1} p^2\,\beta_p = \frac{n^2}{3}, \sum_{p=1}^{p=n-1} p^3\,\beta_p = \frac{n^3}{4}, \ldots \sum_{p=1}^{p=n-1} p^{n-2}\beta_p = \frac{n^{n-2}}{n-}$$

$$\sum_{p=1}^{p=n-1} p\,\beta_p = \frac{n}{2}, \sum_{p=1}^{p=n-1} p^2\beta_p = \frac{n^2}{3}, \sum_{p=1}^{p=n-1} p^3\beta_p = \frac{n^3}{4}, \sum_{p=1}^{p=n-1} p^4\,\beta_p = \frac{n^4}{5}, \ldots \sum_{p=1}^{p=n-1} p^{n-1}\beta_p = n$$

immer übereinstimmende Werthe für $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{n-1}$.

Nachdem wir hiemit auf empirischem Wege die wichtigsten Eigenschaf der in den Hauptformeln (6) und (29) auftretenden Constanten kennen gele haben, sei es zum Abschlusse dieser Betrachtungen noch gestattet, jene allgemein Transformationen von (6) und (29) in Kürze zu behandeln, welche der Annah $n = 2p$ entsprechen und unsere früheren Entwickelungen (5) und (28) wissenschaftlich vervollständigen. — Was zunächst die Umformung des für $n =$ aus (6) hervorgehenden Ausdruckes:

$$V = l\{\alpha_0(f_0+f_{2p})+\alpha_1(f_1+f_{2p-1})+\alpha_2(f_2+f_{2p-2})+\ldots+\alpha_{p-1}(f_{p-1}+f_{p+1})+\alpha_p f_p\}$$

$$= l\Big\{\sum_{k=0}^{k=p-1}\alpha_k\,(f_k + f_{2p-k}) + \alpha_p\,f_p\Big\} \qquad (40)$$

anbelangt, so gelingt dieselbe am einfachsten mit Hilfe der identischen Gleichu

$$\alpha_k = \frac{1}{2}(\alpha_k+\alpha_{2p-k}) = \frac{(-1)^k(4p)^{-1}}{k!(2p-k)!}\Big\{\int_0^{2p}\frac{F(2p,u)du}{u-k} + \int_0^{2p}\frac{F(2p,u)du}{u-2p+k}\Big\}.$$

Setzen wir nämlich in der letzteren $u = t + p$ und bezeichnen der Ue sichtlichkeit wegen das Product:

$$t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)(t^2-3^2)\ldots(t^2-[p-1]^2)(t^2-p^2)$$

mit $\chi(p, t^2)$, so gewinnen wir unter Anwendung des für jede von $z = -$ bis $z = +p$ synectische Function von z, $\varphi(z)$ giltigen Satzes:

$$\int_{-p}^{+p}\varphi(z)dz = \int_0^p\varphi(z)dz - \int_0^{-p}\varphi(z)dz = \int_0^p[\varphi(z)+\varphi(-z)]dz \qquad (42$$

unmittelbar die Identitäten:

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k(4p)^{-1}}{k!(2p-k)!}\Big\{\int_{-p}^{+p}\frac{\chi(p,t^2)\,dt}{t(t+p-k)} + \int_{-p}^{+p}\frac{\chi(p,t^2)\,dt}{t(t-p+k)}\Big\} = \frac{(-1)^k(2p)^{-1}}{k!(2p-k)!}\int_{-p}^{+p}\frac{\chi(p,t^2)\,dt}{t^2-(p-k)^2} =$$

$$= \frac{(-1)^k\,p^{-1}}{k!(2p-k)!}\int_0^p\frac{\chi(p,t^2)\,dt}{t^2-(p-k)^2} \text{ und: } \alpha_p = \frac{(-1)^p p^{-1}}{[p!]^2}\int_0^p\frac{\chi(p,t^2)\,dt}{t^2},$$

folglich zur Bestimmung von V in letzter Linie die Formel:

$$V = \frac{l}{p}\Big\{\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{(-1)^k(f_k+f_{2p-k})}{k!(2p-k)!}\int_0^p\frac{\chi(p,t^2)dt}{t^2-(p-k)^2} + \frac{(-1)^p f_p}{[p!]^2}\int_0^p\frac{\chi(p,t^2)dt}{t^2}\Big\}, \qquad (4$$

welche die Relation (5) an Einfachheit augenscheinlich bedeutend übertrifft. Au wie (40) läßt sich dann auch die der Substitution $n = 2p$ correspondirende Spe form von (29):

$$V = l\{\beta_1(f_1+f_{2p-1})+\beta_2(f_2+f_{2p-2})+\beta_3(f_3+f_{2p-3})+\ldots+\beta_{p-1}(f_{p-1}+f_{p+1})+\beta_p f_p$$

$$= 1\left\{\sum_{k=1}^{k=p-1}\beta_k\,(f_k + f_{2p-k}) + \beta_p\, f_p\right\} \qquad (44)$$

...sformiren, sobald wir hiebei β_k in der Gestalt:

$$= \frac{1}{2p}\{(2p-k)\beta_k + k\beta_{2p-k}\} = \frac{(-1)^k(2p)^{-2}}{(k-1)!\,(2p-k-1)!}\left\{\int_0^{2p}\frac{\Phi(2p,u)du}{u-k} + \int_0^{2p}\frac{\Phi(2p,u)du}{u-2p+k}\right\}$$

...stellen und u mittelst der Gleichung: $u = t + p$ wieder durch eine neue ...änderliche t ersetzen. — Nach Einführung der Abkürzung:

$$(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2)(t^2 - 3^2)\ldots(t^2-[p-2]^2)(t^2-[p-1]^2) = \psi(p, t^2) \quad (45)$$

...lten wir nämlich auf Grundlage dieser letzten Feststellungen für β_k und β_p die Werthe:

$$\beta_k = \frac{(-1)^k(2p)^{-2}}{(k-1)!(2p-k-1)!}\left\{\int_{-p}^{+p}\frac{(t-p)\psi(p,t^2)dt}{t(t+p-k)} + \int_{-p}^{+p}\frac{(t-p)\psi(p,t^2)dt}{t(t-p+k)}\right\} =$$

$$\frac{2(-1)^k(2p)^{-2}}{(k-1)!(2p-k-1)!}\int_{-p}^{+p}\frac{(t-p)\psi(p,t^2)dt}{t^2-(p-k)^2} = \frac{2(-1)^k(2p)^{-2}}{(k-1)!(2p-k-1)!}\int_0^p\frac{[(t-p)+(-t-p)]\,\psi(p,t^2)dt}{t^2-(p-k)^2}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}p^{-1}}{(k-1)!\,(2p-k-1)!}\int_0^p\frac{\psi(p,t^2)\,dt}{t^2-(p-k)^2} \text{ und: } \beta_p = \frac{(-1)^{p-1}p^{-1}}{[(p-1)!]^2}\int_0^p\frac{\psi(p,t^2)\,dt}{t^2},$$

... für das fragliche Volumen V schließlich die Beziehung:

$$V = \frac{1}{p}\left\{\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{(-1)^{k-1}(f_k + f_{2p-k})}{(k-1)!\,(2p-k-1)!}\int_0^p\frac{\psi(p,t^2)\,dt}{t^2-(p-k)^2} + \frac{(-1)^{p-1}f_p}{[(p-1)!]^2}\int_0^p\frac{\psi(p,t^2)\,dt}{t^2}\right\} \quad (46$$

...he vor (28) ebenfalls den Vorzug einer größeren Einfachheit besitzt.

So reducirt sich hienach z. B. die Ableitung von (39) auf die Berechnung ... bestimmten Integrale:

$$\int\frac{\psi(6,t^2)dt}{t^2} = \left|t\left(\frac{t^{10}}{11} - \frac{55t^8}{9} + \frac{1023t^6}{7} - 1529t^4 + \frac{21076t^2}{3} - 14400\right)\right|_0^6 = \frac{142284096}{77},$$

$$\int\frac{\psi(6,t^2)dt}{t^2-1^2} = \left|t^3\left(\frac{t^8}{11} - 6t^6 + \frac{969t^4}{7} - \frac{6676t^2}{5} + 4800\right)\right|_0^6 = \frac{739507968}{385},$$

$$\int\frac{\psi(6,t^2)dt}{t^2-2^2} = \left|t^3\left(\frac{t^8}{11} - \frac{17t^6}{3} + \frac{819t^4}{7} - \frac{4369t^2}{5} + 1200\right)\right|_0^6 = \frac{115040736}{55},$$

$$\int\frac{\psi(6,t^2)dt}{t^2-3^2} = \left|t^2\left(\frac{t^9}{11} - \frac{46t^7}{9} + 87t^5 - \frac{2164t^3}{5} + \frac{1600\,t}{3}\right)\right|_0^6 = \frac{141762816}{55},$$

$$\int\frac{\psi(6,t^2)dt}{t^2-4^2} = \left|t^3\left(\frac{t^8}{11} - \frac{13t^6}{3} + 57t^4 - \frac{1261t^2}{5} + 300\right)\right|_0^6 = \frac{185436864}{55},$$

$$\int\frac{\psi(6,t^2)dt}{t^2-5^2} = \left|t^3\left(\frac{t^8}{11} - \frac{10t^6}{3} + 39t^4 - 164t^2 + 192\right)\right|_0^6 = \frac{99802368}{11},$$

[19] Auf eine directe Ableitung von (43) und (46) aus (5) und (28) haben wir früher deßhalb ver... ..., weil uns einerseits eine einheitliche Behandlung aller aus (5) und (28) hervorgehenden Speciali... ...en wünschenswerth erschien, andererseits aber auch das Verständniß dieser Abhandlung hiedurch wesent... ...schwert worden wäre.

und kann mithin auf diesem Wege ohne Vergleich rascher als unter Benutz
von (28) erledigt werden. [19]

Uebrigens ist leicht einzusehen, daß alle bisher neben der Cubirungsfor
(2) aufgestellten specielleren Ausdrücke nur einen verschwindend kleinen T
jener Fragen beantworten, welche sich mit Hilfe von (2) allgemein lösen la
insoferne ja hinsichtlich $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ unendlich viele Variationen
lässig sind. Obwohl wir nun bereits die wichtigsten derselben genügend erör
haben, dürfte es jedenfalls wünschenswerth erscheinen, als ein Beispiel zu and
möglichen Substitutionsreihen für $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ wenigstens noch folge
Problem zu besprechen:

Wie gestaltet sich die näherungsweise Cubirung eines Ba
stammes, bei welchem zwar die fundamentalen Voraussetzungen
(2) zu treffen, jedoch außer l lediglich die den Abscissen: $x_1 =$
$x_2 = \frac{3l}{8}, x_3 = \frac{l}{2}, x_4 = \frac{5l}{8}, x_5 = \frac{3l}{4}$ zugehörigen Querflächen f_1, f_2, f_3, f
mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmt werden können?

Indem wir die dieser Aufgabe charakteristischen Daten in (2) durch
Specialisirungen: $n = 5, x = \frac{lu}{8} = \delta u,\ x_0 = \infty,\ x_1 = 2\delta,\ x_2 = 3\delta,\ x_3 =$
$x_4 = 5\delta,\ x_5 = 6\delta$ einführen, ergibt sich für V die Relation:

$$V = \frac{l}{16}\left\{\frac{f_1}{12}\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-2)} - \frac{f_2}{3}\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-3)} + \frac{f_3}{2}\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-4)} -\right.$$

$$\left. - \frac{f_4}{3}\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-5)} + \frac{f_5}{12}\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-6)}\right\} = l\left\{\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4 + \gamma\right.$$

aus welcher nach Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-2)} = \left| u\left(\frac{u^4}{5} - \frac{9u^3}{2} + \frac{119u^2}{3} - 171u + 360\right)\right|_0^8 = \frac{5504}{15},\ \gamma_1 = \frac{8}{4}$$

$$\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-3)} = \left| u\left(\frac{u^4}{5} - \frac{17u^3}{4} + \frac{104u^2}{3} - 134u + 240\right)\right|_0^8 = \frac{3584}{15},\ \gamma_2 = -\frac{2}{4}$$

$$\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-4)} = \left| u\left(\frac{u^4}{5} - 4u^3 + \frac{91u^2}{3} - 108u + 180\right)\right|_0^8 = \frac{3424}{15},\ \gamma_3 = \frac{1}{1}$$

$$\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-5)} = \left| u\left(\frac{u^4}{5} - \frac{15u^3}{4} + \frac{80u^2}{3} - 90u + 144\right)\right|_0^8 = \frac{3584}{15},\ \gamma_4 = -\frac{2}{4}$$

$$\int_0^8 \frac{F(6, u)du}{u(u-1)(u-6)} = \left| u\left(\frac{u^4}{5} - \frac{7u^3}{2} + \frac{71u^2}{3} - 77u + 120\right)\right|_0^8 = \frac{5504}{15},\ \gamma_5 = \frac{8}{4}$$

offenbar die einfache Formel:

$$V = \frac{l}{45}\left\{86(f_1 + f_5) + 321 f_3 - 224(f_2 + f_4)\right\} \qquad (47)$$

hervorgeht, deren Coëfficienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ im Ganzen folgende sechs
dingungen erfüllen:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 1,\quad 2\gamma_1 + 3\gamma_2 + 4\gamma_3 + 5\gamma_4 + 6\gamma_5 = 4,$$
$$2^2\gamma_1 + 3^2\gamma_2 + 4^2\gamma_3 + 5^2\gamma_4 + 6^2\gamma_5 = \frac{64}{3},\quad 2^3\gamma_1 + 3^3\gamma_2 + 4^3\gamma_3 + 5^3\gamma_4 + 6^3\gamma_5 = 128,$$
$$\ldots 3^4\gamma_2 + 4^4\gamma_3 + 5^4\gamma_4 + 6^4\gamma_5 = \frac{4096}{5},\quad 2^5\gamma_1 + 3^5\gamma_2 + 4^5\gamma_3 + 5^5\gamma_4 + 6^5\gamma_5 = \frac{16384}{3}.$$

Dieses Resultat gilt daher unter denselben Beschränkungen wie die Aus-ke (17), (19) und (36).

Zum Schlusse unserer Arbeit mag jetzt noch gezeigt werden, in welcher se aus (2) auch eine zur Quadratur gewisser ebener Flächen verwendbare mel von großer Allgemeinheit gewonnen werden kann.

Verstehen wir nämlich unter $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ die den Abscissen $x_0, x_1\ x_2, \ldots$ correspondirenden Ordinaten einer durch die Gleichung:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \tag{48}$$

akterisirten krummen Linie, so liefert die linke Seite von (2) nach Ver-schung der Größen $f_0, f_1, f_2, \ldots f_n$ mit $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ unmittelbar von $x = o$ bis $x = l$ gerechneten Inhalt f jener Fläche, welche von der er-nten Curve und der Abscissenachse begrenzt wird. Ebenso führt jede Specia-ung (2) auf eine gleich gestaltete Specialformel für f, so daß z. B. den ationen (8), (10), (16) und (17) der Reihe nach die Ausdrücke:

$$f = \frac{1}{2}(y_0 + y_1), f = \frac{1}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2), f = \frac{1}{8}\{(y_0 + y_3) + 3(y_1 + y_2)\},$$
$$f = \frac{1}{90}\{7(y_0 + y_4) + 12y_2 + 32(y_1 + y_3)\}$$

prechen, deren Ableitung, wie Professor G. Boole in seinem Werke: „Treatise the Calculus of finite Differences" bewiesen hat, außerdem auch mit Hilfe allgemeinen Satzes:

$$f = \int_0^1 y\,dx = \frac{1}{n}\Big\{ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \Big(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\Big)\frac{\Delta^2 y_0}{2} + \Big(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\Big)\frac{\Delta^3 y_0}{6} +$$
$$+ \Big(\frac{n^5}{5} - \frac{3n^4}{2} + \frac{11n^3}{3} - 3n^2\Big)\frac{\Delta^4 y_0}{24} + \Big(\frac{n^6}{6} - 2n^5 + \frac{35n^4}{4} - \frac{50n^3}{3} + 12n^2\Big)\frac{\Delta^5 y_0}{120} +$$
$$+ \Big(\frac{n^7}{7} - \frac{5n^6}{2} + 17n^5 - \frac{225n^4}{4} + \frac{274n^3}{3} - 60n^2\Big)\frac{\Delta^6 y_0}{720} + \ldots \tag{49}$$

glich wird. Schließlich sei hier noch die Formel:

$$V = \frac{1}{20}\{y_0 + y_2 + y_4 + y_6 + 5(y_1 + y_5) + 6y_3\} \tag{50}$$

acht, welche aus (49) unter den Annahmen: $n = 6$, $\frac{41\Delta^6 y_0}{140} = \frac{3\Delta^6 y_0}{10}$ entspringt zuerst von Weddle in einer kurzen Abhandlung[20]: „On a new and simple for approximating to the area of a figure by means of seven equi-iant ordinates" veröffentlicht wurde. Da übrigens der dieser Beziehung respondirende Ausdruck für V kein größeres Anwendungsgebiet als die ichungen (17), (19), (36) und (47) besitzt, so wäre dessen Aufnahme unter i von uns betrachteten Cubirungsformeln wohl überflüssig gewesen.

---

[20] Cambridge and Dublin mathematical Journal. vol. IX., pag. 79. 80.

K. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme in Wien.

tka J.

Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven

von

J. Sobotka in Wien.

(Mit 13 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1898.)

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CVII. Abth. II. a. Mai 1898.

WIEN, 1898.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Druckschriften

der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wie[n]

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe).

Selbständige Werke.

1. Die internationale Polarforschung 1882—1883. Die österreichische Pola[r]station **Jan Mayen.**

Band I enthält den Vorbericht der Expedition, ferner die astronomische[n,] geographischen, meteorologischen und oceanographische[n] Resultate der Expedition.

Band II umfasst die Polarlicht- und Spectralbeobachtungen auf Ja[n] Mayen.

Band III. Naturhistorischer Theil. 1. Zoologie. 2. Botanik. 3. Mineralogie. Das ganze Werk, drei Quartbände. (Mit 4 Karten, 65 Tafeln und 10 Tex[t]figuren.) . . . . 30 fl. — k

Vorbericht der Expedition. Separatausgabe aus dem I. Bande dieses Werke[s]. Derselbe bildet den beschreibenden Theil der Expedition. (Mit 1 Kar[te] und 3 Tafeln.) . . . . 2 fl. 75 k

2. Deutsche Ausgabe des Werkes: **La Turquie d' Europe** par **A. Bou[é].** Zwei Bände. Lexikonformat. (Mit dem Bildnisse des Verfassers.) . . . . . cart. 10 fl. — k
broch. 9 fl. 50 k

Periodische Publicationen.

[Mathematik und Astronomie.]

Aus den Denkschriften 59. Bd. (1892).

Haerdtl Frh. v., E., über zwei langperiodische Störungsglieder des Mondes, verursac[ht] durch die Anziehung des Planeten Venus. . . . . — fl. 80 k

Hartl, H., Bestimmung von Polhöhe und Azimut auf der Sternwarte in Athen. (Mit 1 Tex[t]figur.) . . . . — fl. 80 k

Unterweger, J., über die Beziehungen der Kometen und Meteorströme zu den Ersche[i]nungen der Sonne. (Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur.) . . . . 2 fl. 10 k

Trabert, W., der tägliche Gang der Temperatur und des Sonnenscheins auf dem Son[n]blickgipfel . . . . 2 fl. — k

Aus den Denkschriften 60. Bd. (1893).

Gegenbauer, L., Arithmetische Untersuchungen. . . . . 1 fl. 20 k

Weiss, E., über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtunge[n] 1 fl. 25 k

Aus den Sitzungsberichten für 1893.

Czuber, E., über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen. (M[it] 1 Tafel.) . . . . — fl. 10 k

Finger, J., über den Hauptpunkt einer beliebigen Axe eines materiellen Punktsystem[s]. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — fl. 25 k

Gegenbauer, L., einige mathematische Theoreme. . . . . — fl. 20 k

— eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung. . . . . — fl. 20 k

Gegenbauer, L., das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(x)$. . . . . — fl. 15 k

— über ein Theorem des Herrn Baker. . . . . — fl. 25 k

— Notiz über die zu einer Fundamentaldiscriminante gehörigen Bernoulli'sch[en] Zahlen. . . . . — fl. 10 k

us den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CVII. Abth. II. a. Mai 1898.

Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven

von

J. Sobotka in Wien.

(Mit 13 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1898.)

Construction von Krümmungskreisen der Integralcurve.

1. Ist

$$y = af(x)$$

ie Gleichung einer auf ein Parallelcoordinatensystem be-ogenen Curve f, und

$$Y = \int f(x)\,dx + c$$

ie Gleichung einer Curve F in demselben Coordinatensystem, obei c eine beliebige, a eine als Constructionseinheit an-enommene Constante bedeutet, so nennt man bekanntlich die urve F eine Integralcurve von f, und umgekehrt ist f die ifferentialcurve von F. Irgend zwei Punkte b, B von f, re-pective F mit gemeinschaftlicher Abscisse heissen correspon-irende Punkte der beiden Curven.

Herr Prof. M. d'Ocagne hat im Jahre 1886 in einem an errn Prof. Abdank-Abakanowicz gerichteten Schreiben[1] nen Ausdruck entwickelt, der eine einfache Construction des rümmungsmittelpunktes einer Integralcurve für irgend einen

[1] Man sehe: »Die Integraphen von Abdank-Abakanowicz, deutsch arbeitet von E. Bitterli, Leipzig (Teubner) 1889« auf S. 160. Auf S. 141, 2 daselbst findet man auch genaue Literaturangaben betreffs der graphischen tegration.

Punkt derselben liefert, wobei jedoch ein rechtwinkelig
Coordinatensystem zu Grunde gelegt wird.

Es heisst dort:

»Zwischen der Subtangente μ einer gegebene Curve und dem Krümmungsradius ρ der entsprech den Integralcurve besteht die folgende merkwürdi Relation:

$$\mu = \rho \cos^2 \Theta \sin \Theta,$$

wo Θ den Neigungswinkel der Tangente der Integr curve gegen die Abscissenaxe bezeichnet.«

Es möge zur Orientirung gleich eingangs betont werd dass die vorliegende Arbeit fast ausschliesslich nur construc geometrische Fragen verfolgt.

Darum soll hier zunächst gezeigt werden, wie die a dieser Relation sich ergebende Construction des Krümmun mittelpunktes sich in einfacher Weise auf geometrischem W in einer Form ableiten lässt, in der sie für Parallelcoordina überhaupt besteht.

Ist nämlich F eine Parabel, deren Axe die Richtung Ordinaten besitzt, dann ist f eine Gerade, was sich rein g metrisch am einfachsten so darlegen lässt, wie es durch He Prof. J. Šolín bereits geschehen ist.

Bezeichnet O — Fig. 1 — den Coordinatenursprung, nehmen wir auf der x-Axe die Strecke $SO = a$ als Einheit so ist S Mittelpunkt des sogenannten Richtstrahlenbüsch d. h. jedem Punkte B von F ist der zu seiner Tangente a parallele Strahl im Strahlenbüschel (S) und somit auch Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ desselben mit der y-Axe zugeordnet. Die allele zu x durch $\mathfrak{B}$ schneidet die Ordinatenlinie von B in correspondirenden Punkte b von f. Es wird somit f durch z Parallelstrahlenbüschel beschrieben, nämlich $(Bb), \ldots$ $(\mathfrak{B}b), \ldots$ Durchläuft nun B eine Parabel, deren Axe zu y allel ist, dann sind diese Parallelstrahlenbüschel perspe denn der erste von ihnen ist der Schein der Punktreihe B auf der Parabel von deren unendlich fernem Punkte, der zw ist der Schein der zur Punktreihe $B, \ldots$ projectiven P reihe $\mathfrak{B}, \ldots$ auf y, und die unendlich ferne Gerade entsp

ı beiden Büscheln sich selbst; das Erzeugniss beider ist somit ine Gerade f.

Legen wir nun durch irgend einen Punkt b eine Anzahl on Curven, die wir als Differentialcurven betrachten und ehmen die sämmtlichen ihnen entsprechenden Integralcurven urch einen dem Punkte b correspondirenden Punkt B gehend n, so werden diese Integralcurven sich im Punkte B berühren; ie gemeinschaftliche Tangente ist ja zu dem entsprechenden ichtstrahl $(S\mathfrak{B})$ parallel. Es können sich somit die Bogen-

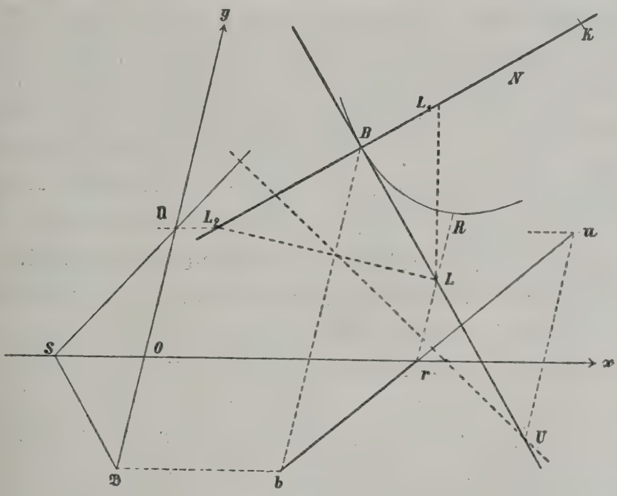


Fig. 1.

emente in B für die einzelnen Integralcurven höchstens um ne unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung unterscheiden.

Nehmen wir weiter an, dass sich sämmtliche Differential- ırven auch noch in b berühren, dann haben sämmtliche ihnen ıgehörige Integralcurven für den Punkt B auch denselben ontingenzwinkel und weisen somit alle dieselbe Krümmung ı Punkte B auf.

Daher der Satz:

Der Tangente t der Differentialcurve f in irgend nem Punkte b derselben entspricht als Integral- ırve eine Parabel $\mathfrak{F}$, welche die Integralcurve F on f in dem dem Punkte b correspondirenden Punkte B culirt.

Die Construction des Krümmungkreises der Integralcurve von f in irgend einem Punkte derselben ist demnach zurüc geführt auf die Construction des Krümmungskreises an ei Parabel $\mathfrak{F}$ in diesem Punkte. Dies geschieht am besten r Hilfe der sogenannten Steiner'schen Parabel.[1] Die normalco jugirten Strahlen zu den Geraden des Büschels um B in Bez auf $\mathfrak{F}$ hüllen eine Parabel $\mathfrak{P}$ ein, welche die Normale c Punktes B an F in dem Mittelpunkte K des fraglichen Krü mungskreises berührt. Da nun die Parabel die Tangente T u die Normale N an F für den Punkt B berührt und ihre L gerade mit der Ordinatenlinie von B identisch ist, so wird m nur noch eine Tangente derselben zu ermitteln haben, um da mit Hilfe des Brianchon'schen Sechsseits K zu construiren.

Man sieht leicht ein, dass irgend eine Tangente von folgendermassen erhalten wird. Man zieht — Fig. 1 — irg einen Strahl $S\mathfrak{U}$ im Richtstrahlenbüschel und durch sei Schnitt $\mathfrak{U}$ mit y die Parallele zu x, welche die Tangente t Differentialcurve im Punkte u schneidet. Die Ordinatenl von u trifft die Tangente des Punktes B an die Integralcu in U; alsdann ist die Senkrechte durch U auf $S\mathfrak{U}$ eine Tange von $\mathfrak{P}$.

Bei Annahme rechtwinkeliger Coordinaten ergibt sich unserer Construction ohneweiters die Richtigkeit der du d'Ocagne gegebenen Construction, sowie der Formel

$$\mu = \rho \cos^2\Theta \sin\Theta;$$

man hat bloss zu beachten, dass dem Schnittpunkte r der T gente t mit x auf der Parabel $\mathfrak{F}$ derjenige Punkt R entspri in welchem die Tangente an dieselbe parallel zu x ist, bei re winkeligen Coordinaten also der Scheitel R der Parabel $\mathfrak{F}$.

2. Die soeben entwickelte Construction ist somit sehr fach. Wenn ich hier trotzdem noch bei derselben verweile geschieht dies, um einige nicht uninteressante Ausdru formen für dieselbe zu entwickeln.

---

[1] Cf. C. Pelz, Die Krümmungshalbmesserconstructionen der K schnitte... (Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft der Wissensch 1879).

Die Parabel $\mathfrak{P}$ berührt T, dann N in K, und ihre Axe ist enkrecht zu y. Dies gestattet, wie aus geläufigen Eigenschaften er Parabel oder aus der Figur eines hier sich ergebenden rianchon'schen Sechsseits mit Leichtigkeit folgt, unserer Contruction folgende Fassung zu geben (Fig. 1):

Wir legen durch den Punkt r, in welchem die 'angente t in b an die Differentialcurve die Axe x chneidet, die Parallele zur y-Axe. Dieselbe möge ie Tangente T in B an die Integralcurve im Punkte L effen. Durch L ziehen wir die Senkrechten auf die oordinatenaxen x, y bis zum Schnitte L_1, respective $_2$ mit der Normalen N; alsdann ist die Strecke L_2L_1 er Grösse und dem Sinne nach gleich dem gesuchten rümmungshalbmesser BK (I).

Alle Parabeln $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$, welche die Geraden T, N, tztere in K berühren, bilden eine Parabelnschaar $[\mathfrak{P}]$. Es soll un gezeigt werden, wie man irgend eine Parabel $\mathfrak{P}_1$ dieser chaar, und mit deren Hilfe dann K selbst, einfach construiren ann.

Von jeder Parabel in $[\mathfrak{P}]$ kennen wir die Tangenten T, N; wird also, damit diese Parabel benützt werden kann, nöthig in, von ihr noch zwei weitere Tangenten anzugeben. Als lche wählen wir die eine v senkrecht zu x, die andere v' senkcht zu y. Diese Tangenten mögen beziehungsweise T in den unkten V, V' und N in den Punkten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ schneiden.

Um also irgend eine Parabel $\mathfrak{P}_1$ von $[\mathfrak{P}]$ festzulegen, wird sich lediglich darum handeln, zu irgend einem Punkte V den tsprechenden V' anzugeben oder umgekehrt. Zu dem Ende achten wir, dass, wenn $\mathfrak{P}_1$ die Schaar $[\mathfrak{P}]$ durchläuft, die angente v einen Parallelstrahlenbüschel und die Tangente v' nen zu diesem projectiven Parallelstrahlenbüschel, einer beannten Eigenschaft der Kegelschnittschaar zufolge, beschreibt. emgemäss werden auch die Punktreihen (V), (V'), in welchen ese Büschel die Tangente T schneiden, projectiv sein.

Mit Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}$, für die (LL_1) ja auch eine angente ist, entspricht dem Punkte L von (V) der unendlich rne Punkt von (V'), denn hier fällt v' mit der unendlich fernen eraden zusammen. Der Punkt B ist für beide Punktreihen sich

selbst entsprechend. Projiciren wir somit — Fig. 2 — die Punk
reihe (V) in der Richtung von x auf die Ordinatenlinie $(I$
nach der Punktreihe $(V^{\times})$, so sind (V'), $(V^{\times})$ perspectiv.
Perspectivcentrum D wollen wir nun ermitteln.

Wir ziehen durch den dem Punkte L in (V) entsprechend
Punkt $L^{\times}$ in $(V^{\times})$ die Parallele T' zu T, so muss D auf T' lieg
$\mathfrak{P}$ ist diejenige Parabel in $[\mathfrak{P}]$, deren Axe senkrecht zu y ste

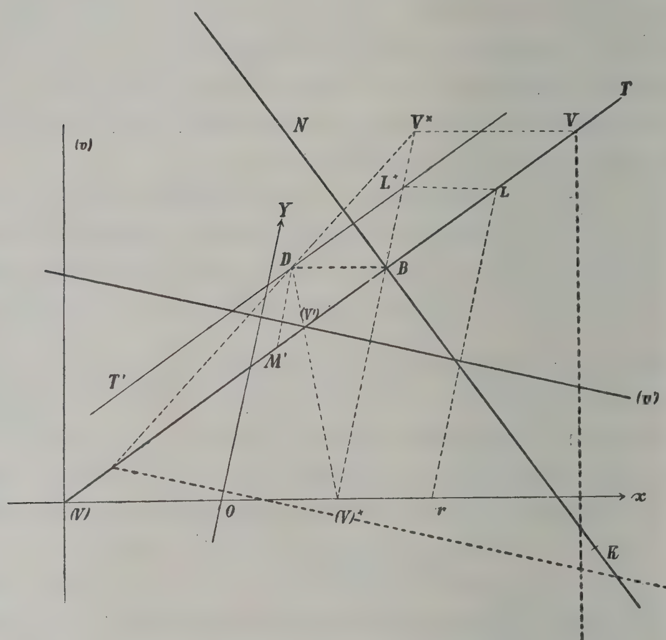


Fig. 2.

wir haben im Satze (I) die auf dieselbe gegründete Construct
von K ausgesprochen. Construiren wir jetzt die in $[\mathfrak{P}]$
haltene Parabel, deren Axe senkrecht zu x ist, so finden wi
Anwendung des Brianchon'schen Sechsseits, dass für d
Parabel die zu y senkrechte Tangente die Gerade T im Pun
M' derart schneidet, dass $M'B = BL$ wird. Da M und
auch $M^{\times}$ unendlich fern liegt, so folgt daraus, dass die durch
parallel zu (Bb) gezogene Gerade gleichfalls durch D geht.
ist somit D der Schnitt dieser Geraden mit T'.

Daraus geht D in einfacher Weise hervor, denn man hat nur die Strecke BD der Entfernung des Punktes r vom Endpunkte der Abscisse für den Punkt B äquipollent zu machen.

Zieht man nun durch den Punkt D irgend eine Gerade, welche T in V' und (Bb) in $V^\times$ schneidet und dann durch $V^\times$ die Parallele zu x, bis sie T in V schneidet, so bestimmen T, N, die Senkrechte durch V' zu y und die Senkrechte durch V zu x als Tangenten eine Parabel, welche N in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkte K berührt.

Für uns ist aber nur der folgende besondere Fall dieser Ausdrucksform unserer Construction von Interesse.

Errichtet man im Schnittpunkte (V) der Tangente T mit der Abscissenaxe zu dieser die Senkrechte (v) und im Schnittpunkte (V') von T mit der Geraden, welche D mit dem Endpunkt der Abscisse von B verbindet, die Senkrechte (v') zu y, so sind $T, N, (v), (v')$ vier Tangenten einer Parabel, welche N im Punkte K berührt (II).

Weil die Tangenten einer Parabel auf irgend zweien von ihnen ähnliche Punktreihen ausschneiden, so folgt für jede Parabel in $[\mathfrak{P}]$ die Proportion

$$\frac{\mathfrak{V}K}{\mathfrak{V}'K} = \frac{VB}{V'B},$$

welche ebenfalls eine Ausdrucksform unserer Construction liefert. Also:

Bringen wir die Geraden (v), (v') des Satzes (II) zum Schnitte in $\mathfrak{V}$, beziehungsweise $\mathfrak{V}'$ mit N, so ergibt sich der gesuchte Krümmungsmittelpunkt K aus der Relation

$$\mathfrak{V}\mathfrak{V}' : \mathfrak{V}K : \mathfrak{V}'K = VV' : VB : V'B. \tag{III}$$

3. Schliesst die Tangente der Integralcurve F mit den Axen x, y, beziehungsweise die Winkel α, β ein, ist ω der Winkel dieser Axen, μ wiederum die Subtangente der Differentialcurve f und ρ der fragliche Krümmungsradius, so erhalten wir auf Grund des Satzes (I) leicht den Ausdruck

$$\rho = \frac{\mu \sin^2 \omega}{\sin \alpha \sin^2 \beta}. \tag{1}$$

Betrachten wir f selbst als Integralcurve, so lässt sich z
ihr nach gleichem Vorgang, etwa auf Grund derselben Co
structionseinheit a, die entsprechende Differentialcurve $\mathfrak{f}$ a
leiten, so dass jedem Punkte b von f ein Punkt $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{f}$ en
spricht.

Die Ordinaten der correspondirenden Punkte B, b, $\mathfrak{b}$ sei
beziehungsweise Y, y, η. Alsdann ist — Fig. 1 —

$$\mu = \frac{ay}{\eta},$$

woraus mit Berücksichtigung der Formel (1) sich ergibt

$$\rho = \frac{a^2}{\eta} \cdot \frac{\sin^2 \omega}{\sin^3 \beta}. \qquad ($$

Im Dreieck $SO\mathfrak{B}$ ist

$$S\mathfrak{B} = \sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos \omega}.$$

Somit ist weiter

$$\sin \beta = \frac{a \sin \omega}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos \omega}}.$$

Setzen wir diesen Werth in (1′) ein, so kommt schliessl

$$\rho = \frac{(a^2 - 2ay \cos \omega + y^2)^{3/2}}{a\eta \sin^2 \omega}.$$

Da nun

$$y = a \,.\, \frac{dY}{dx}, \qquad \eta = a^2 \frac{d^2 Y}{da^2},$$

so erhalten wir aus (2) den Ausdruck

$$\rho = \frac{\left[1 - 2 \cos \omega \frac{dY}{dx} + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\sin \omega \,.\, \frac{d^2 Y}{dx^2}}$$

und aus diesem den specielleren Ausdruck für ρ in re
winkeligen Coordinaten, wenn wir $\omega = \frac{\pi}{2}$ setzen.

Wir haben hier somit die bekannte Formel für den Krümmungsradius einer Curve auf einem elementar geometrischen Wege aus unserer Construction erhalten; umgekehrt bietet die Einführung die Differentialcurven eine allgemeine und geeignete Form für die Construction des Ausdruckes (2′) für ρ.

II. Integralcurven in Polarcoordinaten und infinitesimale Betrachtungen an denselben.

4. Im Vorangehenden haben wir eine Integralcurve f aus einer gegebenen Differentialcurve f' oder umgekehrt durch Vermittelung von Parallelcoordinaten abgeleitet. Eine Verallgemeinerung der einschlägigen Betrachtungen liegt sehr nahe; man wird das Parallelcoordinatensystem einfach durch irgend ein anderes Coordinatensystem ersetzen, um zu neuen Arten von Integralcurven zu gelangen. Dass man bis jetzt nur die früher erwähnten Integralcurven in der angeführten Weise berücksichtigt hat, liegt in deren eminenten praktischen Verwendbarkeit in den Ingenieurwissenschaften, während andere Integralcurven wohl kaum geeignet sind, eine grosse Verwerthung in dieser Richtung zu erlangen. Für unsere speciellen Betrachtungen dürften sie aber ein gewisses Interesse beanspruchen.

Ist

$$r' = f(\varphi)$$

die Gleichung irgend einer Curve f' in Polcoordinaten, für O als Pol der Coordinatensystems, so kann man zunächst aus dieser Curve eine Curve f ableiten, deren Gleichung in demselben Coordinatensystem

$$r = \int f(\varphi)\, d\varphi + c$$

ist, in der c eine beliebige Constante bedeutet, so dass also umgekehrt die Curve f' aus f als Differentialcurve durch die Beziehung

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \tag{1}$$

abgeleitet wird.

Nun drückt die Gleichung (1) die Länge der Subnormale der Curve f für irgend einen Punkt derselben aus, wie sonst auch elementargeometrisch dargethan wird. Wenn wir somit f'

in einer um O um einen rechten Winkel im entsprechende[n] Sinne gedrehten Lage darstellen, so haben wir das Ergebniss

Beschreibt ein Punkt P eine Curve f, so beschreibt der Endpunkt P' der in Bezug auf irgend einen festen Punkt O als Pol genommenen Subnormale der Curve die polare Differentialcurve f' von f gleichfalls in Bezug auf O als Pol.

In dieser Lage wollen wir auch die Curven f, f' stets betrachten.

Aus der Unbestimmtheit der Constante c folgt, dass, wenn P' die Curve f' beschreibt, jeder Punkt $P, P_1, P_2, \ldots$ auf $(OP$ eine Integralcurve beschreibt. Wir sagen, dass diese Punkte dem Punkte P' correspondiren und untereinander homolog sind. Ebenso werden die Tangenten u. s. w. dieser Curven in homologen Punkten als homolog bezeichnet. Daher der Satz:

Die homologen Normalen sämmtlicher polaren Integralcurven, welche aus einer Curve f' abgeleitet werden können, schneiden sich im correspondirenden Punkte ihrer gemeinschaftlichen Differentialcurve f

Aus diesem Satze entnehmen wir sofort auch die Eigenschaft

Wenn sich Curven in irgend einem Punkte P berühren, dann findet im correspondirenden Punkte P zwischen den ihnen entsprechenden Integralcurven Osculation statt.

Man wird desshalb in der Lage sein, den Krümmungsmittelpunkt von f für den Punkt P zu construiren, wenn die Tangente t' an f' in P' gegeben ist und umgekehrt.[1]

Mit dieser Aufgabe wollen wir uns jetzt beschäftigen.

5. Behalten wir die soeben gebrauchten Bezeichnungen bei und es sei — Fig. 3 — weiter $PP' = n$ die Normale, $P\mathfrak{P}' = t$ die Tangente, K der Krümmungsmittelpunkt, $PK =$ der Krümmungsradius, $\sphericalangle OP\mathfrak{P}' = \tau$ der Winkel der Tangent

[1] M. d'Ocagne Cours de géom. descriptive et de géom. infinitésimal (1896), Art. 267; die dort gegebene Lösung lässt sich leicht auch aus unsere Construction ableiten. Cf. Construction géometrique du centre de courbure.. von Husquin de Rhéville in den »Nouv. Ann. de mathématiques«, 1891 p. 410 u. f.

mit dem Leitstrahl der Curve f für den Punkt P; t' sei die Tangente von f' in P'.

Handelt sich's zuerst darum, K zu suchen, wenn t' gegeben ist, so können wir, wie leicht einzusehen ist, behufs dieser Construction die Curven f, f' durch die Tangenten t, t' selbst ersetzen. Nachdem nun die Strecke PP' von O unter rechtem Winkel gesehen wird, so umhüllt die Gerade (PP') einen Kegelschnitt k, wenn sich P auf t, P' auf t' bewegt. Dieser Kegel-

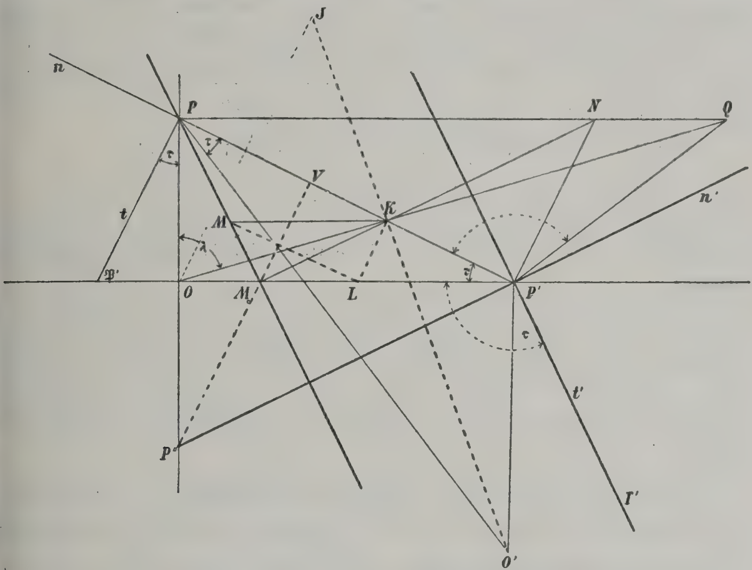


Fig. 3.

schnitt hat einen Brennpunkt in O und berührt die Geraden t, t' (PP'), letztere im Punkte K. Es ist nun klar, dass dieser Kegelschnitt auch die umgekehrte Aufgabe löst, nämlich t' zu finden, wenn K gegeben ist.

Um also etwa t' zu erhalten, hat man folgende elementare Aufgabe zu lösen.

Der Kegelschnitt k ist durch den Brennpunkt O, die Tangenten t, n und den Berührungspunkt K der letzteren gegeben; es ist die durch P' an k gehende zweite Tangente t' zu ermitteln.

Hiezu wollen wir den Satz heranziehen: Verbindet man den Schnittpunkt zweier Tangenten an einen Kegelschnitt mit

den Brennpunkten desselben, so bildet die eine Tangente mit der einen Verbindungslinie denselben Winkel, wie die andere Verbindungslinie mit der anderen Tangente.

Dieser Satz gestattet zunächst, den zweiten Brennpunkt O' von k zu finden. Überträgt man den Winkel τ nach $P'PO'$, so liegt diesem Satze zufolge O' auf (PO'). Verbindet man den zu O in Bezug auf (PP') symmetrisch gelegenen Punkt J mit dem Punkte K, so liegt O' auch auf der Geraden (JK); somit ergibt sich O' als Schnitt der besagten Geraden. Errichtet man in P die Senkrechte (PQ) zum Leitstrahl (OP) und schneidet dieselbe in Q mit (OK), so ist wegen $\sphericalangle QPP' = \tau$ der Schnittpunkt Q symmetrisch zu O' bezüglich (PP').

Zieht man durch P' die Gerade t' derart, dass

$$\sphericalangle (t', P'O') = \tau,$$

so gestaltet sich schliesslich die Construction von t' folgendermassen:

In P errichtet man die Senkrechte zu (OP) und bringt sie in Q mit (OK) zum Schnitt; hierauf zieht man durch P' die Gerade $P'T'$ so, dass $\sphericalangle OP'T' = \sphericalangle QP'P$. Alsdann ist $t' \equiv P'T'$ die gesuchte Tangente von f'.

6. Weil wir späterhin häufiger die Normale n' der Curve f' in P' benützen werden als die Tangente t' selbst, so können wir uns hier damit begnügen, eine Gerade zu suchen, die parallel zu t' ist, wenn man eine solche Gerade etwa noch durch eine bequemere Construction zu ermitteln im Stande ist. Dies ist aber der Fall.

Errichtet man in K die Senkrechte zu n bis zum Schnitte L mit (OP') und zieht man durch L die Parallele zu n, durch K die Parallele zu (OP'), so schneiden sich beide in M und die Gerade (PM) gibt bereits die Richtung von t'; also die durch P' zu ihr gefällte Senkrechte ist die Normale n' von f'.

Um dies zu erkennen, setzen wir $\sphericalangle POK = \lambda$, dann geht aus dem Dreiecke POK die Proportion

$$r : \rho = \cos(\lambda - \tau) : \sin \lambda$$

hervor.

Aus dem Dreiecke KOP' ergibt sich die Proportion

$$KP' : r' = \cos\lambda : \cos(\lambda - \tau).$$

Aus beiden Proportionen kommt

$$KP' : r' = \rho : r \operatorname{tg}\lambda,$$

woraus, da

$$\triangle LKP' \sim POP',$$

folgt

$$LP' : PP' = \rho : PQ$$

oder

$$MK : PK = PP' : PQ.$$

Somit sind die Dreiecke PMK, $QP'P$ ähnlich, demgemäss $\sphericalangle KMP = \sphericalangle PP'Q$ und in Folge dessen $\sphericalangle OP'T' = KMP$, so dass thatsächlich $(MP) \| t'$ ist.

Errichtet man in P' die Senkrechte zu n, welche (PQ) in N schneiden möge, so liegen die Dreiecke MKL, PNP' ähnlich für den Schnitt von (MP) mit (OP') als Ähnlichkeitscentrum. Daraus entnehmen wir:

Die Senkrechten durch P zu r und durch P' zu n schneiden sich in einem Punkte N, dessen Verbindungsgerade mit K die Gerade (OP') bereits in einem Punkte M_0 von (PM) trifft.

Die Normale n' an f' in P' schneide (OP) im Punkte P''; es ist klar, dass P'' die Differentialcurve f'' von f', also die zweite Differentialcurve von f beschreibt. Wir setzen demgemäss $OP'' = r''$ und es ist

$$r'' = \frac{dr'}{d\varphi} = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}.$$

Die eben entwickelten Constructionen des Punktes P'' aus K sind alle umkehrbar. Um also K zu construiren, wenn P'' oder t' gegeben ist, wird man beispielsweise den Punkt N als Schnitt der in P zu r und in P' zu n errichteten Senkrechten und dann den Schnitt M_0 der von P auf n' gefällten Senkrechten mit r' ermitteln; alsdann schneidet die Gerade (M_0N) die Normale n im gesuchten Punkte K.

7. Aus der entwickelten Construction ergeben sich sofort die Proportionen

$$(M_0O+r'):PN=(n-\rho):\rho,$$
$$PN:n=n:r',$$

wobei schon auf den Richtungssinn der Strecken Bedacht genommen worden ist. Aus diesen Proportionen folgt weiter

$$(M_0O+r'):n=n(n-\rho):r'\rho.$$

Die ähnlichen Dreiecke PM_0O, $P'P''O$ liefern

$$OP'':OM_0=r':r$$

oder

$$M_0O=-\frac{rr''}{r'}.$$

Setzen wir diesen Werth für M_0O in die vorletzte Proportion ein, so kommt nach einfacher Umformung

$$\rho=\frac{n^3}{n^2+r'^2-rr''}$$

oder, da $n^2=r^2+r'^2$,

$$\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}. \tag{2}$$

Ersetzt man hierin r' durch $\frac{dr}{d\varphi}$, r'' durch $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$, so gewinnen wir dadurch auf unserem constructiven Wege die bekannte Formel

$$\rho=\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}. \tag{2'}$$

Aus $\rho=n^3:(n^2+r'^2-rr'')$ folgt

$$\rho\sin^3\tau=\frac{r^3}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

Dies gibt zur Berechnung von r'' entweder die Gleichung

$$-r''+r+2r\cot^2\tau=\frac{r^2}{\rho\sin^3\tau}$$

der die Gleichung

$$r''+r=\frac{r}{\rho\sin^3\tau}(2\rho\sin\tau-r) \tag{3}$$

der schliesslich die Gleichung

$$r''+r=\frac{2r}{\sin^2\tau}-\frac{r^2}{\rho\sin^3\tau}. \tag{4}$$

8. Die in diesem Abschnitt erläuterten Constructionen ssen sich noch etwas vereinfachen und mit Constructionen, e sich auf ein bewegliches, unveränderliches System in der bene beziehen, in Einklang bringen.

Für unsere Zwecke handelt es sich hauptsächlich um den unkt P'', wenn K vorliegt. Dieser Punkt kann auf Grund der ıs dem Dreieck $PP'N$ abgeleiteten Construction direct ermittelt erden. M_0 ist nämlich — Fig. 3 — der Höhenschnittpunkt des reieckes $PP'P''$, woraus folgt:

Führt man durch P die Senkrechte zu r, durch P' u n und verbindet den Schnitt N dieser Senkrechten it K, so erhält man auf r' den Punkt M_0; die Senkchte von M_0 auf n trifft r im Punkte P''.

Wenn nun diese Senkrechte $(P''M_0)$ die Normale n in V hneidet, so liegen die Dreiecke M_0VP', $NP'P$ ähnlich; K ist ıs Ähnlichkeitscentrum, KP', KP und KV, KP' sind Paare ch entsprechender Strecken; somit ist

$$KP':KP=KV:KP' \tag{5}$$

ler

$$\overline{KP'}^2=KV.KP. \tag{6}$$

Die letztangeführte Construction lässt sich auch folgender-assen abändern — Fig. 4 —

Man bringt (OK) mit der durch P' zu r parallel ezogenen Geraden in E zum Schnitt; die Senkchte durch E zu (OP) liefert auf n den Punkt V; die enkrechte durch V zu n trifft r in P''.

Die Richtigkeit dieser Construction erhellt daraus, dass K iederum das Ähnlichkeitscentrum der ähnlich liegenden Dreike POP', $P'EV$ ist, aus denen wieder die Proportion (5) rvorgeht.

Verlängert man (EV) bis zum Schnitt V_0 mit (OP), so ist $V_0 E = OP'$, also

$$V_0 E : PN = \cos^2 \tau$$

und da auch

$$P'' V_0 : P'' P = \cos^2 \tau,$$

so geht die Gerade (NE) durch P''.

Bringt man somit die zu (OP) parallele Gerade $(P'E)$ mit (OK) in E zum Schnitte, verbindet E mit dem Schnittpunkte N der Senkrechten (PN), $(P'N)$ zu (OP) respective (PP'), so trifft die Verbindungsgerade (NE) den Leitstrahl (OP) im Punkte P''.

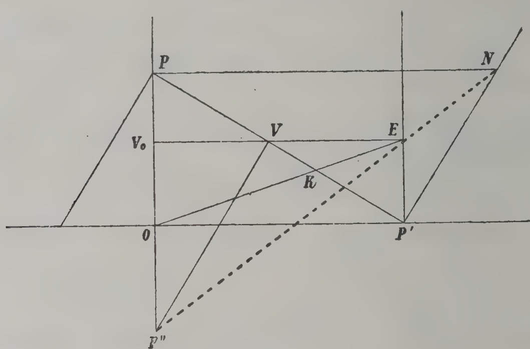


Fig. 4.

Die hier ausgesprochenen Constructionen sind alle umkehrbar; sie lassen also auch K finden, wenn P'' gegeben ist.

Dieselben hängen unmittelbar mit Constructionen zusammen, denen wir bei der Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems begegnen. Wir können auch thatsächlich zum Zwecke der Ableitung des Punktes P'' aus K oder umgekehrt annehmen, dass sich auf (OP) eine unveränderliche Punktreihe bewegt, so zwar, dass ihr Träger r beständig durch O geht und dass P eine Curve beschreibt, deren momentaner Krümmungsmittelpunkt in K liegt. Alsdann ist P' momentaner Drehungspol, in dem sich auch in der That die homologen Normalen sämmtlicher der Curve f' gehöriger Integralcurven schneiden. $(P'P'')$ ist die Normale in P' an die Polcurve und in der, den Bewegungsmoment charakterisirenden quadratischen Verwandtschaft bilden P, K ein Paar entsprechender Punkte.

Wir wollen nun auf Grund dieser Verwandtschaft auf dem trahle (PP') den Wendepunkt der umgekehrten Bewegung onstruiren. Wenden wir hiefür eine bekannte, von Grübler errührende Construction geeignet an, so gelangen wir zu der n vorletzten Satz ausgesprochenen Construction zunächst des it V bezeichneten Punktes als des fraglichen Wendepols. Nun nthält der zugehörige Wendekreis den Punkt O, weil (OP) eständig durch O geht, weiter den Punkt P' und berührt die angente t' in P' an die Polcurve; somit ist $P'P''$ ein Durchesser desselben; es muss daher $\sphericalangle P'VP''$ ein rechter Winkel ein. Diese Überlegung liefert also genau die vollständige Conruction des erwähnten Satzes, sowie die aus der Geometrie er Bewegung gleichfalls bekannte Relation (6) von Neuem.[1]

Auf die Bewegung des unveränderlichen ebenen Systems hrt uns schon die Definitionsgleichung

$$r = \int f(\varphi)\, d\varphi + c$$

lbst direct und zu unseren Constructionen hätten wir auch adurch gelangen können, dass wir behufs Ermittelung von K e Differentialcurve f' durch einen Kreis k' ersetzen dürfen, elcher sie in P' berührt und durch den Pol O geht. Man sieht fort ein, wenn wir den Kreis k' als Integralcurve betrachten, ıss seine Differentialcurve mit ihm identisch ist und dass mit sämmtliche Integralcurven von k' Pascal'sche Schneckenien sein werden.

Aus unserer kinematisch geometrischen Betrachtung erllt unmittelbar, dass die homologen Krümmungmittelpunkte mmtlicher polaren Integralcurven, welche einer Differentialırve entsprechen, auf einem Kegelschnitte u liegen, welcher n über $P'P''$ als Durchmesser beschriebenen Kreis v in P' culirt, durch den Mittelpunkt desselben, sowie durch den ittelpunkt der Strecke OP' und endlich durch die Doppelınkte der Involution, in welcher (OP) von der Rechtwinkelvolution um P' geschnitten wird, geht.

---

[1] Die Construction von Grübler wurde in Schlömilch's Zeitschrift für ıth. und Phys., Bd. 29, S. 310, veröffentlicht; dieselbe findet sich auch in hönflies' Geometrie der Bewegung, S. 31, Fig. 12.

Ist nun $P'P''$ gegeben, so ist der Kegelschnitt u desshalb sofort bestimmt. Denn u und v liegen centrisch collinear für P' als Centrum der Collineation. Nachdem für diese Lage den absoluten Punkten von v die Schnittpunkte auf OP ihrer Verbindungsstrahlen mit P' entsprechen, so ist (OP) die Gegenaxe im System des Kegelschnittes u, und die Parallele durch P' zu (OP) ist somit die Axe unserer Collineation. In dieser entspricht beispielsweise der im System des Kreises v gelegenen Geraden (VE) die Gerade (OE); und da die erste den Punkt V von v enthält, so geht die zweite durch den Punkt K von u. Durch die centrische Collineation wird also neuerdings die Grübler'sche Construction erwiesen. Umgekehrt findet man den Kegelschnitt u aus dem Kreis v durch die Grübler'sche Construction. Da wir diese zuerst unabhängig von kinematisch geometrischen Betrachtungen erhalten haben, so sehen wir nun auch, wie man ebenfalls, ohne derartige Betrachtungen zu Rathe ziehen zu müssen, zum Kegelschnitt u selbst hätte gelangen können.

III. Analoge Betrachtungen für inverse Integralcurven.

9. Die Differentialcurve f' des vorigen Abschnittes fü irgend eine gegebene Curve F wurde von den Endpunkten de Subnormalen dieser Curve in Bezug auf einen als Pol ange nommenen Punkt O beschrieben. Ziehen wir nun die Curve in Betracht, die der Endpunkt $\mathfrak{P}'$ der Subtangente in Bezu auf O beschreibt, wenn ein Punkt P die gegebene Curve durchläuft. Ist $\mathfrak{r}' = O\mathfrak{P}'$ die Länge des Leitstrahles für irgen einen Punkt von $\mathfrak{f}'$, so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreieck $\mathfrak{P}'PP'$ die Beziehung

$$\mathfrak{r}'r' = -r^2$$

oder

$$\frac{1}{\mathfrak{r}'} = -\frac{r'}{r^2},$$

welche Relation sich auch schreiben lässt

$$\frac{1}{\mathfrak{r}'} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}. \quad (1$$

Dies ist die Gleichung, durch welche die Curve $\mathfrak{f}'$ aus F ogeleitet wird. Wir wollen desshalb $\mathfrak{f}'$ die inverse Diffe-entialcurve von F und umgekehrt die Curve F eine inverse ntegralcurve von $\mathfrak{f}'$ nennen.

Wäre also

$$\mathfrak{r}' = f(\varphi)$$

e Gleichung von $\mathfrak{f}'$, so würde die Gleichung der sämmtlichen igehörigen inversen Integralcurven lauten:

$$\frac{1}{r} = \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)} + c. \tag{2}$$

Daraus folgt zunächst sogleich:

Die homologen Tangenten sämmtlicher inverser tegralcurven einer gegebenen Curve schneiden ch in dem correspondirenden Punkte derselben.

Handelt es sich wiederum um die Ableitung der Tangente $\mathfrak{t}'$ n $\mathfrak{f}'$, wenn der Krümmungsmittelpunkt K von F in P gegeben : oder umgekehrt, so kann man F durch einen Kegelschnitt k setzt denken, welcher F in P osculirt und in O einen Brenn-ınkt hat; alsdann ist $\mathfrak{t}'$ die dem Brennpunkte O zugehörige itgerade dieses Kegelschnittes. Die Senkrechte a zu $\mathfrak{t}'$ durch O die Hauptaxe von k. Um also K zu construiren, wenn $\mathfrak{t}'$ ge-ben ist, führt man — Fig. 5 — vom Schnittpunkte M der ke a mit der Normalen n von F in P die Senkrechte zu n, bis (OP) in L trifft; die Senkrechte in L zum Leitstrahl (OP) stimmt dann auf n den fraglichen Punkt K. Die Umkehrung eser Construction liefert $\mathfrak{t}'$, wenn K gegeben ist.

Die Tangente $\mathfrak{t}'$ möge (OP) im Punkte $\mathfrak{P}''$ schneiden; als-nn beschreibt $\mathfrak{P}''$ die zweite inverse Differentialcurve $\mathfrak{f}''$ n F; $O\mathfrak{P}'' = \mathfrak{r}''$ ist der Leitstrahl von $\mathfrak{P}''$ u. s. f.

10. Um eine metrische Relation für die gegebene Con-uction zu erhalten, bezeichnen wir noch mit U den Fuss-nkt der Senkrechten von M auf (OP), so ist

$$UM = UP \cot\tau = \frac{r}{\mathfrak{r}'} . UP \tag{3}$$

d

$$UP = \rho \sin^3\tau.$$

Da

$$\triangle O\mathfrak{P}''\mathfrak{P}' \sim \triangle UMO,$$

so folgt daraus die Proportion

$$\mathfrak{r}' : \mathfrak{r}'' = (OP + PU) : UM,$$

wenn man auch schon auf das Vorzeichen der Strecken ent-

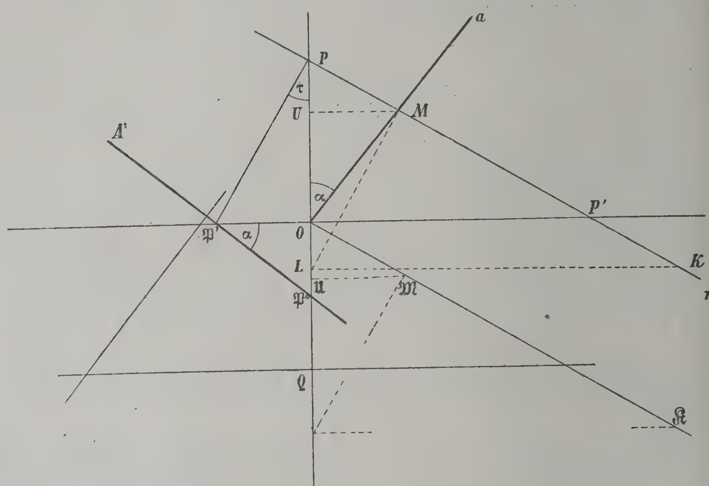


Fig. 5.

sprechend Rücksicht nimmt und daran festhält, dass die posi-
tive Richtung von $\mathfrak{r}''$ entgegengesetzt der von r ist.

Unsere Proportion gibt also

$$\mathfrak{r}' : \mathfrak{r}'' = (r - \rho \sin^3 \tau) : \frac{r}{\mathfrak{r}'} \rho \sin^3 \tau,$$

woraus durch einfache Umformung die Relation hervorgeht

$$\frac{1}{\mathfrak{r}''} = \frac{1}{\rho \sin^3 \tau} - \frac{1}{r} \qquad (4$$

oder

$$\frac{1}{\rho \sin^3 \tau} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}''}. \qquad (4$$

Nehmen wir dabei die Richtung von O nach P stets a
positiv an, so ist $\rho \sin \tau$ und also auch $\rho \sin^3 \tau$ gleichfalls a

ne positive Grösse anzusehen, wenn K mit O auf derselben eite von t liegt; andernfalls ist $\rho \sin^3 \tau$ negativ, wie aus unserer bleitung hervorgeht. Diese Bemerkung gilt offenbar auch ezüglich der Formeln (3) und (4) des vorigen Abschnittes und soll auch für die Folge ihr Rechnung getragen werden.

Herr Prof. Mannheim beschäftigte sich in eingehender Veise und wiederholt, wenn auch aus anderem Anlasse, mit er vorliegenden Construction.[1] Er stellt sich nämlich folgende ufgabe.

Ein rechtwinkeliges Dreieck aoa', welches beweglich und eränderlich ist, habe den Scheitel seines rechten Winkels im sten Punkte o, seine Hypothenuse berühre im Eckpunkte a ne Curve (a); es ist die Tangente in a' an die durch diesen unkt beschriebene Curve (a') zu construiren.

Hierin gelangt er in anderer Weise auch zu einer Formel, elche sich von (4) nur in den Vorzeichen unterscheidet. Wir itten uns hier auf die Formel und Construction, wie sie Herr Mannheim entwickelt hat, wohl auch nur berufen können; er Vollständigkeit unserer Entwickelung halber ist es jedoch cht geschehen. Es muss hier bemerkt werden, dass die im orliegenden gegebene Ableitung sich übrigens aus den Beachtungen des soeben citirten Werkes auf S. 488 und 493 fort ergibt und dass, wenn die Formel (4) für die Construction rwerthet werden soll, auf das Vorzeichen der einzelnen lieder mit Vorsicht Bedacht genommen werden muss.

Da nun

$$\sin \tau = \frac{\mathfrak{r}'}{\sqrt{r^2+\mathfrak{r}'^2}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\mathfrak{r}'^2}}},$$

folgt aus (4'), dass

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\mathfrak{r}''}\right)\rho = \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\mathfrak{r}'^2}\right)^{3/2} : \frac{1}{r^3}. \tag{5}$$

Setzen wir in der Polargleichung einer Curve $r = \dfrac{1}{u}$, so nach (1)

[1] Principes et développements de géometrie cinématique. Paris (Gauthier-lars), 1894, p. 53 und 484.

$$\frac{1}{\mathfrak{r}'} = \frac{du}{d\varphi},$$

und analog ist

$$\frac{1}{\mathfrak{r}''} = \frac{d^2 u}{d\varphi^2}.$$

Mit Rücksicht auf diese Transformation geht aus (5) folgender bekannter Werth für ρ hervor

$$\rho = \frac{\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{u^3\left(u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\right)}. \qquad (6)$$

Macht man weiter — Fig. 5 — die Strecke $O\mathfrak{K}$ äquipollen der Strecke PK und leitet aus $\mathfrak{K}$ den Punkt $\mathfrak{U}$ auf (OP) nach gleichem Vorgange, wie U aus K ermittelt worden ist, ab, so is

$$O\mathfrak{U} = -\rho \sin^3 \tau.$$

Nehmen wir auf der Geraden (OP) die Richtung von O nach P als positiv an, so nimmt dann die Gleichung (4) folgende Form an

$$-\frac{1}{O\mathfrak{U}} = \frac{1}{OP} - \frac{1}{O\mathfrak{P}''}$$

oder

$$\frac{2}{2 . O\mathfrak{P}''} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{O\mathfrak{U}}. \qquad (7)$$

Diese Gleichung besagt, dass, wenn man $OQ = 2 . O\mathfrak{P}''$ macht, die Punkte $P, \mathfrak{U}$ harmonisch getrennt sind vo den Punkten O, Q.

Verlegt man nun die homologen Krümmungshalbmess $PK, \ldots$ sämmtlicher Integralcurven, welche der Differentia curve $\mathfrak{f}'$ correspondiren, äquipollent nach $O\mathfrak{K}, \ldots$, so wird d durch eine Transformation vorgenommen, in der zunächst de homologen Punkten M, welche die Gerade a beschreibe Punkte $\mathfrak{M}$ entsprechen, welche eine Hyperbel $\mathfrak{a}$ beschreibe wie sich aus der hier auftretenden projectiven Beziehung d

rahlenbüschels um O mit dem Büschel der zu $(O\mathfrak{P}')$ parlelen Strahlen leicht ergibt. Diese Hyperbel wird in O von (OP) rührt, hat die durch Q zu $(O\mathfrak{P}')$ gelegte Parallele zu einer symptote, während die zweite senkrecht zu $(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'')$ ist.

Durch die erwähnte Transformation entspricht weiter der ırch K beschriebenen Curve k eine Curve $\mathfrak{k}$, welche durch $\mathfrak{K}$ schrieben wird, wenn P den Leitstrahl (OP) durchläuft. Da e Senkrechte in $\mathfrak{M}$ zu $(O\mathfrak{M})$ eine unicursale Curve dritter asse einhüllt, wenn $\mathfrak{M}$ die Hyperbel $\mathfrak{a}$ beschreibt, so folgt ıraus, dass die Curve $\mathfrak{k}$ durch zwei Büschel von Strahlen, von nen der eine durch O geht, während die Strahlen des anderen ı $(O\mathfrak{P}')$ parallel sind, erzeugt wird, die in einer (1, 3) deutigen ziehung stehen.

Somit ist die transformirte $\mathfrak{k}$ der Krümmungsmittelpunktsırve k eine Curve 4. Ordnung.

Die Curve k selbst ist eine Curve 5. Ordnung. Sie wird zeugt durch einen zu $(O\mathfrak{P}')$ parallelen Strahlenbüschel und n Tangentenbüschel einer Parabel, welche $\mathfrak{P}'$ zum Brennınkt und (OP) zur Scheiteltangente hat. Beide sind nämlich eichfalls in einer (3, 1) deutigen Beziehung und es entsteht ırch sie auf irgend einer Geraden, wie leicht einzusehen, eine , 2) deutige Beziehung ihrer Schnittpunkte.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen a mit OP einhliesst, mit α, so lässt sich aus der Beziehung

$$MP:KP = \sin^2\tau$$

cht der Ausdruck finden

$$\mathfrak{r}'\cot^3\tau = x\cot\alpha - y,$$

orin x, y die Coordinaten des Punktes K in Bezug auf $(\mathfrak{P}'O)$ ıd (OP) als Coordinatenaxen bedeuten.

Aus den ähnlichen Dreiecken $\mathfrak{P}'OP$, KLP folgt die eichung

$$\mathfrak{r}'\cot^2\tau - y\cot\tau = x.$$

Setzen wir den aus derselben gewonnenen Ausdruck für $\cot^2\tau$ in die vorige Gleichung ein, so kommt

$$y\cot^2\tau + x\cot\tau = x\cot\alpha - y.$$

Lösen wir nun die letzten zwei Gleichungen nach $\cot^2\tau$ und $\cot\tau$ auf, so erhalten wir

$$\cot^2\tau = \frac{x^2+xy\cot\alpha-y^2}{\mathfrak{r}'x+y^2},$$

$$\cot\tau = \frac{\mathfrak{r}'x\cot\alpha-\mathfrak{r}'y-xy}{\mathfrak{r}'x+y^2},$$

woraus schliesslich die Gleichung unserer Curve k in folgende Form hervorgeht

$$(\mathfrak{r}'x+y^2)^2(x\cot\alpha-y) = \mathfrak{r}'(x^2-y^2+xy\cot\alpha)(\mathfrak{r}'x\cot\alpha-\mathfrak{r}'y-xy).$$

11. Setzen wir

$$R = \frac{a^2}{r},$$

wobei a eine Constante bedeutet, so folgt aus der Gleichung (1

$$R' = \frac{a^2}{\mathfrak{r}'}$$

und allgemein

$$R^{(\mu)} = \frac{a^2}{\mathfrak{r}^{(\mu)}},$$

worin die Bedeutung von $R', \ldots R^{(\mu)}, \ldots$ aus Früherem evide ist. Dadurch gewinnen wir den Satz:

Bildet man eine Curve f mit ihren in Bezug au einen gegebenen Punkt O als Pol construirten Diffe rentialcurven $f', f'', \ldots$ nach F, respective $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots$ s invers ab, dass O gleich schon Mittelpunkt der In version ist, so sind die Curven $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots$ die aufein anderfolgenden inversen Differentialcurven von und umgekehrt, bildet man eine Curve F mit ihre inversen Differentialcurven $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots$ in gleicher Weis nach f, respective $f', f'', \ldots$ ab, so sind $f', f'' \ldots$ di aufeinanderfolgenden Differentialcurven von f i Bezug auf O als Pol.

Es seien $P, \mathfrak{P}$ zwei entsprechende, also auf demselbe Leitstrahl (OP) gelegene Punkte der inversen Curven f, F. Jed Kreis, der durch $P, \mathfrak{P}$ zugleich geht, entspricht in der Inversi

sich selbst und es werden somit die Curven f, F in den entsprechenden Punkten P, $\mathfrak{P}$ von einem sich selbst entsprechenden Kreise berührt. Demgemäss ist die Tangente $\mathfrak{t}$, sowie die Normale $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{P}$ an F parallel zu der Geraden, welche symmetrisch liegt in Bezug auf (OP) zu der Tangente t, beziehungsweise Normale n in P an f. Ebenso ist klar, dass dem Krümmungskreise k von f in P invers der Krümmungskreis $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{P}$ correspondirt. Die Gerade (OK), welche den Mittelpunkt K von k mit O verbindet, schneidet somit $\mathfrak{n}$ im Mittelpunkte $\mathfrak{K}$ von F.

Ist E der zweite Schnittpunkt von (OP) mit k, so ist $\triangle OKE \backsim \triangle O\mathfrak{K}\mathfrak{P}$, woraus folgt, wenn $O\mathfrak{P} = \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{K} = \rho'$ gesetzt wird,

$$\rho' = \frac{\rho\mathfrak{r}}{r - 2\rho\sin\tau}$$

oder

$$\rho' = \frac{a^2\rho}{r(r - 2\rho\sin\tau)} \tag{9'}$$

und analog

$$\rho = \frac{a^2\rho'}{r'(r' - 2\rho'\sin\tau')}. \tag{9''}$$

Diese so gewonnenen zwei Gleichungen lassen sich leicht auf die gemeinschaftliche Form

$$\frac{r}{\rho} - \frac{\mathfrak{r}}{\rho'} = \sin\tau - \sin\tau' \tag{9}$$

bringen, worin

$$\tau + \tau' = 0. \tag{10}$$

Durch die Beziehung

$$r\mathfrak{r} = r'\mathfrak{r}' = r''\mathfrak{r}'' = \ldots = a^2$$

und durch die Ausdrücke (9) und (10) geht auch die Gleichung (4) des vorhergehenden Abschnittes sofort über in die Geichung (4') dieses Abschnittes und umgekehrt.

12. Wenn f, $f^{\times}$ zwei inverse Curven für O als Mittelpunkt der Inversion und P, $P^{\times}$ zwei entsprechende Punkte derselben sind, so ist zunächst das von Leitstrahl, Tangente und Subtangente der Curve f für den Punkt P gebildete Dreieck ähnlich

dem Dreiecke, welches von Subnormale, Leitstrahl und Tangente der Curve $f^{\times}$ für $P^{\times}$ gebildet wird, woraus sofort die Richtigkeit der Gleichung (1) sich elementar geometrisch ergibt. Von dieser Ableitung hätten wir hier naturgemäss auch ausgehen können.

Die Construction der Tangente $\mathfrak{t}'$ in $\mathfrak{P}'$ an die inverse Differentialcurve $\mathfrak{f}'$ von f, wenn der Krümmungsmittelpunkt K dieser Curve gegeben ist oder umgekehrt, lässt sich auf Grund unserer Inversion gleichfalls gewinnen.

Wir betrachten zu dem Behufe — Fig. 6 — eine Inversion, für welche der Halbmesser des Grundkreises gleich ist

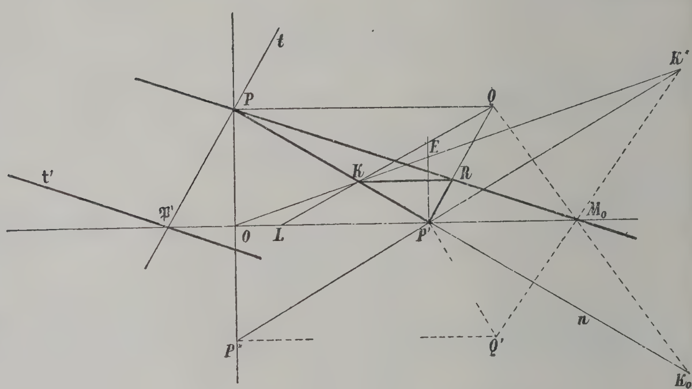


Fig. 6.

$OP.\sqrt{-1}$. Es sei dann wieder $f^{\times}$ die inverse Curve von f, f' sei die Differentialcurve von f in Bezug auf O als Pol. Unser letzter Satz besagt alsdann, dass auch f' und $\mathfrak{f}'$ invers sind, dass daher die Tangente $\mathfrak{t}'$ in $\mathfrak{P}'$ an $\mathfrak{f}'$ und die Tangente im entsprechenden Punkte P' von f' an diese Curve in Bezug auf (OP) antiparallel sind. Macht man $OP^{\times}$ äquipollent zu PO, so ist $P^{\times}$ der dem Punkte P entsprechende Punkt unserer Inversion, während die Punkte $\mathfrak{P}'$, P', in denen die Tangente und Normale n von f in P die Senkrechte durch O zu (OP) schneiden, sich gegenseitig entsprechen. Es ist somit $(P^{\times}P')$ die Normale in $P^{\times}$ an $f^{\times}$; dieselbe wird von (OK) im Krümmungsmittelpunkte $K^{\times}$ von $f^{\times}$ für den Punkt $P^{\times}$ geschnitten.

Um nun die Tangente t' an f' zu erhalten, ziehen wir etwa lie im ersten Satz des Artikels 8 enthaltene Construction zu Rathe.

Darnach ist der Schnittpunkt Q' der Senkrechten in $P^{\times}$ ınd P' zu (OP) respective $(P^{\times}P')$ mit $K^{\times}$ zu verbinden. Wird $OP')$ von der Verbindungsgeraden in M_0 geschnitten, so ;ibt $(P^{\times}M_0)$ die Richtung von t', mithin (PM_0) die Richtung 'on t' an.

Wir können aber auch zu der soeben dargestellten Figur lie in Bezug auf $(O\mathfrak{P}')$ symmetrische Figur zeichnen und ›ekommen dadurch gleichfalls M_0. Errichten wir also in P ınd P' die Senkrechten zu (OP), respective $(PP\,)$, die sich n Q schneiden mögen, und verbinden den zu $K^{\times}$ in Bezug uf $(O\mathfrak{P}')$ symmetrischen, auf (PP') gelegenen Punkt K_0 mit Q, o erhalten wir dadurch auf $(O\mathfrak{P}')$ ebenfalls den Punkt M_0.

Ziehen wir noch durch P' die Parallele zu (OP), welche $OK)$ in E schneiden möge. Zunächst ist hier der Vierstrahl P' $P, P^{\times}, O, E)$ harmonisch. Es bilden desshalb auch die Punkte $\zeta, K^{\times}, O, E$ eine harmonische Gruppe und in Folge dessen benso die Punkte K, K_0, P, P'. Nun projiciren wir die zuletzt rwähnte Gruppe von Q auf $(O\mathfrak{P}')$. Ist L die Projection von K, o erkennt man, dass $LP' = P'M_0$. Daraus folgt mit Bezug auf ie harmonischen Eigenschaften eines Vierecks, dass die ierade, welche K mit dem Schnittpunkte R der Geraden (PM_0), $QP')$ verbindet, zu $(O\mathfrak{P}')$ parallel ist. Daraus ergibt sich olgende Construction:

Bringt man die Senkrechten in K zu (OP), in P' u (PP') im Punkte R zum Schnitte, so ist $t' \| (PR)$.

Diese Construction gestattet, t' zu finden, wenn K gegeben st und umgekehrt. Sie ist mindestens ebenso einfach wie die 'üher abgeleitete, und die zuvor entwickelten Formeln (4') ınd (8) lassen sich aus ihr bequem von Neuem finden.

13. In den soeben gegebenen Erörterungen ist auch die ösung folgender Aufgabe enthalten — Fig. 7 —

»Gegeben sind die Strecken, welche $\dfrac{dr}{d\varphi}, \dfrac{d^2r}{d\varphi^2}$ darstellen; s sollen aus ihnen und aus r die die Ausdrücke

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}, \quad \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$$

darstellenden Strecken construirt werden«.

Bezüglich der Construction von $\frac{1}{O\mathfrak{P}'} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}$ aus $OP' = \frac{dr}{d\varphi}$ ist hier nichts weiter zu bemerken. Ist dann in Bezug auf den zweiten Theil unserer Aufgabe auf (OP) die Strecke $OP'' = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}$, so führt man etwa durch P die Senkrechte zu $(P'P'')$ bis zum Schnitt M_0 mit (OP') und macht $P'\mathfrak{M}$

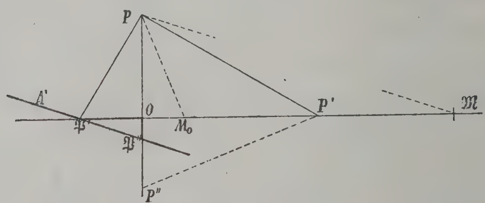


Fig. 7.

äquipollent M_0P'; die Parallele durch $\mathfrak{P}'$ zu $(P\mathfrak{M})$ trifft (OP) im Punkte $\mathfrak{P}''$ und es ist $\frac{1}{O\mathfrak{P}''} = \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$.

VI. Über zwei besondere Arten von Polarintegralcurven.

14. Eine Integralcurve in Parallelcoordinaten hat die fundamentale Eigenschaft, dass die Ordinatendifferenz für irgend zwei Punkte derselben die Fläche misst, welche von der entsprechenden Differentialcurve, den Ordinatenlinien der zwei Punkte und der Abscissenaxe begrenzt wird. Diese Fläche ist nämlich gleich dem Rechtecke, welches die Constructionseinheit a zur Grundlinie und die erwähnte Differenz zur Höhe hat.

Die analoge Curve in Polcoordinaten hat somit die Eigenschaft, dass die Differenz der Leitstrahlen irgend zweier Punkte derselben die auf die Constructionseinheit a reducirte Fläch

misst, die von diesen Leitstrahlen und der zugehörigen Differentialcurve eingeschlossen wird.

Ist somit die Gleichung der Differentialcurve f

$$r = f(\varphi),$$

so ist die Gleichung der Integralcurve F

$$R = \frac{1}{2a} \int f^2(\varphi)\, d\varphi + C.$$

Es ist also

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{r^2}{2a} = R',$$

wenn R' wiederum die Subnormale der Integralcurve bedeutet.

Einer Differentialcurve f entsprechen wieder unzählig viele Integralcurven, da ja die Constante C beliebig gewählt werden darf. Für homologe Punkte aller dieser Integralcurven hat aber $\frac{dR}{d\varphi}$, d. h. die Subnormale denselben Werth $\frac{r^2}{2a}$, genau so wie früher.[1] Ebenso ist auch einleuchtend, wenn verschiedene Differentialcurven einander in einem Punkte berühren, dass dann die durch einen correspondirenden Punkt gehenden, auf die nunmehrige Weise abgeleiteten Integralcurven einander in diesem Punkte osculiren.

Wir haben uns auch hier mit der Aufgabe zu beschäftigen:

Gegeben ist die Tangente t der Differentialcurve f in einem Punkte P'; es ist der Krümmungsmittelpunkt K von F im correspondirenden Punkte P zu construiren oder umgekehrt.

Tragen wir — Fig. 8 — auf die Senkrechte in O zu (OP) die Strecke $SO = 2a$ auf; die Senkrechte in P' zu SP' schneidet also die Gerade (SO) im Punkte N, durch den die Normalen sämmtlicher Integralcurven in den auf (OP) gelegenen homologen Punkten gehen.

[1] Cf. E. Bitterli a. a. O., S. 172 (Bemerkungen bezüglich eines Polarintegraphen).

Bringen wir nun das Dreieck $SP'N$ in die unmittelba benachbarte Lage $S_1P'_1N_1$, so wird der Punkt S auf der durc ihn zum Leitstrahl (OP') gezogenen Parallelen s, der Punkt P auf der Tangente t und der Punkt N auf einer zu ermittelnde Geraden v in seine neue Lage übergehen. Es wird demgemäss die Tangente und die in N zu ihr errichtete Senkrechte w di Normale an die von N beschriebene Bahn sein.

Wir haben im Abschnitt II kennen gelernt, wie man de Krümmungsmittelpunkt einer in Polarcoordinaten gegebene

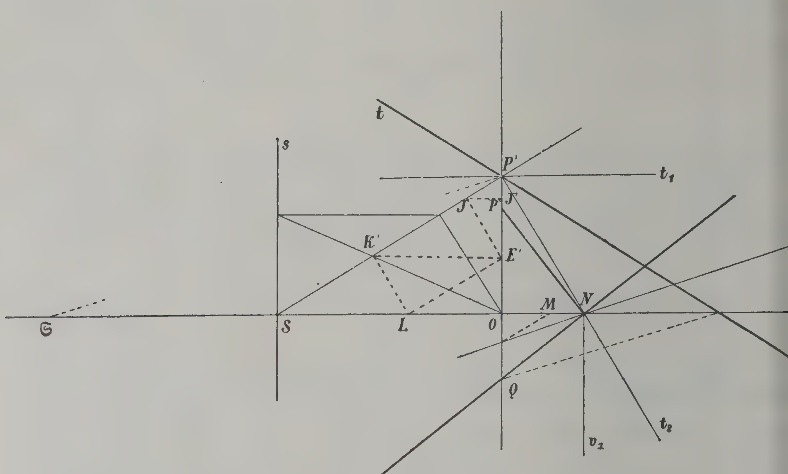


Fig. 8.

Curve F für irgend einen Punkt derselben sucht, wenn die en sprechende Normale an die von dem Endpunkte ihrer Su normale beschriebene Bahncurve gegeben ist und umgekeh weiter haben wir daselbst erkannt, dass die Krümmungsmitte punkte sämmtlicher Curven in den Punkten eines Leitstrahle für welche sowohl N als auch w gemeinschaftlich sind, a einem Kegelschnitte liegen. Daher auch hier der Satz:

»Die Krümmungsmittelpunkte sämmtlicher Integralcurve

$$R = \frac{1}{2a}\int f^2(\varphi)\,d\varphi + C$$

in homologen Punkten bilden einen Kegelschnitt«.

Von diesem Kegelschnitt wissen wir, dass er durch N, lurch den Mittelpunkt M von ON und durch diejenigen zwei Punkte auf den Leitstrahl (OP), in welchen derselbe von den lurch N nach den absoluten Kreispunkten gehenden Geraden getroffen wird, geht. In N wird dieser Kegelschnitt von v berührt.

Für sämmtliche durch P' gehende Differentialcurven bilden ie Tangenten t einen Strahlenbüschel und, wie leicht einzuehen, die entsprechenden Tangenten v, sowie auch die zugeörigen Kegelschnitte einen zu demselben projectiven Strahlenespective Kegelschnittbüschel.

Wir wollen uns jetzt vornehmen, die Projectivität zwischen iesen zwei Strahlenbüscheln (t) und (v) durch drei Paare zueordneter Strahlen herzustellen.

Dem zu SO parallelen Strahle t_1 in (t) entspricht der zu (OP') arallele Strahl v_1 in (v), denn ersetzt man die Tangente t_1 durch en sie in P' berührenden Kreis vom Mittelpunkte O, so sind , v_1 Tangenten an zwei in Bezug auf diesen Kreis gebildete iverse Curven in entsprechenden Punkten, und da $s \perp (OS)$ st, so muss auch $v_1 \perp (OS)$ sein. Ferner ist leicht einzusehen, ass dem Strahle (OP') in (t) der Strahl (ON) in (v) entpricht.

Wir wollen jetzt noch zu dem Strahle $t_2 = (P'N)$ in (t) en entsprechenden Strahl v_2 construiren, weil die Construction i den Erörterungen des Abschnittes II als Specialfall mit entalten ist.

Die Gerade $(P'S)$ wird hier von ihrer benachbarten Lage $P'_1S_1)$ in einem Punkte K' geschnitten, der darnach als Krümungsmittelpunkt für den Punkt P' einer durch P' gehenden ilfscurve aufgefasst werden kann, wenn s die Tangente, also $SO)$ die Normale an die von dem Endpunkte der Subnormale eser Curve beschriebene Differentialcurve ist.

Da hier $r'' = 0$ ist, so erhält man K' etwa nach der der rübler'schen analogen Construction des erwähnten Abhnittes, wenn man von O die Senkrechte auf (SP') fällt, von rem Fusspunkte die Parallele zu (OS) bis zum Schnitte mit s eht und den so erhaltenen Schnittpunkt mit O verbindet. Die erbindungsgerade schneidet $(P'S)$ in K'.

Der zu N benachbarte Punkt N_1 liegt alsdann auf der zu $(K'P'_1)$ in P'_1 errichteten Senkrechten; es kann somit ON als di Subtangente des Punktes P' und ON_1 als die Subtangente de Punktes P'_1 für unsere Hilfscurve betrachtet werden. Die Gerad $v_2 = (NN_1)$ wird sohin aus K' nach einer Construction de vorhergehenden Abschnittes III erhalten. Wir benützen etw die erste von ihnen.

Man hat somit von K' die Senkrechte auf (OP') und vo ihrem Fusspunkte E' die Senkrechte auf (SP') zu fällen; ist der Fusspunkt dieser Senkrechten, so ist schliesslich $v_2 \perp (OJ$

Nach dem ersten Satze des Artikel 6 müsste man umge kehrt, wenn K' bereits vorliegt, zu der Richtung von s gelange wenn man die Senkrechte $(K'L)$ zu (SP') legen, durch ihre Schnitt L auf (OS) die Parallele zu (SP'), durch K' die Paralle zu (OS) ziehen und den Schnittpunkt E dieser Parallelen e mitteln würde. Da dann $(P'E) \| s$ sein müsste, so ergibt sic daraus, dass E auf (OP') fällt, also mit E' identisch ist, und folgt weiter, dass $OE = EJ'$ ist, wenn J' den Fusspunkt d Senkrechten von J auf (OP') bezeichnet.

Schneidet nun v_2 die Gerade (OP') in Q_2, so ist

$$\triangle ONQ_2 \backsim \triangle J'OJ.$$

Verbindet man desshalb den Mittelpunkt M von ON mit Q so ist die Verbindungsgerade senkrecht zu (JE) oder paral zu (SP').

Macht man demgemäss die Strecke $S\mathfrak{S}$ äquipollent d Strecke OS, so ist der dem Strahle t_2 von (t) entsprechen Strahl v_2 in (v) parallel zu $(P'\mathfrak{S})$.

Dadurch ist die Projectivität der besagten Strahlenbüsch hergestellt.

Denken wir uns den Büschel (t) durch (OS), den Büschel durch (OP') geschnitten, so erhalten wir dadurch zwei p spective Punktreihen, für welche die Verbindungsgeraden e sprechender Punkte zu $(P'\mathfrak{S})$ parallel sind. Daher schliessli das folgende Resultat:

Um zu der Tangente t irgend einer Differenti curve jetziger Art die entsprechende Gerade v erhalten, haben wir durch den Schnitt von t mit $(O$

lie Parallele zu $(P'\mathfrak{S})$ zu legen, bis sie (OP') in Q chneidet; alsdann ist $v \equiv (QN)$.

Die Normale w schneidet (OP') in einem Punkte, den wir rüher mit P'' zu bezeichnen pflegten und aus dem in bekannter Veise (Abschnitt II) der Krümmungsmittelpunkt irgend einer ntegralcurve unserer jetzigen Art für den P' correspondirenden 'unkt P bequem erhalten wird.

15. Der Vollständigkeit halber sind noch analoge Betrachungen über die aus einer Curve f

$$r = f(\varphi)$$

bgeleitete Integralcurve F

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{2}\int \frac{d\varphi}{f^2(\varphi)} + C,$$

ie sich in Anbetracht der Definitionsgleichungen für die drei ledigten Arten von Polarintegralcurven nothwendig mit ergibt nd gleichfalls nicht ohne Interesse ist, anzustellen.

Aus dieser letzten Definitionsgleichung von F folgt, dass

$$\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\varphi} = \frac{a}{2\,r^2} = \frac{1}{\mathfrak{R}},$$

obei mit $\mathfrak{R}$ die Länge der Subtangente OT der Integralcurve F ezeichnet wird.

Die sämmtlichen Integralcurven

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{2}\int \frac{d\varphi}{f^2(\varphi)} + C$$

ben somit für ihre homologen Punkte eine gemeinschaftliche ıbtangente, oder mit anderen Worten: Die homologen Tannten unserer Integralcurven schneiden sich in einem Punkte T f der zu (OP) in O errichteten Senkrechten.

Macht man auf dieser Senkrechten $\mathfrak{S}O = \frac{a}{2}$, wenn eder $SO = a$ die Constructionseinheit bedeutet, so erhält ın den Punkt T als die dritte Ecke des bei P' rechtwinkeligen

Dreieckes $\mathfrak{S}P'T$, vorausgesetzt, dass P' wieder der correspondirende Punkt der Differentialcurve ist.

Bezüglich der Construction von Krümmungsmittelpunkten unserer Integralcurven können wir uns auf das Vorangehende berufen.

Bei der infinitesimalen Veränderung des Dreieckes $\mathfrak{S}P'T$ bewegt sich der Punkt $\mathfrak{S}$ auf der zu (OP) parallelen Geraden $\mathfrak{s}$, der Punkt P' auf der Tangente t der Differentialcurve f und der Punkt T auf einer erst abzuleitenden Geraden v. Beschreibt nun t den Strahlenbüschel (t) um P', so beschreibt v einen zu ihm projectiven Strahlenbüschel (v) um T. Dieser Zusammenhang liefert dann für jede Tangente t die Construction des entsprechenden Strahles v.

Man hat bloss, dem Vorigen entsprechend, durch den Schnittpunkt von t mit (OT) die Parallele zu $(P'S)$, wofern wieder $SO = a$, zu legen und sie in $\mathfrak{P}''$ mit (OP) zum Schnitt zu bringen; v ist alsdann die Verbindungsgerade der Punkte $\mathfrak{P}''$ und T.

Wenn der Punkt $\mathfrak{P}''$ gefunden worden ist, so wird der Krümmungsmittelpunkt von F in P nach den im Abschnitte I entwickelten und durch die Formel (4) dortselbst zum Ausdrucke gebrachten Constructionen leicht ermittelt; darnach schneidet beispielsweise die Senkrechte durch O zu v auf der Normale von F in P die Strecke $\rho \sin^2\tau$ ab, aus der der Krümmungshalbmesser ρ ohneweiters hervorgeht.

Die nun behandelte Curve gehört somit zu den inversen Integralcurven. Transformiren wir dieselbe mit ihrer Differentialcurve invers für O als Centrum und a^2 als Potenz der Inversion, so gelangen wir genau zu den Beziehungen des Artikel 14.[1]

V. Integralcurven in Bezug auf eine gegebene Curve.

16. Die Definition der polaren Integralcurven ist einer weiteren Verallgemeinerung in der Richtung fähig, dass wir den Pol O durch eine Curve o ersetzen und die Leitstrahlen ein

[1] Die Herstellung der zugehörigen Figur unterliegt nach dem Gesagten keinen Schwierigkeiten.

Curve f auf den Tangenten der Curve o vom Berührungs-
punkte B aus messen.

Zwecks unserer Erörterungen können wir, wenn es sich
bloss um die Bestimmung von Normalen der Curve f handelt,
die Curve o selbst durch den Punkt B vertreten lassen, während
für die Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes es zulässig
ist, die Curve o durch ihren Krümmungskreis b für den Punkt B
zu ersetzen.

Der vorliegende Fall einer Integralcurve f lässt sich leicht
aus dem Specielleren des Abschnittes II entwickeln.

Es sei — Fig. 9 — $BP = r$ der Leitstrahl der Curve f für
den Punkt P, dann (PP') die Normale derselben in P, ferner P'

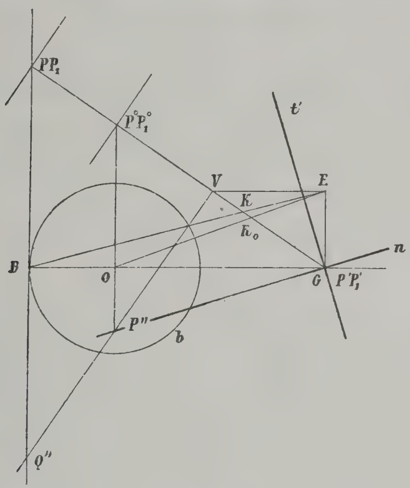


Fig. 9.

der Schnitt derselben mit der Normalen von o in B. $(BP') \equiv r'$
soll wieder die Subnormale der Curve f für den Punkt P
heissen, so dass wieder

$$\frac{dr}{d\varphi} = r'$$

ist. Der Punkt P' beschreibt demnach die erste Differential-
curve f' von f.

Unsere Aufgabe wird zunächst darin bestehen, die Tan-
gente t' in P' an diese Differentialcurve zu suchen.

Ist nun P_1 der zu P benachbarte Punkt von f und P'_1 d
zu P' benachbarte Punkt von f', so ist die Gerade $(P_1P'_1)$ d
zu (PP') benachbarte Normale von f; sie schneidet desshal
(PP') in dem Krümmungsmittelpunkt K von f für den Punkt

Denken wir uns weiter zu dem Leitstrahle (BP) die Pa
allele durch den Mittelpunkt O von b bis zum Schnitt P^0 m
der Normale (PP') gezogen und legen durch P^0 eine Curve
derart, dass ihre erste in Bezug auf O als Pol abgeleitete Diff
rentialcurve die Curve f' in P' berührt, mit ihr also noch d
Punkt P'_1 gemeinschaftlich hat. Ist P_1^0 der zu P^0 benachbar
Punkt von f_0, so ist, da beide Curven die Normale (PP^0P') g
meinschaftlich haben, $(PP_1) \parallel (P^0P_1^0)$, und es ist desshalb

$$\triangle OP^0P_1^0 \backsim \triangle BPP_1,$$

da ja $\sphericalangle P^0OP_1^0 = \sphericalangle PBP_1$ bei dem Übergang in die benac
barte Lage angenommen wird.

Bezeichnen wir das Bogenelement PP_1 mit σ, das Boge
element $P^0P_1^0$ mit σ_0 und den Leitstrahl OP^0 mit r_0, so fo
aus dieser Ähnlichkeit die Proportion

$$\sigma : \sigma_0 = r : r_0.$$

Da die Gerade $(P_1^0P'_1)$ die zu (P^0P') benachbarte Norm
von f_0 ist, so schneidet sie dieselbe in dem Krümmungsmitt
punkte K_0 von f_0 für den Punkt P_0. Die Senkrechte durch
zu (PP') schneidet $(P_1P'_1)$ und $(P_1^0P'_1)$ in zwei Punkten, de
Entfernung unendlich klein, höchstens von der zweiten O
nung ist, die man sich also für den vorliegenden Zweck
einen Punkt G zusammenfallend denken kann. Setzt man a
$PK = \rho$, $P^0K^0 = \rho_0$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreie
PP_1K, $P'GK$ die Proportion

$$\sigma : \rho = P'G : (PP' - \rho)$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $P^0P_1^0K_0$, $P'GK_0$ die P
portion

$$\sigma_0 : \rho_0 = P'G : (P^0P' - \rho_0).$$

Scheiden wir aus den drei Gleichungen, die wir soe
erhalten haben, die Bogenelemente σ, σ_0 aus, so kommt n

einfacher Reduction

$$\frac{r}{\rho}\,.\,PP' - \frac{r_0}{\rho_0}\,.\,P^0P' = r - r_0 \tag{1}$$

oder

$$\frac{r^2}{\rho} - \frac{r_0^2}{\rho_0} = r\sin\tau - r_0\sin\tau_0, \tag{2}$$

worin aber $\tau = \tau_0$ ist, oder schliesslich

$$\frac{r}{\rho}\,.\,KP' = \frac{r_0}{\rho_0}\,.\,K_0P'. \tag{3}$$

Diese letzte Relation findet darin ihren geometrischen Ausdruck, dass die Geraden (BK) und (OK_0) sich in einem Punkte E auf der durch P' zu (OP') errichteten Senkrechten schneiden. Diese Construction gestattet somit in sehr einfacher Weise ρ_0 zu construiren, wenn ρ gegeben ist und umgekehrt.

Das gewonnene Resultat löst sehr einfach die Aufgabe:

Es ist die Tangente t' in P' an die Differentialcurve f' zu suchen, wenn der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt K der Integralcurve f gegeben ist und umgekehrt.

Im ersten Falle bringt man BK mit dem in P' zu (BP') errichteten Perpendikel in E zum Schnitt. Nachdem dieser Punkt auch auf (OK_0) liegt, so hat man durch E die Parallele zu (BP') zu ziehen und von ihrem Schnittpunkte V mit (PP') die Senkrechte zu (PP') zu führen, bis sie (OP^0) in P'' schneidet. Alsdann ist $(P''P')$ die Normale und die durch P' senkrecht zu ihr errichtete Gerade t' die Tangente von f'.

Wenden wir diese Construction in umgekehrter Reihenfolge an, so liefert sie uns K, wenn t' gegeben ist.

Diese Construction stimmt mit der früher für den specielleren Fall erläuterten, auf Grübler zurückgeführten, vollständig überein. Dies erklärt sich einfach dadurch, dass sich unser Resultat auch aus der Betrachtung der Bewegung eines ebenen starren Systems ergibt.

Bei dieser Bewegung ist für die betrachtete Systemlage der Punkt O Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahncurve von (BP); der Punkt P' ist der momentane Drehungspol und t' ist

die Tangente in P' an die Polbahn. Nun geht der Wendekrei der umgekehrten Bewegung durch O und P' und berührt in letzteren Punkte die Gerade t'. Dieser Kreis schneidet die Nor male PP' im Wendepunkte V, aus dem dann der zu P gehörig Punkt K in bekannter Weise — bequem durch die heran gezogene Grübler'sche Construction — erhalten wird, ebens wie man umgekehrt aus K den Punkt V, dann auch den Wende pol P'' nach derselben Construction erhalten kann.

Wir heben noch hervor, dass hier die Punkte P', P'_1,.. der ersten Differentialcurve f' von f auf den Normalen de Curve o, die P'', P''_1... der zweiten Differentialcurve f'' von auf den Normalen ihrer ersten Evolute u. s. w. festgele werden.

Für die hier entwickelte Construction lässt sich nun auc leicht eine metrische Relation finden.

Zu dem Zwecke wenden wir die Formel (3) des A schnittes II auf unsere Hilfscurve f_0 an. Es ist da

$$r_0+r''_0 = \frac{2\,r_0}{\sin^2\tau_0} - \frac{r_0^2}{\rho_0 \sin^3\tau_0}.$$

Von f_0 können wir auf f selbst ohneweiters übergehe Es ist

$$r''_0 \equiv r'', \quad \tau_0 = \tau, \quad r_0 = r - a \operatorname{tg} \tau,$$

wenn a den Halbmesser des Krümmungskreises b bezeichn wobei wir ihn mit dem Vorzeichen $+$ versehen, wenn BO de selben Sinn mit BP' hat, anderenfalls er negativ zu nehmen i Ferner ist aus der vor Kurzem entwickelten Formel (2)

$$\frac{r_0^2}{\rho_0} = \frac{r^2}{\rho} - a \operatorname{tg}\tau \sin\tau.$$

Führen wir diese Werthe in die herangezogene Gleichu (3) des Abschnittes II ein, so kommt nach einfacher Reducti

$$r+r''+a \cot\tau = \frac{2r}{\sin^2\tau} - \frac{r^2}{\rho \sin^3\tau}. \qquad ($$

Dabei darf nicht vergessen werden, dass, unserer Ableitu von f'' gemäss, die positive Richtung von r'' der von r e gegengesetzt ist.

Schneidet die Gerade (VP'') den Leitstrahl (BP) im 'unkte Q'' und setzen wir $BQ'' = R''$, so lässt sich unsere etzte Beziehung auch in der Form

$$r + R'' = \frac{2r}{\sin^2\tau} - \frac{r^2}{\rho\sin^3\tau} \tag{5}$$

chreiben, wodurch sie mit der obigen Formel (3) vollständig bereinstimmt.

Es kann somit der Punkt Q'' statt P'' in unsere Betrach- ingen einbezogen werden, wie es auch aus den vorangehenden onstructionen sich direct ergibt, denn auch diese Con- ructionen lehren, dass K gefunden wird als der Krümmungs- iittelpunkt für eine in einfachen Polarcoordinaten mit O als ol gegebene Integralcurve F, wenn $(P'Q'')$ die Normale in P' ı die zugehörige Differentialcurve F' ist.

Auf Grund dieser Bemerkung wären wir dann unmittelbar ıs der Formel (3) des Abschnittes II zu der Relation (5), die ir soeben abgeleitet haben, gelangt.

Daraus folgt auch sogleich, dass die Krümmungsmittel- ınkte für homologe Punkte sämmtlicher Integralcurven, elche auf die vorliegende Weise aus f' abgeleitet werden önnen, auf einem Kegelschnitte liegen.

17. Wir wollen nun auch die über inverse Integral-, espective Differentialcurven f, respective $f', f'', \ldots$ gewonnenen esultate dadurch verallgemeinern, dass wir den Pol O wieder ırch eine Curve o ersetzen.

Handelt es sich bloss um die Tangentenbestimmung von f,) kann man auch hier die Curve o durch ihren Berührungs- ınkt B mit dem Leitstrahle (BP) vertreten lassen, während i der Krümmungsmittelpunktsbestimmung man die Curve o ırch ihren Krümmungskreis in B ersetzen wird. Auch hier erden die Punkte $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}_1', \ldots$ der ersten Differentialcurve auf n Normalen von o und die Punkte $\mathfrak{P}'', \mathfrak{P}_1'', \ldots$ der zweiten fferentialcurve auf den Normalen ihrer Evolute u. s. f. fest- legt.

Wir setzen wieder $B\mathfrak{P}' = \mathfrak{r}'$, $O\mathfrak{P}'' = \mathfrak{r}''$ und behalten auch ı Übrigen die im vorangehenden Artikel benützten Bezeich-

nungen bei; ferner möge der Schnittpunkt der Geraden $(O\mathfrak{P}''$ mit der Tangente t an f in P mit $\mathfrak{P}^0$ bezeichnet werden.

Nun denken wir uns — Fig. 10 — eine Curve F_0 in Polarcoordinaten für O als Pol von der Beschaffenheit, dass ihr inverse Differentialcurve F_0' die Curve f' in $\mathfrak{P}'$ berührt, also au ihr ausser $\mathfrak{P}'$ noch den ihm auf t′ benachbarten Punkt $\mathfrak{P}_1'$ gemeinschaftlich hat. Dann bestimmt $t = (P\mathfrak{P}')$ mit $(P_1\mathfrak{P}_1')$ de Contingenzwinkel ε von f in P und mit $(\mathfrak{P}_1^0\mathfrak{P}_1')$ den Contingenzwinkel ε_0 von F_0 in $\mathfrak{P}^0$. Die Längenunterschiede zwischen de

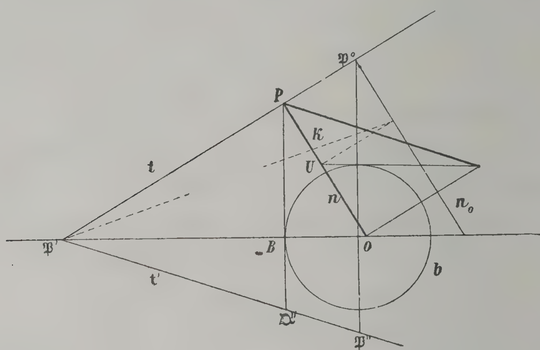


Fig. 10.

Strecke $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'$ einerseits und den zu den Winkeln ε, ε_0 als Centr winkeln gehörigen, durch $\mathfrak{P}'$ gehenden Bogenelementen ande seits sind unendlich klein, mindestens von der zweiten Ordnun so dass gesetzt werden darf

$$P\mathfrak{P}'.\varepsilon = \mathfrak{P}^0\mathfrak{P}'.\varepsilon_0,$$

woraus folgt, dass

$$r\varepsilon = r_0\varepsilon_0.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BPP_1, $O\mathfrak{P}^0\mathfrak{P}_1^0$ fol wenn wir mit σ, σ_0 beziehungsweise die Bogenelement d Curven f, F_0 in P, respective $\mathfrak{P}^0$ bezeichnen

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{r_0}{\sigma_0}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit der vorangehende so gelangen wir zu der einfachen Relation

$$\frac{r^2}{\rho} = \frac{r_0^2}{\rho_0}. \tag{6}$$

Der Relation (4′) des Abschnittes III,

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{\mathfrak{r}_0''} = \frac{1}{\rho_0^3 \sin^3 \tau_0},$$

welche für die Curve F_0 gilt, entspricht nun eine andere Relation, die wir erhalten, wenn wir

$$\tau_0 = \tau, \quad r_0 = r + a \cot \tau, \quad \mathfrak{r}_0'' \equiv \mathfrak{r}'', \quad \frac{r_0^2}{\rho_0} = \frac{r^2}{\rho}$$

setzen, wobei a positiv ist, wenn (BO) gleichen Sinnes mit $(B\mathfrak{P}')$ ist.

Dadurch erhalten wir die Beziehung

$$\frac{1}{r + a \cot \tau} + \frac{1}{\mathfrak{r}''} = \frac{r^2}{(r + a \cot \tau)^2} \cdot \frac{1}{\rho \sin^3 \tau}. \tag{7}$$

Schneidet ferner der Leitstrahl (BP) die Tangente $\mathfrak{t}'$ von f' im Punkte $\mathfrak{Q}''$ und setzen wir $B\mathfrak{Q}'' = \mathfrak{R}''$, so kommt mit Benützung der Relation

$$\mathfrak{r}'' : \mathfrak{R}'' = r_0 : r = (r + a \cot \tau) : r$$

folgender Ausdruck zum Vorschein

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{R}''} = \frac{r}{r + a \cot \tau} \cdot \frac{1}{\rho \sin^3 \tau} \tag{8}$$

oder

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{R}''} = \frac{\mathfrak{r}'}{a + \mathfrak{r}'} \cdot \frac{1}{\rho \sin^3 \tau}. \tag{8'}$$

Die Relationen (6) bis (8′) sind alle zur Construction bequem geeignet.

Um beispielsweise nach der letzten von ihnen den Krümmungsmittelpunkt K von f für den Punkt P zu finden, wird man zunächst so verfahren, als wenn man gewöhnliche Polarcoordinaten mit B als Pol vor sich hätte. Man wird durch P die Senkrechte n zu t errichten, durch ihren Schnittpunkt mit (BO) alsdann die Parallele zu t und durch P die Parallele zu $\mathfrak{t}'$ führen;

die Senkrechte zu (BP) durch den Schnitt der zwei zuletzt gezogenen Geraden treffe die Normale n im Punkte U. Alsdann hat man noch die Parallele durch U zu t mit der durch $\mathfrak{P}^0$ zu n gezogenen Parallelen n^0 zu schneiden und den Schnittpunkt mit $\mathfrak{P}'$ zu verbinden, so bestimmt die Verbindungsgerade auf n den fraglichen Krümmungsmittelpunkt.

Denn nach der herangezogenen Formel (4′) des Abschnittes III ist

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\mathfrak{R}''}=\frac{1}{PU.\sin^3\tau};$$

vergleicht man dies mit (8′), so folgt die Proportion

$$PU:\rho=(a+\mathfrak{r}'):\mathfrak{r}'$$

oder

$$PU:\rho=r_0:r,$$

aus welcher Relation die Richtigkeit der soeben angeführten Construction sich sofort ergibt.

Dass diese Construction umkehrbar ist, also $\mathfrak{t}'$ aus K finden lässt, sieht man sofort.

18. Aus der Formel (4) des 16. Artikels findet man leicht einen Ausdruck für ρ; es ist

$$\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-ar'-rr''}$$

und somit

$$\rho=\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\frac{dr}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}-a\right)-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Diese Formeln enthalten die Formeln (2) und (2′) des Abschnittes II als besondere Fälle für $a=0$ in sich.

Ebenso findet man aus der vor Kurzem aufgestellten Relation (7) die Beziehung

$$\left(1+\frac{a}{\mathfrak{r}'}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\mathfrak{r}''}+\frac{a}{\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''}\right)\rho=\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\mathfrak{r}'^2}\right)^{3/2}:\frac{1}{r^3},$$

aus welcher die Formel

$$\rho = \frac{\left[u^2 - \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{u^3\left(1+a\frac{du}{d\varphi}\right)\left[u+\left(1+a\cdot\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]}$$

ervorgeht, in welcher die Bedeutung von u von früher her ekannt ist und welche für $a=0$ in die Formel (6) des Abchnittes III übergeht.

VI. Reciproke Curven in Parallelcoordinaten.

19. Wir wollen nun die Betrachtungen, die wir bezüglich er inversen polaren Differentialcurven durchgeführt haben, uch auf den specielleren Fall der Parallelcoordinaten überagen. Wir werden da zunächst zu zwei Curven f, f_1 in Parllelcoordinaten geführt, für deren correspondirende Punkte die eziehung besteht

$$x = x_1, \quad yy_1 = a^2,$$

orin a eine Constante bedeutet.

Zwei solche Curven wollen wir reciprok in den Ordiaten nennen.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Tangente t und en Krümmungsmittelpunkt K der Curve f für P zu ermitteln, enn die Tangente t_1 und der Krümmungsmittelpunkt K_1 der urve f_1 für P_1 gegeben sind.

Wir suchen zunächst die Lösung auf Grund des Abchnittes I.

Aus der Gleichung

$$yy_1 = a^2 \tag{1}$$

lgt durch Differention

$$y_1y' + yy_1' = 0, \tag{2}$$

orin y', y_1' die correspondirenden Ordinaten der hier auf Grund erselben Constructionseinheit abgeleiteten Differentialcurven f_1' von f, respective f_1 sind.

Schneidet — Fig. 11 — die Tangente t_1 die x-Axe in R_1 id nehmen wir $R_1P_0 = e$, falls P_0 der Endpunkt der gemeinhaftlichen Abscisse von P und P_1 ist, als Constructionseinheit

für f'_1, f' an, so ist für diese Annahme $y'_1 \equiv y_1$ und mithi
nach (2)

$$P_0P' = -P_0P.$$

Da t zu R_1P' parallel ist, so folgt:

Bei in den Ordinaten reciproken Curven sind di Subtangenten für correspondirende Punkte gleich aber entgegengesetzt gerichtet.

Aus dem Krümmungsmittelpunkte K_1 wird die Tangent $t'_1 \equiv (P_1R'_1)$ an die Differentialcurve f'_1 für den Punkt $P'_1 \equiv P$ i

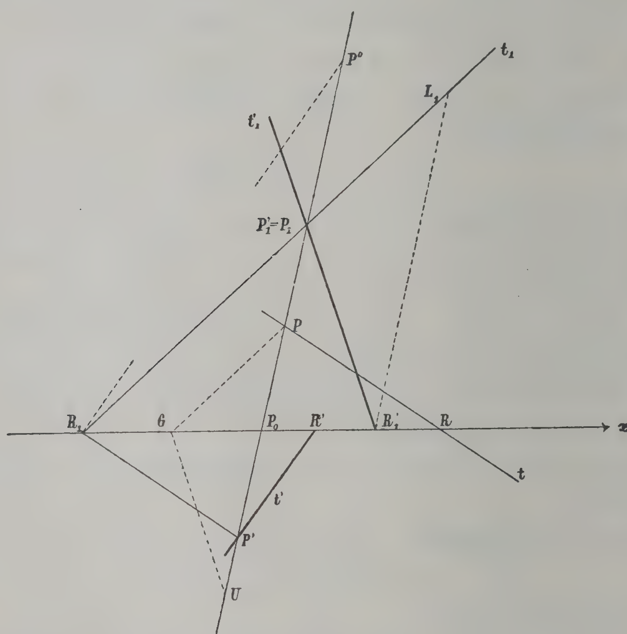


Fig. 11.

gewohnter Weise abgeleitet. Man errichtet in P_1 und K_1 d Senkrechten zu (P_1P_0) respective x und durch ihren Schnitt d Senkrechte auf t_1, durch deren Fusspunkt L_1 man die Paralle zu (P_1P_0) legt, die auf x den Punkt R'_1 von t'_1 bestimmt.

Um dann K zu finden, wird man aus t'_1 die Tangente t' P' an die Differentialcurve f' zu ermitteln trachten.

Differentiren wir die Gleichung (2) nochmals, so erhalten wir

$$2y'y_1'+yy_1''+y_1y''=0. \tag{3}$$

Setzen wir in diese Gleichung die besonderen Werthe für die Ordinaten auf (P_0P) ein, so ergibt sich leicht

$$P_0P''=2.P_0P-\frac{P_0P\times P_0P_1''}{P_0P_1}.$$

Ziehen wir nun $(PG)||t_1$ bis zum Schnitt G mit x und $(GU)||t_1'$ bis zum Schnitte U mit (P_0P), so ist

$$P_0U=\frac{P_0P\times P_0P_1''}{P_0P_1}.$$

Tragen wir weiter auf (P_0P) die Strecke UP von P aus auf, so gelangen wir dadurch zu dem Punkte P'' der zweiten Differentialcurve von f; denn man überzeugt sich leicht, dass

$$P_0P''=2.P_0P-P_0U.$$

Zieht man schliesslich durch P' die Parallele zu $(P''R_1)$ bis sie x im Punkte R' schneidet, so kann man aus R' den Punkt K durch die öfters schon benützte Construction, durch welche R' mit K ebenso zusammenhängt, wie R_1' mit K_1, leicht finden.

20. Im Vorigen haben wir den Ausdruck $yy_1=a^2$ zweimal nacheinander differentiren müssen, um dann die Construction weiter geometrisch entwickeln zu können. Wir können aber in diesem Falle leicht den Punkt R' aus R_1' auf rein geometrischem Wege ableiten.

Vermöge der Gleichung (2) besteht die Proportion

$$y':y_1'=-y:y_1,$$

derzufolge wir zur Tangente t' in P' an f' auch auf dem nachstehend bezeichneten Wege gelangen können — Fig. 12.

Wir verschieben die Ordinatenlinie (P_0P) parallel zu sich selbst; die Punktreihe auf ihr soll sich dabei so bewegen, dass P_0 die x-Axe, P_1 die Gerade t_1 und P_1' die Gerade t_1' beschreibt.

Unter steter Festhaltung daran, dass gemäss der Proportion (4) für alle Lagen der veränderlichen Ordinatenlinie die Beziehungen

$$P_0P_1 \times P_0P = a^2, \qquad P_0P_1' : P_0P' = -P_0P_1 : P_0P$$

bestehen bleiben, wird der Punkt P' eine Curve q' beschreiben, deren Tangente in P' mit t' identisch ist.

Machen wir jedesmal $P_0\mathfrak{P} = P'P_0$, so beschreibt $\mathfrak{P}$ eine zu q' symmetrische Curve q für x als Axe und y als Richtung der Symmetrie. Diese Curve q geht alsdann durch den Punkt P

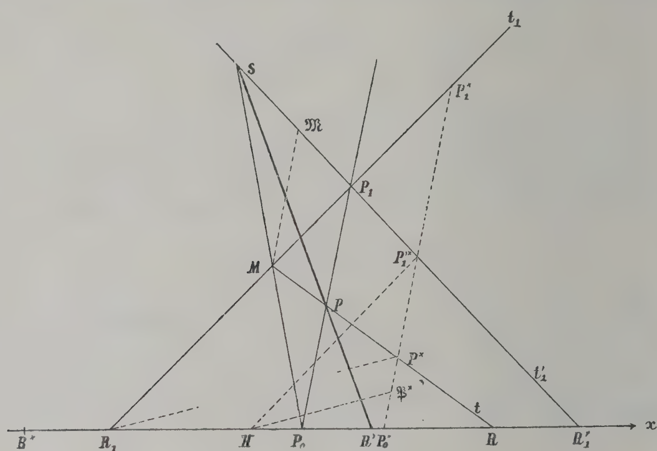


Fig. 12.

und ihre Tangente in P schneidet t' auf x, liefert also selbst auch den fraglichen Punkt R'.

Um auf irgend einer Ordinatenlinie nach der gegebenen Ausführung aus den Lagen $P^\times$, $P_1^\times$, $P_1'^\times$ der Punkte P, P_1, P den entsprechenden Punkt $\mathfrak{P}^\times$ zu erhalten, kann man zunächst durch $P_1'^\times$ die Parallele zu t_1 durch deren Schnitt H mit x die Parallele zu $(R_1P^\times)$ legen, welche alsdann auf $(P_0P^\times)$ den Punkt $\mathfrak{P}^\times$ festlegt.

Nun beschreibt bei der angeführten Bewegung der Strahl (R_1P) einen Strahlenbüschel um R_1, welcher zur Reihe der Punkte $P, P^\times, \ldots$ auf t perspectiv, sonach zur Reihe der Punkte $P_1', P_1'^\times, \ldots$ auf t_1' und schliesslich auch zur Reihe $[H]$ der Punkte $R_1, H \ldots$ auf x projectiv ist. Desshalb ist auch di

letzterwähnte Reihe $[H]\ldots$ projectiv zu dem Schnitte des besagten Strahlenbüschels mit der unendlich fernen Geraden, und es hüllen demgemäss die Geraden $(H\mathfrak{P}^{\times}),\ldots$, welche die Punkte der Punktreihe $[H]$ mit den entsprechenden Punkten der zu ihr projectiven, auf der unendlich fernen Geraden der Ebene erzeugten Punktreihe verbinden, eine Parabel p ein, welche x berührt.

Da $[H]$, also auch der Tangentenbüschel $[(H\mathfrak{P}^{\times})]$ der Parabel p zu dem Parallelstrahlenbüschel $(P_0^{\times}\mathfrak{P}^{\times}),\ldots$ projectiv ist, so ergibt sich die Curve q als das Erzeugniss eines Strahlenbüschels erster Ordnung mit einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Weil ferner durch diese Projectivität die unendlich ferne Gerade sich selbst entspricht, so ist diese ein Theil des Erzeugnisses und der übrige Theil q ist ein Kegelschnitt.

Für die Ordinatenlinie durch R ist das Verhältniss $y:y_1$ gleich Null; somit fällt hier $\mathfrak{P}$ mit R zusammen. Für die Ordinatenlinie durch R_1' hat das erwähnte Verhältniss einen endlichen Werth, wesshalb hier $\mathfrak{P}$ mit R_1' zusammenfällt. Für die Ordinatenlinie durch R_1 besitzt das Verhältniss den Werth ∞, somit fällt da $\mathfrak{P}$ ins Unendliche. Für den Schnitt M der Tangenten t, t_1 ist $y:y_1 = 1$; also ist der entsprechende Punkt $\mathfrak{M}$ von q der Schnittpunkt der durch M gehenden Ordinatenlinie mit t_1'.

Auf diese Weise haben wir bereits fünf Punkte von q ermittelt; wir können somit die Tangente in P an diesen Kegelschnitt construiren. Zu dem Behufe bezeichnen wir den unendlich fernen Punkt von y mit Y_∞ und den benachbarten Punkt von P auf q mit Q, so ergibt sich diese Tangente (PQ) aus dem Pascal'schen Sechseck $Y_\infty \mathfrak{M} R_1' R P Q$ einfach dadurch, dass man den Schnittpunkt S der Geraden t_1', $(P_0 M)$ mit P verbindet. (PS) schneidet also x in dem gesuchten Punkte R'.

Schneiden wir das hier entstehende vollständige Viereck PP_1MS mit x, so sieht man, dass RR_1', R_1R' zwei Paare einer Involution sind, für die P_0 ein Doppelpunkt ist. Wir haben somit das Ergebniss:

Der Punkt R' ist der dem Punkte R_1 zugeordnete Punkt in der auf x durch P_0 als Doppelpunkt und $R_1'R$ als ein Punktepaar bestimmten Involuton.

21. Für das hier behandelte Problem liegt eine aus de Definitionsgleichung $yy_1 = a^2$ direct hervorgehende Lösung auf der Hand. Dieselbe soll nun besprochen werden.

Tragen wir auf $(P_0 P)$ die Strecke a nach $P_0 A_1$ und $A_2 P$ auf, so bilden die Punkte P, P_1 ein Paar einer Involution au $(P_0 P)$, für die P_0 der Centralpunkt und $A_1 A_2$ die Doppel punkte sind.

Nehmen wir in der Ebene einen festen Kegelschnitt $(a$ und einen Strahlenbüschel vom Mittelpunkte U an, so ist durc dieselben eine einfache quadratische Punkttransformation fest gelegt, in der je zwei einander entsprechende Punkte auf einen Strahl des Büschels U liegen und in Bezug auf (a) conjugi sind. Der Punkt U und die Schnittpunkte V, W seiner Polar in Bezug auf (a) mit (a) selbst sind die Hauptpunkte diese Transformation.

Die durch unsere Gleichung $yy_1 = a^2$ gegebene Trans formation, welche f_1 in f überführt, ist eine Transformatio dieser Art, für welche der Kegelschnitt in die durch die Gle chung $y^2 = a^2$ ausgedrückten Geraden a_1, a_2 zerfällt und de Punkt U im Unendlichen auf y liegt. Die Axe x ist die Polar von U, auf welcher die unendlich fernen Punkte V, W zu sammenfallen.

In der erwähnten quadratischen Transformation entsprich jeder Geraden ein Kegelschnitt durch U, V, W; in unserer speciellen Falle entspricht somit jeder Geraden t_1 eine Hyperbe für welche x eine, und die durch den Schnittpunkt R_1 von mit x zu y parallel gelegte Gerade die zweite Asymptote is Ist t_1 Tangente in P_1 an f_1, so ist t Tangente in P an die en sprechende Hyperbel; es gilt also thatsächlich für den Schnit punkt R von t mit x die früher erwiesene Beziehung

$$RP_0 = P_0 R_1.$$

Um K zu erhalten, legen wir durch zwei der Hauptpunkt U, V, W einen Kegelschnitt, der durch den Punkt P_1 geht un für ihn K_1 zum Krümmungsmittelpunkte hat; also entwed eine Hyperbel h_1, deren Asymptoten parallel zu den Coord natenaxen sind oder eine Hyperbel h_2, für welche x ein Asymptote ist.

Einem solchen Kegelschnitt entspricht als eigentliche urve wieder ein Kegelschnitt, im ersten Falle eine Hyperbel $h_1^\times$, eren Asymptoten zu x, y parallel sind, im zweiten Fall eine yperbel $h_2^\times$, für die gleichfalls x eine Asymptote ist und die it h_2 concentrisch liegt. Die Krümmungsmittelpunkte dieser yperbeln sind mit K identisch.

22. Aus dem Ganzen ersehen wir, dass die Construction ach der Angabe des Satzes in Artikel 20 wohl die interssanteste ist. Dieselbe liefert auch am raschesten die hier auftetenden metrischen Relationen.

Heisst $\mathfrak{P}_0$ der zweite Doppelpunkt der darin ausgerochenen Involution, so ist bekanntlich, da die Doppelpunkte des Paar harmonisch trennen,

$$\frac{2}{P_0\mathfrak{P}_0} = \frac{1}{P_0R} + \frac{1}{P_0R_1'}, \tag{5}$$

$$\frac{2}{P_0\mathfrak{P}_0} = \frac{1}{P_0R_1} + \frac{1}{P_0R'}. \tag{6}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{1}{P_0R'} - \frac{1}{P_0R_1'} = \frac{1}{P_0R} - \frac{1}{P_0R_1} \tag{7}$$

er

$$\frac{1}{P_0R'} = \frac{1}{P_0R_1'} - \frac{2}{P_0R_1}. \tag{7'}$$

Dies führt also zu folgendem Satze (Fig. 12):

Macht man $P_0R^\times = R_1'P_0$, so ist der gesuchte nkt R' zu $R^\times$ harmonisch conjugirt in Bezug auf e Punkte P_0, R.

Es ist selbstverständlich, dass wir statt der nun gennenen harmonischen Punktgruppe auf x auch diejenige istruiren könnten, in der die Ordinatenlinien der ersteren die ngente t schneiden, wodurch die Construction sich um eine ie verkürzt.

Wir bemerken noch, dass unsere Relationen von a unabıgig sind.

Setzen wir $P_0R = s$, $P_0R_1 = s_1$, so dass $s+s_1 = 0$ ist und behalten wir im Übrigen die Bezeichnungen des Artikels 3 bei, so ist $OR' = \mu$, $OR'_1 = \mu'$ und somit in Folge der Gleichung (7')

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} - \frac{2}{s_1}. \tag{7''}$$

Da nun aus der Gleichung (1) des Artikels 3 folgt

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\sin^2 w}{\rho \sin\alpha \sin^2\beta},$$

so bekommen wir hier die Relation

$$\frac{1}{\rho \sin\alpha \sin^2\beta} = \frac{1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} - \frac{2}{s_1 \sin^2 w}. \tag{8}$$

Diese Relation könnten wir auf mannigfache Weise noch umgestalten, was sich empfehlen würde, wenn man nach ihr die Construction von ρ thatsächlich durchführen wollte. Durch Elimination von α kommt beispielsweise

$$\frac{1}{\rho y \sin^3\beta} + \frac{1}{\rho_1 y_1 \sin^3\beta_1} = \frac{2}{s_1^2 \sin^2 w}. \tag{8'}$$

Bezeichnen wir noch die Länge RP der Tangente an f mit t, die Länge R_1P_1 der Tangente an f_1 mit t_1, so erhalten wir die Relation

$$\frac{t^2}{\rho y \sin\beta} + \frac{t_1^2}{\rho_1 y_1 \sin\beta_1} = 2,$$

welche von dem Winkel w des Coordinatensystems unabhängig ist; dieselbe eignet sich auch für unsere Construction.

Man wird darnach auch die Normalen n in P an f und n_1 in P_1 an f_1 ziehen und den Punkt P_0 auf dieselben orthogonal projiciren nach L, respective L_1; zu LR fällt man dann die Senkrechte durch R und bringt sie mit n im Punkte M zum Schnitte; desgleichen bringt man n_1 mit der durch R_1 zu (L_1R_1) errichteten Senkrechten in M_1 zum Schnitt; setzt man $PM = w$, $P_1M_1 = w_1$, so wird aus der Gleichung (9) die folgende:

$$\frac{w}{\rho} + \frac{w_1}{\rho_1} = 2,^1 \tag{10}$$

ie zum Zwecke der Construction auch in der Form

$$\frac{w-\rho}{\rho} + \frac{w_1-\rho_1}{\rho_1} = 0 \tag{10'}$$

der

$$\frac{MK}{PK} = -\frac{M_1K_1}{P_1K_1}$$

eschrieben werden kann.

23. Unsere Ergebnisse lassen sich noch weiter mit dem n Abschnitte II Erläuterten in Einklang bringen. Ist nämlich f ne auf ein Parallelcoordinatensystem bezogene Curve, so erden wir aus ihr eine neue Curve f' derart ableiten, dass die orrespondirenden Punkte P, P' dieser Curven gleiche Abscissen esitzen und dass zwischen den Ordinate Y von f und η on f' die Beziehung

$$\frac{1}{a\eta} = \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx}$$

esteht, wofern wieder a eine als Constructionseinheit angeommene Constante bedeutet.

Wir nennen in diesem Falle f' eine inverse Differentialirve von f in Bezug auf die x-Axe.

Nehmen wir die positive Richtung der y-Axe für f' entegengesetzt der von f an, dann ergibt sich folgende Conruction von P aus P'.

Durch P lege man die Parallele zu x bis zum Schnitt $\mathfrak{P}$ it y und ziehe durch den Schnitt der Tangente an f in P mit r x-Axe die Parallele zu dem Richtstrahl $(S\mathfrak{P})$, welcher die dinate von P in P' trifft; dabei hat S die frühere Bedeutung.

---

[1] Für den Krümmungshalbmesser einer auf die Asymptoten bezogenen perbel beispielsweise folgt daraus $\rho = \frac{m}{2}$.

Da hier der Satz des Artikels 11 sinngemässe Anwendung findet, so sieht man daraus, dass der Schnittpunkt der Tangente t' in P' an f' mit x der im vorigen Artikel mit $R^{\times}$ bezeichnete Punkt ist, so dass man den zuletzt abgeleiteten Satz auch wie folgt zum Ausdrucke bringen kann.

»Ist R' der Punkt auf x, welcher durch die Tangenten $t, t^{\times}$ unserer Curven in zwei correspondirenden Punkten vom Endpunkte ihrer gemeinschaftlichen Abscisse harmonisch getrennt wird, so erfolgt die Construction des Krümmungsmittelpunktes K von f aus R' auf Grund des Satzes (I) im I. Abschnitte«.

24. Macht man f reciprok in den Ordinaten zu f_1, und f_2 reciprok in den Abscissen zu f, so können wir f_1, f_2 als zwei Curven reciproker Coordinaten bezeichnen.

Der Zusammenhang der Curven f_1, f_2 ergibt sich wohl auch direct.

Die Probleme, mit denen wir uns hier beschäftigen, werden dem Artikel 21 analog gelöst. Denn, wenn für zwei correspondirende Punkte dieser Curven die Relationen $x_1 x_2 = a^2$, $y_1 y_2 = b^2$ gelten, so sind diese Punkte einander involutorisch entsprechend in der quadratischen Verwandschaft doppelt conjungirter Elemente in Bezug auf das Punktequadrupel mit den Coordinaten a, b; $a, -b$; $-a, b$; $-a, -b$; das Hauptdreieck der Transformation ist durch den Coordinatenursprung und die unendlich fernen Punkte der Coordinatenaxen festgelegt.[1]

Aber auch die Benützung der hier auf Grund von Betrachtungen der Integralcurven gewonnenen Resultate führt uns zum mindesten ebenso bequem zum Ziele.

Ist — Fig. 13 — A_1 ein Punkt von f_1, und A_2 der correspondirende Punkt von f_2, so gibt der Schnitt der Ordinatenlinie von A_1 mit der Abscissenlinie von A_2 den Punkt A für die Curve f, welche zu f_1 in den Ordinaten, zu f_2 in den Abscissen reciprok ist. Ist P_0 der Endpunkt der Abscisse x_1, Q_0 der Endpunkt der Ordinate y_2 auf y, so wird man $R_1 P_0$ auf x nach $P_0 R$ übertragen, die Gerade $t = (AR)$ mit y im Punkte S schneiden

---

[1] Cf. Salmon-Fiedler, Analytische Geom. der Kegelschnitte (5. Aufl.) S. 761.

und $Q_0 S_2$ äquipollent zu SQ_0 machen; alsdann ist $t_2 = (S_2 A_2)$ die Tangente in A_2 an f_2.

Bezeichnen wir die Subtangenten auf x mit dem Buchstaben s, auf y mit den Buchstaben u, so ist

$$s_1 : s_2 = x_1 : x_2 \tag{11}$$

und

$$u_1 : u_2 = y_1 : y_2. \tag{12}$$

Die soeben ermittelte Tangentenconstruction vereinfacht sich, wenn man beachtet, dass die vier Strahlen $A\,(P_0, Q_0, R_1, R)$ harmonisch sind, demzufolge AR_1 schon durch S_2 geht.

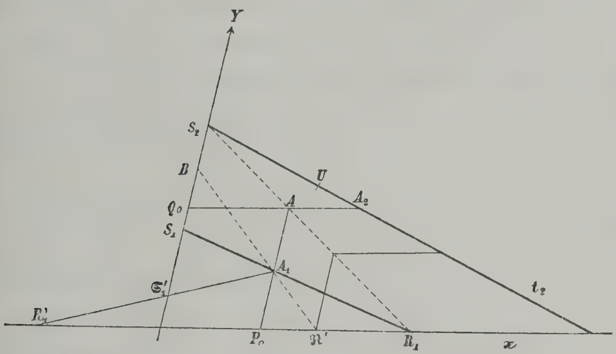


Fig. 13.

Um darnach t_2 zu construiren, wenn t_1 gegeben st, verbindet man $R_1 \equiv (t_1 x)$ mit A und bringt diese Gerade in S_2 mit y zum Schnitte; alsdann ist $t_2 \equiv (S_2 A_2)$.

Oder man zieht durch den Schnitt $S_1 \equiv (t_1 y)$ und durch len Schnitt der Abscissenlinie von A_1 mit der Ordinatenlinie on A_2 eine Gerade, bis sie x im Punkte R_2 trifft; alsdann ist $_2 = (R_2 A_2)$.

Ebenso lässt sich der Krümmungsmittelpunkt K_2 von f_2 für en Punkt A_2 leicht finden, wenn der Krümmungsmittelpunkt K_1 von f_1 in A_1 gegeben ist. Man wird da zunächst aus K_1 den unkt R_1' auf x nach dem schon öfters benützten Vorgange Satz I, Abschnitt I) ermitteln. Ist $\mathfrak{R}'$ der zu R_1' in Bezug auf P_0, R_1 harmonisch conjugirte Punkt, so hat man einem Satze

oder der Formel (7″) des vorigen Artikels zufolge, $P_0 R'$ äquipollent zu $\mathfrak{R} P_0$ zu machen, um den Punkt R' zu erhalten, welcher mit dem Krümmungsmittelpunkte K von f in A ebenso verknüpft ist, wie R_1' mit K_1.

Die weiteren Constructionen vollziehen sich nun auf der y-Axe.

Es ist der Punkt K für die Curve f gegeben; man soll den Schnittpunkt S' der Tangente an eine in Bezug auf die Basislinie y aus f gebildete Differentialcurve in dem dem Punkte A correspondirenden Punkte derselben ermitteln. Aus der herangezogenen Construction des Satzes I im Abschnitt I geht unmittelbar hervor, dass, wenn man durch $\mathfrak{R}'$ die Parallele zu y bis zum Schnittpunkte mit t und von hier die Parallele zu x zieht, diese zuletzt gezogene Gerade die Axe y in dem Punkte $S^\times$ trifft. Macht man dann $Q_0 S^\times$ äquipollent zu $S' Q_0$ und sucht wiederum den zu $S^\times$ harmonisch conjugirten Punkt S_2' in Bezug auf Q_0, S_0, so besteht in Folge von (7″) des vorigen Artikels zwischen diesem Punkte S_2' und dem fraglichen Punkte K_2 wieder die früher erwähnte Beziehung aus dem Abschnitt I.

Nun werden die Abschnitte zwischen t und $(R_1 S_2)$ auf den zu y parallelen Geraden durch $(Q_0 A_2)$ halbirt. Daraus folgt, dass man den Punkt $S^\times$ direct ohne Benützung der Tangente t ermitteln kann, indem man durch $\mathfrak{R}'$ die Parallele zu y legt und durch den Schnittpunkt derselben mit $(R_1 S_2)$ die Parallele zu x zieht, welche auf y gleichfalls den Punkt $S^\times$ festlegt.

Fassen wir Alles zusammen, so resultirt beiläufig nachstehende Construction — Fig. 13.

Um K_2 zu finden, wird man den Punkt R_1' aus K_1 ableiten und den Schnittpunkt $\mathfrak{S}_1'$ von $(R_1' A_1)$ mit y festlegen. Hierauf trägt man $S_1 B = \mathfrak{S}_1' S_1$ auf y auf und verbindet B mit A_1. Durch den Schnittpunkt $\mathfrak{R}'$ dieser Verbindungsgeraden mit x zieht man die Parallele zu y bis zur Geraden $(R_1 S_2)$, von hier die Parallele zu x. Zu dem Schnittpunkt dieser Parallelen mit t_2 sucht man den harmonischen Punkt U in Bezug auf A_2, S_2. Die Senkrechten zu x, respective y durch U treffen die Normale n_2 von f_2 in A_2 in zwei Punkten, deren Entfernung gleich der Strecke $A_2 K_2$ ist.

Aus dieser Construction ergibt sich sofort eine analoge zweite, wenn wir umgekehrt unsere Curven zuerst auf die y-Axe beziehen und dann auf die x-Axe übergehen.

Eine metrische Relation zwischen den correspondirenden Krümmungsgeraden ρ_1, ρ_2 für die Curven f_1, f_2 ergibt sich auch sehr leicht, etwa aus der Formel (8) des Artikels 22. Nach derselben herrscht zwischen dem Radius ρ von f und ρ_1 die Beziehung

$$\frac{1}{\rho \sin\alpha \sin^2\beta} = \frac{1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} - \frac{2}{s_1 \sin^2 w}.$$

Darnach besteht zwischen ρ und ρ_2 analog die Beziehung

$$\frac{1}{\rho \sin\alpha \sin^2\beta} = \frac{1}{\rho_2 \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2} - \frac{2}{u_2 \sin^2 w}.$$

Da nun

$$y_2 : s_1 = \sin\alpha : \sin\beta,$$

so folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{s_1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} = \frac{y_2}{\rho_2 \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2} + \frac{2}{\sin^2 w}\left(1 - \frac{y_2}{u_2}\right)$$

oder mit Rücksicht auf (12)

$$\frac{y_2}{\rho_2 \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2} = \frac{s_1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} + \frac{2}{\sin^2 w}\left(\frac{y_1}{u_1} - 1\right), \quad (13)$$

oder, da auch

$$u_2 : x_1 = \sin\alpha : \sin\beta,$$

die Gleichung

$$\frac{u_2}{\rho_2 \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2} = \frac{x_1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} + \frac{2}{\sin^2 w}\left(1 - \frac{x_1}{s_1}\right).$$

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Ueber

GRAPHISCHE INTEGRATION

Ein Beitrag zur Arithmographie

von

JOSEF M. ŠOLÍN,
honor. Docenten am böhmischen polytechnischen Institute des Königr. Böhmen.

PRAG.

Verlag der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Eduard Grégr.

1872.

Ueber graphische Integration.

1. Allgemeine Bemerkungen.

Operationen der graphischen Statik, wodurch mechanische Probleme gelöst werden, ıe auf analytischem Wege die Anwendung der Infinitesimalrechnung erfordern, eignen sich rlicher Weise auch zur Lösung der rein mathematischen Aufgabe, aus einer gegebenen tion $F(x)$ ihre Derivationen $F'(x)$, $F''(x), \ldots$ und umgekehrt aus einer gegebenen Derin die entsprechende Urfunction abzuleiten.

Stellt man eine Function

$$y' = F'(x)$$

etrisch durch eine Linie F' in der Ebene XY eines rechtwinkligen Cartesischen Coorensystemes dar, so bedeutet das Integral $\int y'dx$ — eine Grösse von zwei Dimensi- — den zwischen jener Curve und der Abscissenaxe enthaltenen, durch irgend zwei Ordi- begrenzten **Flächenraum.** Es erscheint jedoch als vortheilhafter, diese variable Grösse Zuhilfenahme eines constanten Factors f, welcher eventuell als Längeneinheit aufgefasst en kann, durch eine **Länge** y darzustellen, also

$$\int y'dx = fy$$

etzen und die Relation zwischen y und x durch eine neue Curve F zu repräsentiren. ist offenbar die Ableitung der Curve F' aus F mit dem Differentiren, die umgekehrte ation mit dem Integriren gleichbedeutend.

2. Graphisches Differentiren.

Sei F Fig. 1 die auf ein rechtwinkliges Cartesisches System XoY bezogene, der tion

$$y = F(x)$$

rechende Curve. Durch diese Gleichung werden die beiden Punctreihen $(m\ldots)$, $(n\ldots)$ inander bezogen und dadurch auch weiter die beiden Parallelstralenbüschel $y_\infty(m\ldots)$, $\ldots)$ *), als deren Erzeugnis die Curve F erscheint. Durch die Curve F als Ort der e p ist auch der dieselbe umhüllende Stralenbüschel höherer Ordnung gegeben, und esem denken wir uns den entsprechenden Richtungsbüschel (o') construirt, dessen Mittelt o' auf der Axe X in der Entfernung $o'o = f$ vom Anfangspuncte o des Systemes an-

*) x_∞, y_∞ sind die unendlich fernen Puncte der Axen X, Y.

genommen werde. Dieser Richtungsbüschel bestimmt auf der Axe Y eine neue Punctr $(n' \ldots)$, welche dadurch gleichfalls auf die Reihe $(m \ldots)$ bezogen erscheint. Die Paral stralenbüschel $y_\infty (m \ldots)$ und $x_\infty (n' \ldots)$ erzeugen eine neue Curve F', deren Beziehung F aus Folgendem hervorgeht. Es ist

$$\frac{dy}{dx} = tg\ \alpha = \frac{on'}{f} = \frac{mp'}{f},$$

und wenn man $mp' = y'$ bezeichnet,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{f}, \; y' = f\frac{dy}{dx} = f\ F'(x).$$

Nimmt man f als die Einheit an, mittels welcher die graphische Darstellung mit analytischen Ausdruck zusammenhängen soll, so ist einfach

$$y' = F'(x).$$

Der Ort der Puncte p' kann daher als der geometrische Ausdruck der ersten I vation von $F(x)$ angesehen werden. Auf dieselbe Weise kann man weiter aus der e Derivation die zweite, aus dieser die dritte u. s. w. ableiten.

3. Graphisches Integriren.

Ist die Derivation

$$y' = F'(x)$$

gegeben und soll die Urfunction

$$y = F(x)$$

bestimmt werden, so gilt es, aus den Punctreihen $(m \ldots)$, $(n' \ldots)$ die Punctreihe $(n \ldots)$ auch aus dem Büschel (o') und der Reihe $(m \ldots)$ den Büschel $(P \ldots)$ höherer Ordnun finden. Denken wir uns aus dem Büschel $(P \ldots)$ nur einzelne Stralen herausgezeichnet betrachten sie als Seiten eines der Curve F umschriebenen Polygons. Wäre die Lage Ordinaten bekannt, auf denen sich die Polygonscheitel q, $q_1, \ldots$ befinden, so könnte dieses umschriebene Polygon offenbar ohne Weiteres construiren, sobald man einen irgend einer Seite desselben beliebig oder einer gegebenen Bedingung gemäss anne würde. Da sich aber die Lage der Ordinaten der Puncte q im Allgemeinen nicht angeben so kann man das Polygon nur approximativ u. z. auf Grund der Annahme zeichnen, das Curve F aus Bögen bestimmter Linien zusammengesetzt sei.

Setzen wir den einfachsten Fall voraus, nämlich es sei die Linie F' eine Gerade

$$y' = ax + b;$$

dann folgt

$$y = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx + c,$$

d. h. F ist eine Parabel, deren Axe die Richtung der Ordinaten hat. Ist q der Schnit irgend zweier Tangenten pq, p_1q, so fällt die Ordinate qr des Punctes q mit dem der pp_1 zugeordneten Durchmesser zusammen; es ist

$$pt = tp_1$$

somit auch
$$mr = rm_1.$$
In diesem Falle befinden sich also die Ordinaten der Polygonscheitel in der Mitte zwi-
en den Ordinaten der bezüglichen Berührungspuncte. Ist nun F' eine beliebige Curve, und wird
elbe durch Ordinaten mp', $m_1 p'_1, \ldots$ in solche Bögen $p' p'_1, \ldots$ getheilt, welche man mit
ügender Annäherung als gerade ansehen kann, so wird man auch mit genügender Annäherung
Curve F aus parabolischen Bögen bestehend denken und die Ordinaten der Polygon-
eitel in der Mitte zwischen den Ordinaten der bezüglichen Berührungspuncte voraussetzen
nen. Ist das umschriebene Polygon gezeichnet, so kann die Curve F selbst aus ihren
genten und deren Berührungspuncten, sobald dieselben nur in genügender Anzahl vor-
len sind, mit aller wünschenswerten Genauigkeit dargestellt werden.

Zum Behufe der wirklichen Ausführung dieser Operationen wird man auf die Axe
gleiche Strecken mm_1, $m_1 m_2, \ldots$, am besten wohl unmittelbar die Hälften derselben mr,
$m_1 r_1$, $r_1 m_2, \ldots$ auftragen und zu den Puncten m, $m_1, \ldots$ die zugeordneten Puncte n',
$\ldots$ der Axe Y suchen. Ist die Derivation $F'(x)$ nicht unmittelbar graphisch (durch die
ve F'), sondern durch einen analytischen Ausdruck gegeben, so wird man von der Dar-
ung der Curve F' Umgang nehmen und unmittelbar die Puncte n', $n'_1, \ldots$ aus der Gleichung
$$y' = F'(x)$$
h Rechnung oder Construction ableiten können. Ob in diesem Falle zu den Strecken
, $m_1 m_2, \ldots$ solche Bögen $p'p'_1$, $p'_1 p'_2, \ldots$ der Curve F' gehören, welche als geradlinig
sehen werden können, wird man aus der relativen Grösse der auf einander folgenden
cken $n'n'_1$, $n'_1 n'_2, \ldots$ zu beurtheilen im Stande sein. Es ist nämlich
$$on'_1 - on' = y'_1 - y' = \triangle y';$$
den Fall, dass
$$y' = a + bx$$
tzt wird, folgt weiter
$$\triangle y' = b. \triangle x.$$
Da nun $\triangle x$ constant angenommen wurde, so sollte auch $\triangle y'$ constant sein, d. h. wir
n die Strecken mm_1, $m_1 m_2, \ldots$ auf der Axe X so klein zu nehmen, damit je zwei auf
der folgenden Strecken $n'n'_1$, $n'_1 n'_2, \ldots$ auf der Axe Y so wenig als möglich differiren. Die
nschte Genauigkeit würde offenbar gleichmässiger gewahrt werden, wenn man die Strecken
, $n'_1 n'_2, \ldots$ auf der Axe Y unter einander gleich und genügend klein, also die Werte
y' nach dem Gesetze einer arithmetischen Progression fortschreitend annähme und die
ordneten Puncte der Axe X suchte; ein Uebelstand dieses Verfahrens ist jedoch das
nn nöthige Halbiren der ungleichen Strecken mm_1, $m_1 m_2, \ldots$ in den Puncten r, $r_1, \ldots$

Soll die Curve F durch einen bestimmten Punct der Ebene XY gehen, so hat man
von der Ordinate dieses Punctes auszugehen und denselben als Berührungspunct der
rechenden Polygonseite anzunehmen. Man kann aber auch die Curve F zunächst ohne
sicht auf den bestimmten Punct zeichnen und der gegebenen Bedingung nachträglich
entsprechende Transformation des Coordinatensystemes genügen, indem offenbar eine
mmte Annahme des Ausgangspunctes wohl die Lage, keineswegs aber die Form der
e F bedingt.

Nimmt man den Punct o' nicht auf der Abscissenaxe X mit der Abscisse $-f$, so dern auf der Ordinatenaxe Y mit der Ordinate $-f$ an, so bestimmen die Stralen des Büsch (o') auf X die Puncte einer neuen Reihe $(m' \ldots)$, und es ist

$$x' = om' = f\ ctg\ \alpha = f \frac{dx}{dy} = \frac{f}{F'(x)},$$

und wenn $f = 1$ angenommen wird,

$$x = \frac{1}{F'(x)}.$$

Diese Punctreihe $(m' \ldots)$ wird man anstatt der Reihe $(n' \ldots)$ mit Vortheil benüt können, wenn die erste Derivation analytisch gegeben und deren reciproker Wert einfac zu construiren ist als die Derivation selbst, z. B. $y' = \frac{1}{x}$.

Diese Andeutungen begründen das graphische Integriren der Differentialausdrücke einer Variablen, u. z. repräsentirt die Curve F das unbestimmte Integral, während das zwisc zwei Grenzen x_1, x_2 genommene bestimmte Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx$$

durch die Differenz $y_2 - y_1$ der beiden Ordinaten, welche jenen Grenzen als den Absci entsprechen, dargestellt wird. So erscheint in Fig. 2 durch die Curve F das unbestim Integral

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx,$$

durch die Differenz $b''b$ der Ordinaten der Puncte a, b derselben das bestimmte Integra

$$\int_{0\cdot 5}^{2} \frac{\cos x}{x}\, dx$$

dargestellt. Die Ableitung der einzelnen Werte von $y' = \frac{1}{x} \cos x$ (als der vierten Pro tionalen zu $f = 1$, x, $\cos x$) wurde in der Figur für die Werte $x = 1\cdot 2$, $1\cdot 3$, $1\cdot 4$ ersich gemacht. Mittels dieser Werte von y' wurde auch die Curve F' gezeichnet, obwohl dies zur Ausführung der graphischen Integration offenbar nicht mehr nothwendig war.

Hat man aus einer gegebenen Derivation $F'(x)$ die Urfunction $F(x)$ abgeleitet kann man diese als Derivirte einer weiteren Urfunction $F_1(x)$ ansehen und letztere constr u. s. f., also doppelt, dreifach, ... $n$fach integriren.

Anmerkung. Vergleicht man das graphische Differentiren mit dem graphis Integriren, so ist klar, dass in theoretischer Beziehung das erstere eine vollkommen genaue letztere hingegen eine bloss approximative Operation ist; in praktischer Beziehung ist je die Genauigkeit der ersteren eben so durch die Grenzen des Sehens und die Schärfe Werkzeuge beschränkt wie die der letzteren, und man kann bei dieser in der Genaui so weit gehen, als eben die angeführten äusseren Umstände es erlauben. Man sieht fe dass — reelle Ausdrücke vorausgesetzt — beim graphischen Integriren wohl von grös

: geringeren Schwierigkeiten, nie aber von Unmöglichkeiten die Rede sein kann. Nur n Umstand darf man dabei nicht übersehen; durch das oben auseinandergesetzte Veren kann man nämlich nicht solche Puncte der Curve F erhalten, für welche $F'(x)$ unich gross wird. Man kann sich solchen Puncten wohl beliebig nähern; dieselben zu immen ist jedoch auf diesem Wege nicht möglich. Besteht also die Curve aus Zweigen, he durch derartige Puncte zusammenhängen, so kann man wohl die einzelnen Curvenge für sich, nicht aber in ihrer gegenseitigen Lage zeichnen.

Ausser den Fällen, wo die Derivation gegeben und die Urfunction unbekannt ist, ıten die angeführten Operationen auch dazu benützt werden, um Curven, welche durch Gleichung gegeben sind und welche man unmittelbar — ohne Zuhilfenahme der Rech; — nicht construiren kann, aus ihren Derivationen, sofern diese einfach construirbar (vielleicht zum Zwecke der approximativen Lösung transcendenter Gleichungen) zu zeichnen. :ann z. B. die Logistik

$$y = a\, lx$$

ihrer ersten Derivation

$$y' = \frac{a}{x}$$

leicht construirt werden.

4. Integration von Differentialgleichungen mit zwei Variablen.

Nicht so einfach ist die allgemeinere Aufgabe, die Urfunction zu finden, wenn anstatt Derivation y' als Function von x eine Gleichung

$$y' = \varphi\,(x, y)$$

noch allgemeiner

$$\varphi\,(x, y, y') = 0$$

hen x, y, y' gegeben ist. Nichtdestoweniger lässt sich auch hier ein approximatives Vern angeben, dessen Genauigkeit man beliebig steigern kann und welches sich an das oben eitete unmittelbar anschliesst.

Die graphische Integration der Gleichung

$$(1) \qquad y' = F'(x),$$

e offenbar nur ein specieller Fall der allgemeinen Gleichung

$$(2) \qquad y' = \varphi\,(x, y)$$

ann nämlich auch folgendermassen aufgefasst werden. Nimmt man für y' einen beson- Wert h an, so ist durch Gleichung (1), welche dann aufgelöst in der Form $x = c$ rieben werden kann, eine zur Axe Y parallele Gerade Y' (im Allgemeinen n solche Ge-, wenn die Gleichung (1) nach x vom n^{ten} Grade ist) gegeben, welche von der fraglichen F in einer bestimmten, durch den angenommenen Wert von y' gegebenen Richtung nitten werden soll. Eben so resultirt aber aus der Annahme eines bestimmten Wertes h aus Gleichung (2) die Relation

$$\varphi\,(x, y) = h,$$

die Gleichung einer Linie φ, welche von der fraglichen Curve F in der durch $y' = h$ b stimmten Richtung geschnitten werden, die letztere Curve also im Schnittpuncte p mit d ersteren eine dem entsprechenden Strale P' des Büschels (o') parallele Tangente P hab soll. Die Aufgabe erweitert sich also insoferne, als an die Stelle von zur Axe Y parallel Geraden Y' bestimmte, im Allgemeinen krumme Linien φ treten, welche aber in derselb Weise wie früher die Geraden Y' benützt werden können.

Die einzige Frage, welche sich hier aufwirft, betrifft die Lage der Scheitel q, q_1, ... d der Curve F umschriebenen Polygons. Würden nun wieder die einzelnen Werte von y' so wer differiren, dass die Curve F', welche hier nicht bekannt ist, zwischen den Puncten p', p p'_2, ... annähernd als geradlinig angesehen werden könnte, so hätten wir die Ordinaten d Puncte q, q_1, ... in der Mitte zwischen jenen der Puncte p und p_1, p_1 und p_2, ... anzunehm Setzen wir voraus, wir hätten beim Puncte p der Linie φ angefangen und die Polygonse P parallel dem entsprechenden Strale P' des Büschels (o') gezeichnet. Da die Ordinate d Punctes p_1 (auf der folgenden Linie φ_1) noch nicht bekannt ist, so bleibt nichts ande übrig, als q zwischen φ und φ_1 vorläufig anzunehmen, qp_1 zu ziehen und nun, falls nöth zu corrigiren. In vielen Fällen dürfte es genügen, die Polygonseite P bis zum Schnitte mit φ_1 zu verlängern und q in der Mitte zwischen p und π zu wählen. Im weitern Verla der Arbeit wird es wohl am zweckmässigsten sein, das bereits gezeichnete Curvenstück v läufig nach dem Augenmasse bis zur nächsten Curve φ zu verlängern und die bezügli Sehne zu halbiren.

Ist ein Punct p der Curve F gegeben, wodurch die Aufgabe zu einer bestimm wird, so hat man durch denselben eine der Curven φ zu führen und von ihm als dem rührungspuncte einer Polygonseite auszugehen. Einer bestimmten Annahme des Puncte entspricht auch ein bestimmtes particuläres Integral F; alle möglichen Curven F repräs tiren zusammen das allgemeine Integral. Will man dieses graphisch darstellen, so hat r auf irgend einer Hilfscurve φ ein System von Puncten entsprechend anzunehmen und du jeden Punct die bezügliche Curve F zu zeichnen. Sowie durch das angenommene Pu system die Curve φ graphisch bestimmt ist, in demselben Sinne erscheint auch das Sys der Curven F als der graphische Ausdruck der Gesammtheit der einzelnen particulären I grale, also des allgemeinen Integrals der vorgelegten Differentialgleichung.

Der specielle Fall der Integration eines Differentialausdruckes von einer Varia unterscheidet sich in dieser Beziehung dadurch, dass die Curve F, obwohl sie in ihrer stimmten Lage zum Coordinatensysteme nur ein particuläres Integral vorstellt, nichtde weniger zugleich als allgemeines Integral angesehen werden kann, sofern man bloss die O natenaxe des rechtwinkligen Systemes fixirt, die Abscissenaxe jedoch unbestimmt lässt.

Die graphische Integration der Differentialgleichungen von zwei Veränderlichen k wieder keine Unmöglichkeit, sondern nur Schwierigkeiten, welche die Darstellung der H linien φ betreffen; sind diese Linien leicht darstellbar, so geht die Construction der Cu F im Allgemeinen leicht und rasch vor sich. Beispielsweise entsprechen der Riccati's Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + bx^m$$

den speciellen Fall $m = 2$, in welchem sie in geschlossener Form auf dem bekannten ge nicht integrirt werden kann, als Hilfscurven φ concentrische und homothetische Kegelnittlinien, welche aus einer einzigen leicht abgeleitet werden können. Fig. 3 stellt den ciellen Fall dar, wo $a = b = 1$, also die Gleichung

$$y' = x^2 + y^2$$

integriren ist, in welchem Falle die Hilfscurven φ in ein System von concentrischen Kreisen übergehen. Der Radius der einzelnen Kreislinien erscheint durch den Ausdruck $= \sqrt{y' . 1}$ gegeben und wird somit als geometrisches Mittel zwischen der jeweiligen Länge und der vorausgesetzten Einheit f construirt. In der Figur ist diejenige particuläre ve F dargestellt worden, welche durch den Anfangspunct o des Systemes geht.

5. Integration totaler Differentialgleichungen von drei Variablen.

Ist die Gleichung

$$(1) \qquad dz = Mdx + Ndy$$

eben, wo die Coefficienten M, N Functionen von x, y sind und der Bedingung $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ prechen, so kann die graphische Integration auf Grund des Vorhergehenden unmittelbar geführt werden. Die Aufgabe besteht offenbar darin, diejenige Fläche F graphisch darellen, zu deren Gleichung

$$(2) \qquad z = F(x,y)$$

vorgelegte Differentialgleichung (1) gehört. Es sei überdies der Punct p mit den Coorten x_0, y_0, z_0 gegeben, durch welchen die fragliche Fläche F geführt werden soll.

Die Ebene $x = x_0$ schneidet die Fläche F in einer Curve A, deren Differentialhung

$$(3) \qquad \frac{dz}{dy} = \Big/^{x_0} N$$

(1) erhalten wird, wenn man darin $x = x_0$, $dx = 0$ setzt. Die graphische Integration Gleichung (3) kann nach Früherem ohne Weiteres vollzogen und die (durch p zu füh-) Curve A durch ihren Kreuzriss A_3 Fig. 4 dargestellt werden. (Der Grund- und Aufriss A_1, allen offenbar in der Zeichnungsebene zusammen, eine zu X senkrechte Gerade bildend).

Die Ebene $y = y_0$ schneidet die Fläche F in einer Curve B, deren Differentialhung

$$(4) \qquad \frac{dz}{dx} = \Big/^{y_0} M$$

1) durch Einführung der Werte $y = y_0$, $dy = 0$ resultirt. Diese Differentialgleichung gleichfalls nach dem Früheren graphisch integrirt und die entsprechende Curve B,

welche wieder durch p zu führen ist, durch ihren Aufriss B_2 dargestellt werden. (Der Gru
und Kreuzriss B_1, B_3 fallen wieder in die bezüglichen Projektionen der Schnittebene).

Nimmt man nun ein System $y = y', y'', y''', \ldots$ oder $x = x', x'', x''', \ldots$
Schnittebenen der Fläche F an, so hat man auf dieselbe Weise die den Differentialg
chungen

$$\frac{dz}{dx} = \int^{y'} M, \int^{y''} M, \int^{y'''} M, \ldots$$

oder

$$\frac{dz}{dy} = \int^{x'} N, \int^{x''} N, \int^{x'''} N, \ldots$$

entsprechenden Curven $B', B'', B''', \ldots$ oder $A', A'', A''', \ldots$ zu construiren. Im er
Falle dient die Curve A gewissermassen als Leitlinie, und man hat die fraglichen Cu
$B', B'', B''', \ldots$ beziehungsweise durch die Schnittpuncte $p', p'', p''', \ldots$ der Ebenen y
$y'', y''', \ldots$ mit A zu führen; im zweiten Falle ist B die Leitlinie, und die fraglichen Cu
$A', A'', A''', \ldots$ müssen durch die Schnittpuncte $q', q'', q''', \ldots$ der Ebenen $x = x'$,
$x''', \ldots$ mit B geführt werden. Durch jedes der beiden Systeme von Curven erscheint
fragliche Fläche F graphisch gegeben — vorausgesetzt, dass bezüglich der Werte von x'
$x''', \ldots$ oder $y', y'', y''', \ldots$ eine entsprechende Wahl getroffen wurde.

Die Grundbegriffe

der

Iterations-Rechnung

Inaugural-Dissertation

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Otto Spiess

von Basel

Basel
Buchdruckerei K. J. Wyss
1902

Separatabdruck
aus den
Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern.

Die Grundbegriffe

der

Iterationsrechnung.

Einleitung.

Die erste mathematische Operation, die der Mensch ausführte, ır die *Addition.*

Indem die Addition wiederholt auf dieselbe Grösse angewandt ırde, entstand ein neuer Begriff, die *Multiplikation.*

Die Wiederholung oder «Iteration» der Multiplikation führte eiter zur *Exponentialfunktion*, der einfachsten Transzendenten.

Von da an verliess man den Weg, durch Iteration einer bekannten nktion zu «höheren» Funktionen aufzusteigen, indem man in der mmen- und Integralrechnung eine ergiebige Quelle zur Auffindung uer Funktionen entdeckte. In der That, die einfache Operation des tegrierens auf einen algebraischen Ausdruck angewandt, hat die Entehung einer ganz neuen Funktion von merkwürdigen Eigenschaften r Folge. Indem man dieses Prinzip auf alle bekannten und die neu fundenen Funktionen anwandte, wurde die Analysis durch eine unahnte Menge neuer Funktionen bevölkert.

Nun liegt aber der Gedanke nahe, auch den alten Weg von neuem betreten, und zu versuchen, ob nicht die *Iteration* ganz allgemein Mittel zur Auffindung neuer Funktionen abgeben könne. Die tersuchung lehrt, dass diese Operation der Integration an Fruchtkeit völlig ebenbürtig ist.

Wenden wir nämlich eine beliebige Funktion n-mal auf sich bst an, so stellt der erhaltene Ausdruck in seiner Abhängigkeit n eine neue Funktion dar, die ich die *Iteralfunktion* der urünglichen Funktion heisse. Diese ist allerdings zunächst nur für zzahlige Werte von n bestimmt. Um zu für alle Werte ihres guments definierten Funktionen zu gelangen, bieten sich dann zwei ge dar.

Der erste Weg ist der historische. Man geht von der nur ganzzahliges n abgeleiteten Formel aus und sucht an Hand einer ge neten Definition ihre Bedeutung für den Fall, dass n negativ gebrochen wird. Auf diese Weise erhielt man z. B. aus der g zahligen Potenz die Exponentialfunktion.

Die andere Methode zieht es vor, das Unendlichkleine gleic Anfang einzuführen. Iteriert man nämlich einen Ausdruck von Form $\xi + \delta f(\xi)$, worin δ unendlich klein ist, n mal, und lässt n so ins Unendliche wachsen, dass $n \cdot \delta$ endlich bleibt, so konver der erhaltene Ausdruck im allgemeinen gegen eine Funktion $n \cdot \delta = x$, welche eben die Iteralfunktion ist. So führt z. B. die ration von $\xi + \delta \cdot \xi$ direkt auf

$$\lim_{n=\frac{x}{\delta}} (1+\delta)^n \cdot \xi = \xi \cdot e^x.$$

Durch diese beiden Methoden zerfällt der Iterationscalcü zwei ziemlich selbständige Zweige. Der eine hat mehr algebrais der andere mehr funktionen-theoretischen Charakter.

Es ist von Nutzen, die durch Iteration gefundenen Funkti nach ihrer Entstehung in *Stufen* verschiedener Ordnung einzut Kennen wir bereits sämtliche Funktionen der n^{ten} Stufe, so wir Umfang der nächst höheren Stufe folgendermassen festgelegt. Zur bestimmen wir zu allen Funktionen n^{ter} Stufe ihre Iteralfunkti Wenden wir dann diese (und ihre Inversen) auf sich selbst un sämtliche Funktionen der unteren Stufen in endlicher Anzahl u allen möglichen Kombinationen an, so erhalten wir eine Gesamthei Funktionen, die wir in Erweiterung des bekannten, für die Al aufgestellten Begriffs, füglich einen «*Körper*» heissen dürfen.

Dieser Körper heisst «zur $(n+1)^{ten}$ Stufe gehörig» und e offenbar sämtliche zu den unteren Stufen gehörigen Körper. Ne wir diese letzteren alle weg, so bleiben die Funktionen der (n+ Stufe übrig.

Die bisher bekannten Funktionen gehören höchstens den 4 e Stufen an.

Die erste Stufe enthält nur eine einzige Funktion von Variablen, nämlich $f(\xi) = \xi + a$, die Addition. Ich heisse sie «*Protofunktion*».

Die zweite Stufe enthält zunächst die durch Anwendun Multiplikation und Division gebildeten rationalen Funktionen, s

ren Inverse, die algebraischen Funktionen. Sie heissen hier zu- nmen *Deuterofunktionen.*

Die dritte Stufe der *Tritofunktionen* entspringt durch Iterieren r Deutero-Stufe. Dahin gehören vor allem die Abel'schen Funktionen.

Die nächst folgende *Tetra-Stufe* ist beinahe noch gar nicht unter- cht. Hieher sind wohl die aus Iteration von a^ξ entspringende nktion, ferner Funktionen wie $\int \frac{dx}{\log x}$, $\int e^{-x^2} dx$ etc. zu rechnen, ch existiert wohl noch kein Beweis, dass sie nicht doch noch am de dem Körper der Tritofunktionen angehören.

Es zeigt sich nämlich sofort eine Schwierigkeit. Gleichwie ht jedes Integral einer algebraischen Funktion notwendig trans- ident sein muss, sondern algebraisch bleiben kann, so führt auch ht die Iteration einer jeden Funktion immer zu einer höheren ife. So z. B. liefert $\frac{\xi}{1+\xi}$ die Iteralfunktion $\frac{\xi}{\xi+n}$, die in Bezug ' n wiederum linear ist.

Es ist daher bei jeder Iteration zu prüfen, ob die erhaltene neue nktion nicht etwa zur selben Stufe zurückführt. Daher ist auch · nicht vorauszusehen, ob *Pentafunktionen* existieren oder nicht, d wir stehen so vor der interessanten Möglichkeit, dass die Mannig- igkeit analytischer Verhältnisse einer ähnlichen Beschränkung unter- gt, wie sie bei räumlichen Beziehungen durch den Mangel einer rten Dimension eintritt.

Man sieht nun bald, dass die Funktionen, die wir durch Iteration halten können, im wesentlichen zusammenfallen mit denen, die das egralprinzip liefert. Man findet weiter, dass der Grund dazu in einer rkwürdigen Analogie liegt, die zwischen der Summen- und Integral- hnung einerseits und dem Iterationscalcül anderseits herrscht, eine alogie, die man füglich als *Dualismus* bezeichnen darf.

Schon äusserlich entspricht der Summenrechnung eine end- ie Iterationsrechnung, dem Integrationscalcül eine infinitesimale eralrechnung». Wie das Integrieren durch das Differenzieren auf- ioben wird, so steht dem Iterieren eine inverse Operation gegen- r, die ich *Revertieren* heisse. Deutlicher wird der Dualismus im if dieser Arbeit hervortreten. Am klarsten tritt er bei der infini- imalen Iteration (die hier nicht mehr behandelt werden konnte) zu

Tage. Dort lässt sich nämlich beweisen, dass die Funktion v
$n \cdot \delta = x$, die man durch Iterieren von

$$\xi + \delta \cdot f(\xi)$$

in der oben geschilderten Weise erhält, genau die Inverse ist, v
der Funktion, die durch Integrieren von

$$\frac{\delta x}{f(x)}$$

entste

So führt z. B. die Funktion $f(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$ beim ersten V
fahren auf den Sinus, beim zweiten auf den Arcussinus. Beide Re
nungsarten unterstützen und ergänzen sich also.

Die Iteration behandelt also die Fragen der Summen- und In
gralrechnung von einer andern Seite. Indem die bekannten Proble
vom Standpunkt der Iteration aus neu zu beleuchten sind, eröffnet s
ein weites Arbeitsfeld. Es schien mir nun angemessen, vor der
handlung der höheren Teile der Theorie die einfachen Begriffe
formalen Operationen der gewöhnlichen Iterationsrechnung in elem
tarer Weise darzulegen und an leichten Beispielen zu erläutern. D
ist in vorliegender Arbeit geschehen. Da es sich hier vorläufig
um die formalen Beziehungen handelt, so ist auf Schwierigkeiten,
sie bei der wirklichen Ausführung durch Mehrdeutigkeit, Unstetig
etc. eintreten können, keine Rücksicht genommen. Dabei verbot
notwendige Rahmen der Arbeit auf einzelne Probleme näher ei
gehen. Aus demselben Grunde musste auch die infinitesimale Iterat
die einer strengeren Behandlung bedarf, weggelassen werden.

Bevor ich beginne, will ich einige Bezeichnungen, die ich
ständig brauchen werde, schon hier auseinandersetzen.

Sind $\varphi(\xi)$, $f(\xi)$ Funktionen, so bezeichne ich ihre Inversen du
einen über das Funktionszeichen gesetzten Strich, also mit $\overline{\varphi}(\xi)$, $\overline{f}$
Es ist also immer $f\overline{f}(\xi) = \overline{f}f(\xi) = \xi$. Ebenso, wenn n simult
unabhängige Funktionen der n Variablen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ vorgelegt s

$$y_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) \qquad (k = 1, 2, \cdots n),$$

so bezeichne ich die n Funktionen, die durch Auflösung dieses Syst
nach den ξ entstehen, mit $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \cdots \overline{f}_n$, so dass also

$$f_1(\overline{f}_1(y_1 \cdots y_n), \overline{f}_2, \cdots \overline{f}_n) = y_1, \cdots f_k(\overline{f}_1, \cdots \overline{f}_n) = y_k$$

Ein solches System von n unabhängigen Funktionen vo
Variablen nenne ich kurz ein «*n-System*», und verwende für dass
statt der Schreibweise (A) oft auch die folgende:

$$(y_1, \cdots y_n) = (f_1 \cdots f_n)(\xi_1 \cdots \xi_n), \tag{B}$$

) der letzte eingeklammerte Ausdruck $(\xi_1 \cdots \xi_n)$ meist weggelassen rd. Soll in dieses System ein zweites

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

bstituiert werden, so deute ich dies durch einen dazwischen gestellten rich | an, also in diesem Fall durch

$$(f_1 \cdots f_n)(\xi_1 \cdots \xi_n) \mid (\varphi_1 \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

er kürzer $$(f_1 \cdots f_n) \mid (\varphi_1 \cdots \varphi_n).$$

Die Substitution ist so auszuführen, dass an Stelle von ξ_k im sten System $\varphi_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$ gesetzt wird. Das Resultat der Substitution rd geschrieben:

$$(f_1 \cdots f_n)(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n).$$

Diese Schreibweise ermöglicht, mehrfache Substitutionen von nktionensystemen durch blosses Aneinanderreihen von Klammern szudrücken. Die Grössen, in welche substituiert wird, bezeichne ich rchweg durch die Buchstaben ξ, η, ζ, so dass, wenn die f noch dere Variable enthalten, nie ein Zweifel über den Ort, wo substituiert rden soll, eintritt.

§ 1.

Es sei $f(\xi)$ eine Funktion von ξ. Indem wir $f(\xi)$ an Stelle von setzen und dies n mal wiederholen, d. h. $f(\xi)$ iterieren, so erhalten r einen Ausdruck, der den *Substituenten* ξ und die *Iterations-riable n* enthält. Ich bezeichne ihn mit

$$J^n f(\xi).$$

Dieser Ausdruck, als Funktion von ξ betrachtet, heisst «*iterierte inktion n^ter^ Ordnung*», als Funktion von n betrachtet aber «*Iteral-nktion*» oder kurz «*die Iterale*» von $f(\xi)$.

Beide Begriffe verhalten sich zueinander wie Potenz und ponentialfunktion, in welche sie übergehen, wenn $f(\xi) = a \cdot \xi$ ist.

Sind allgemein ν unabhängige Funktionen $f_1, f_2, \cdots f_\nu$ der Va-blen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu$ gegeben, oder kurz ein «ν-System», und setzen r hierin wiederholt $f_k(\xi_1 \cdots \xi_\nu)$ für ξ_k ein, so erhalten wir ν Iteral-ıktionen, die ich mit

$$J_1^n(f_1 \cdots f_\nu), \quad J_2^n(f_1 \cdots f_\nu), \cdots \quad J_\nu^n(f_1 \cdots f_\nu)$$

zeichne. Die Funktionen f selbst heissen in Bezug auf ihre Iterale *tammfunktionen*».

Für das Iterationszeichen J gelten die Regeln

$$J_k^a(f_1 \cdots f_n) \mid J_k^b(f_1 \cdots f_n) = J_k^{a+b}(f_1 \cdots f_n) \qquad 1$$

$$J_k^a \mid \left(J_k^b \mid J_k^c\right) = \left(J_k^a \mid J_k^b\right) \mid J_k^c. \qquad 2$$

Es gilt also für das Iterieren wie für das Addieren das *commutati*
und das *associative* Gesetz.

Zunächst ist das Symbol J^n nur für ganzzahlige Werte von
definiert. Wir können aber die Bedeutung sofort auf beliebiges
erweitern, wenn wir $J^n f(\xi)$ als diejenige Funktion von n und ξ def
nieren, für welche die Beziehungen 1. und 2. gelten und welche fü
ganzzahlige n die n^{te} Iterierte von $f(\xi)$ ist.

Nach dieser Feststellung, die für Funktionensysteme ganz en
sprechend ist, ergiebt sich leicht die Bedeutung von J^n für negati
und gebrochene n. Es ist nämlich

$$J^0 f(\xi) = \xi, \quad J_k^0(f_1 \cdots f_\nu) = \xi_k, \quad J_k^{-1}(f_1 \cdots f_\nu) = \overline{f}_k, \cdots J^{-n} f(\xi) = J^n \overline{f}(\xi$$

Weiter bedeutet $J^{\frac{1}{n}} f(\xi)$ diejenige Funktion, deren n^{te} Iterierte die ge
gebene Funktion $f(\xi)$ ist. Speziell für $f(\xi) = \xi$ ist $J^{\frac{1}{n}}(\xi)$ ein
cyclische Funktion. So ist

$$J^{\frac{1}{3}} \frac{\xi}{1+\xi} = \frac{3\xi}{\xi+3}, \qquad J^{-\frac{1}{2}}(\xi^2) = \xi^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Für die Iterale von $f(\xi)$ gilt offenbar die Relation

$$J^{n+1} f(\xi) = f[J^n f(\xi)]$$

oder, wenn wir von nun an statt n x als Iterationsvariable wähle
und dieselbe nach Obigem als beliebig reelle Grösse ansehen, — fa
wir noch $J^x f(\xi) = \varphi(x)$ setzen

$$\varphi(x+1) = f\varphi(x). \qquad 3$$

Ebenso genügt $J_k^x(f_1 \cdots f_\nu) = \varphi_k(x)$ der Relation

$$\varphi_k(x) = f_k[\varphi_1(x-1), \varphi_2(x-1), \cdots \varphi_\nu(x-1)], \quad (k = 1 \cdots n). \qquad 4$$

Umgekehrt, sind $(\varphi_1 \cdots \varphi_\nu)$ Lösungen der Gleichung (4), so sin
sie zugleich die Iteralfunktionen der $(f_1 \cdots f_\nu)$. Setzen wir nämlic
auf den rechten Seiten von (4) für $\varphi_k(x-1)$ den Wert ein, der au
(4) folgt, wenn x—1 für x gesetzt wird, und fahren so fort, so folg
wirklich

$$\varphi_k(x) = J_k^x(f_1 \cdots f_\nu)(\xi_1 \cdots \xi_\nu) \qquad (k = 1, 2 \cdots \nu).$$

enn die willkürlichen Grössen $\varphi_1(o)$, $\varphi_2(o)$, $\cdots \varphi_\nu(o)$ resp. gleich $,\cdots \xi_\nu$ gesetzt werden. Diese letzteren kann man als Konstanten ler allgemeiner als Funktionen von x mit der Periode 1 ansehen. ı aber die letztere Annahme in den wenigsten Fällen auf die weitere echnung einen Einfluss übt, so können wir hier davon abstrahieren ıd sagen:

Satz I. Die Iteralfunktionen eines ν-Systems $(f_1 \cdots f_\nu)$ sind durch dasselbe völlig bestimmt bis auf die Anfangswerte $\varphi_1(o), \cdots \varphi_\nu(o)$. Letztere können beliebigen Konstanten gleichgesetzt werden.

Das System (4) kann übrigens auch als Differenzengleichung fgefasst werden, woraus sich ergiebt, dass die Lösung von (4) sohl als Problem der Summen- wie der Iterationsrechnung aufgefasst erden kann. Nun kann man aber jede beliebige Differenzengleichung f ein simultanes System von Gleichungen erster Ordnung zurückhren. *Es kann daher jedes Problem der Summenrechnung auch als roblem der Iterationsrechnung aufgefasst werden.*

Eine Gleichung $G[\varphi(x+k), \varphi(x+k-1), \cdots \varphi(x)] = 0$ (5)
rd man allerdings hauptsächlich in der Differenzenrechnung behandeln. n kann ihr aber, dem in der Einleitung erwähnten Dualismus gemäss, ıe andere Gestalt geben, in der sie speziell zu einer Aufgabe der rationsrechnung wird.

Wir setzen nämlich in (5) $x = \overline{\varphi}(\xi)$, wo $\overline{\varphi}$ die Inverse von φ . Dann wird also $\varphi\overline{\varphi}(\xi) = \xi$. Setzen wir ferner

$$\varphi(1+\overline{\varphi}\xi) = f(\xi), \tag{6}$$

folgt sofort:

$$\begin{aligned} ff(\xi) &= \varphi(1+\overline{\varphi}\varphi(1+\overline{\varphi}\xi)) = \varphi(2+\overline{\varphi}\xi). \\ fff(\xi) &= \qquad\qquad\qquad\qquad \varphi(3+\overline{\varphi}\xi). \end{aligned}$$

Schreiben wir noch zur Bequemlichkeit $J^k f(\xi) = f^{(k)}(\xi)$, so wird sere Gleichung (5) transformiert in

$$G[f^{(k)}(\xi), f^{(k-1)}(\xi), \cdots f(\xi), \xi]. \tag{7}$$

Diese Gleichung stellt die *Aufgabe, aus einer Relation zwischen verschiedenen Iterierten einer Funktion diese Funktion selbst zu len.* Aus der Gleichung (6), die man auch schreiben kann

$$\varphi(x+1) = f\varphi(x),$$

ıt man, dass $\varphi(x)$ einfach die Iteralfunktion von $f(\xi)$ ist.

Analog können wir auch simultane Differenzengleichungen, z. B

$$\begin{aligned} G[\varphi(x+k_1),\ \psi(x+h_1), \cdots \varphi(x), \psi(x)] = 0 \\ H[\varphi(x+k_2),\ \psi(x+h_2), \cdots \varphi(x), \psi(x)] = 0 \end{aligned} \quad (7a$$

umformen. Wir setzen nämlich $\varphi(x) = \xi$, $\psi(x) = \eta$ und bestimme zwei Funktionen $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$ so, dass

$$\varphi(x+1) = f[\varphi(x), \psi(x)], \qquad \psi(x+1) = g[\varphi(x), \psi(x)],$$

was, wie wir sehen werden (Satz VII), auf unendlich viele Arten mög lich ist. Dann ergiebt sich offenbar wieder, dass φ, ψ die Iterale von f und g sind, d. h. es wird

$$\varphi(x+k) = J_1^k(f, g)(\xi, \eta) = f^{(k)}(\xi, \eta)$$

$$\psi(x+h) = J_2^h(f, g)(\xi, \eta) = g^{(h)}(\xi, \eta),$$

wodurch die Gleichungen 7a eine (7) analoge Gestalt annehmen.

Ist endlich eine partielle Differenzengleichung vorgelegt

$$G[\varphi(x+k, y+h), \cdots \varphi(x, y)] = 0, \quad (\,$$

so wählen wir eine beliebige Funktion $\psi(x, y)$, die etwa ein Gleichung genügt

$$H[\psi(x+k_0, y+h_0), \cdots \psi(x, y)] = 0, \quad (\,$$

setzen alsdann $\varphi(x, y) = \xi$, $\psi(x, y) = \eta$, also $x = \overline{\varphi}(\xi, \eta)$, $y = \overline{\psi}(\xi,$ und bestimmen zwei Funktionen f, g, so dass

$$\varphi(1+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = f(\xi, \eta) \qquad \varphi(\overline{\varphi}, 1+\overline{\psi}) = f_0(\xi, \eta)$$

$$\psi(1+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = g(\xi, \eta) \qquad \psi(\overline{\varphi}, 1+\overline{\psi}) = g_0(\xi, \eta).$$

Dann ergiebt sich ohne weiteres

$$\varphi(2+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = f(f, g); \qquad f_0(f_0, g_0) = \varphi(\overline{\varphi}, 2+\overline{\psi})$$

$$\psi(2+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = g(f, g); \qquad g_0(f_0, g_0) = \psi(\overline{\varphi}, 2+\overline{\psi}).$$

Allgemein erhält man für die Iterierten von (f, g), (f_0, g_0)

$$\varphi(k+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = J_1^k(f, g)(\xi, \eta) = f^{(k)}; \ \varphi(\overline{\varphi}, h+\overline{\psi}) = J_1^h(f_0\, g_0)(\xi\, \eta) = $$

$$\psi(k_0+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = J_2^{k_0}(f, g)(\xi, \eta) = g^{(k_0)}; \ \psi(\overline{\varphi}, h_0+\overline{\psi}) = J_2^{h_0}(f_0\, g_0)(\xi\, \eta) = g_0^{(}$$

worin natürlich k, h, k_0, h_0 ganze Zahlen bedeuten. Es wird dann z.

$$\varphi(k+x, h+y) = \varphi(k+\overline{\varphi}, h+\overline{\psi}) = f^{(k)}[f_0^{(h)}(\xi, \eta), g_0^{(h)}(\xi, \eta)] \text{ etc.}$$

Setzen wir diese Werte in (8), (9) ein, so verwandeln sich di Differenzengleichungen in Relationen zwischen den Iterierten von (f, $(f_0\, g_0)$, und umgekehrt kann jede solche Relation durch Einführu der Funktionen φ, ψ in eine Differenzengleichung verwandelt werd

Alle solche Relationen zwischen Iterierten verschiedener Ordnu fasse ich unter dem Namen *Iteralgleichungen* zusammen. Das Proble

das eine Iteralgleichung stellt, ist von hohem Interesse. Da die Lösungen eine oder mehrere willkürliche Konstanten involvieren, so sind die Funktionen f oft ganz verschiedener Natur, besitzen aber trotzdem ein und dieselbe Iteralfunktion $\varphi(x)$. Sind algebraische Lösungen vorhanden, so gehören diese meistens zu einer merkwürdigen Klasse von algebraischen Funktionen, für die ich den Namen «körpertreue Funktionen» gebrauche. Ich begnüge mich, ein einfaches Beispiel zu rechnen.

Beispiel. Die Funktion $f(\xi)$ soll aus der Gleichung

$$ff(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi)^2 - \xi^2 \cdot f(\xi) + \frac{1}{2} \xi^4 \tag{10}$$

bestimmt werden.

Statt (10) können wir auch schreiben

$$2ff - f^2 = \xi^2 (2f - \xi^2),$$

woraus

$$\sqrt{2ff - f^2} = \xi\sqrt{2f - \xi^2}.$$

Hiernach erkennt man sofort die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{f + \sqrt{2ff - f^2}}{2} &= \left[\frac{(\xi + \sqrt{2f - \xi^2})}{2}\right]^2 \\ \frac{f - \sqrt{2ff - f^2}}{2} &= \left[\frac{(\xi - \sqrt{2f - \xi^2})}{2}\right]^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$\frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2f - \xi^2})}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2f - \xi^2})}{2}\right)}$$

sich nicht ändert, wenn $f(\xi)$ an die Stelle von ξ gesetzt wird. Definiert man daher $f(\xi)$ durch die Gleichung

$$\frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)} = \text{Const.} = C, \tag{12}$$

so ist diese Bedingung offenbar erfüllt, d. h. es gilt dann

$$\frac{\log\left(\frac{f + \sqrt{2ff - f^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{f - \sqrt{2ff - f^2}}{2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)}. \tag{13}$$

Wir haben dann in f eine Lösung unserer Iteralgleichung (10), sobald wir noch zeigen können, dass aus (12) rückwärts wieder (10) sich als notwendige Folge ergiebt.

Die Gleichung (12) für f wird einfacher, wenn wir die Exponenten nehmen und setzen

$$\frac{\xi - \sqrt{2f - \xi^2}}{2} = y, \text{ also } f(\xi) = (\xi - y)^2 + y^2. \tag{14}$$

Es ergiebt sich dann y aus der Gleichung

$$y^C = \xi - y. \tag{15}$$

Nehmen wir $\frac{1}{C}$ statt C, so folgt $(\xi - y)^C = y$, d. h. es vertauscht sich einfach y mit $(\xi - y)$. Da aber $f(\xi)$ nach (14) in beiden symmetrisch ist, so sieht man, dass zu reciproken Werten von C dasselbe $f(\xi)$ gehört.

Für rationale Werte von C wird $f(\xi)$ algebraisch. Z. B. wird für

$$\begin{array}{lll}
C = \infty, & y = 1 & f(\xi) = 1 + (\xi - 1)^2 \\
 & y = 0 & f(\xi) = \xi^2 \\
C = 1 & y = \dfrac{\xi}{2} & f(\xi) = \dfrac{\xi^2}{2} \\
C = -1 & y = \dfrac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4}}{2} & f(\xi) = \xi^2 - 2 \\
C = 2 & y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\xi}}{2} & f(\xi) = \xi^2 + 3\xi + 1 \mp (\xi + 1)\sqrt{1 + 4\xi}
\end{array} \tag{15a}$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Funktionen die Gleichung (10) befriedigen.

Es bleibt nun noch der Nachweis zu leisten, dass die Gleichung (12) oder die beiden Gleichungen (13), (15) zusammen wieder auf die Relationen (11) und somit (10) zurückführen. Aus (13) zieht man zunächst die beiden Gleichungen

$$\frac{f + \sqrt{2ff - f^2}}{2} = \left(\frac{\xi + \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)^{\gamma(\xi)};$$

$$\frac{f - \sqrt{2ff - f^2}}{2} = \left(\frac{\xi - \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)^{\gamma(\xi)}$$

wo $\gamma(\xi)$ konstant oder von ξ abhängig sein kann. Es ist also zu zeigen, dass $\gamma = 2$ ist. Addieren wir beide Gleichungen, führen ein und für f seinen Wert aus (14), so erhalten wir:

$$(\xi-y)^2+y^2=(\xi-y)^\gamma+y^\gamma. \tag{16}$$

Diese Gleichung muss für y dieselben Werte liefern wie (15). Eliminieren wir $(\xi-y)$ mit Hilfe von (15), so resultiert:

$$y^2+y^{2^C}=y^{\gamma(\xi)}+y^{\gamma(\xi)\cdot C}. \tag{16a}$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $y=0$, $y=1$, d. h. für $f=\xi^2$ und $f=1+(\xi-1)^2$, welches beides Lösungen von (10) sind. Schliessen wir diese Werte von y aus und setzen $y^2+y^{2^C}=\psi(y)$, so folgt

$$\psi(y)=\psi\left(y^{\frac{\gamma(\xi)}{2}}\right)=\psi\left(y^{\left[\frac{\gamma(\xi)}{2}\right]^2}\right)=\dots\psi\left(y^{\left[\frac{\gamma(\xi)}{2}\right]^{\pm\infty}}\right).$$

Diese Gleichung kann dann nur bestehen, wenn $\gamma(\xi)=2$ ist.

Bestimmen wir endlich noch die gemeinsame Iteralfunktion $\varphi(x)$ aller der $f(\xi)$. Sie ist die vollständige Lösung der, (10) entsprechenden, Differenzengleichung

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\varphi(x-1)^2-\varphi(x-2)\cdot\varphi(x-1)+\frac{1}{2}\varphi(x-2)^2.$$

Man findet ohne Mühe

$$\varphi(x)=\alpha^{2^x}+\beta^{2^x}, \tag{17}$$

worin α, β willkürliche Konstanten bedeuten. Indem wir diese aus $\varphi(x)$, $\varphi(x+1)$, $\varphi(x+2)$ eliminieren, sodann $x=0$, $\varphi(0)=\xi$, $\varphi(1)=f(\xi)$, $\varphi(2)=ff(\xi)$ setzen, erhalten wir wieder die Gleichungen (11). Zugleich ergiebt sich

$$\frac{\log\alpha}{\log\beta}=C.$$

Alle die aus (14) und (15) folgenden Funktionen $f(\xi)$ führen also durch Iteration auf dieselbe Funktion (17), wobei nur die Werte der Konstanten α, β wechseln.

Wir kehren nun zu unserer allgemeinen Theorie zurück.

§ 2.

Die Theorie der Iteration stützt sich wesentlich auf das folgende *Fundamentaltheorem.*

Ist $F(\xi)=\varphi f\overline{\varphi}(\xi)$, so folgt $J^x F(\xi)=\varphi(J^x f)\,\overline{\varphi}(\xi)$,

d. h. wenn die Iterale von f bekannt ist, so ist es auch die von F. Auf Funktionen mehrerer Variablen angewandt, lautet das Princip:

Satz II.

Ist $(F_1, F_2 \ldots F_n) = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)(f_1 \ldots f_n)(\overline{\varphi}_1 \ldots \overline{\varphi}_n)$ *und bezeichnen wir das Iteralsystem von* $(f_1 \ldots f_n)$ $(\xi_1 \ldots \xi_n)$ *kurz mit* $(f_1 \ldots f_n)^x$, *so gilt*

$$(F_1 \ldots F_n)^x = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)(f_1 \ldots f_n)^x (\overline{\varphi}_1 \ldots \overline{\varphi}_n).$$

Die Iteration von $(F_1 \ldots F_n)$ ist dadurch auf die von $(f_1 \ldots f_n)$ zurückgeführt. Der Beweis des Satzes ergiebt sich durch den blossen Anblick.

In dem einfachsten Fall, in dem $f_1 = \xi_1 + 1$, $f_2 = \xi_2, \ldots f_n = \xi_n$ ist, lautet der Satz II speziell:

«Ist $F_k = \varphi_k \{ 1 + \overline{\varphi}_1(\xi_1 \cdots \xi_n), \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n \}$ $(k = 1, \cdots n)$, so ist das Iteralsystem der F_k

$$J_k^x (F_1 \cdots F_n) = \varphi_k \{ x + \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n \} \qquad (k = 1, \cdots n)».$$

Im Fall einer einzigen Funktion F heisst dies:

«aus $F(\xi) = \varphi(1 + \overline{\varphi}(\xi))$ folgt $J^x F(\xi) = \varphi[x + \overline{\varphi}(\xi)]$».

Der Satz II nimmt im Fall der infinitesimalen Iteration eine besonders einfache Gestalt an und hat alsdann ein duales Gegenstück zu einem bekannten Satz der Integralrechnung, der im Fall einer einzigen Variablen so lautet:

«Ist das Integral von $f(\xi) \cdot d\xi$ bekannt, so ist es auch das von

$$f\varphi(\xi) \cdot d\varphi(\xi) = F(\xi) \cdot d\xi.»$$

In der That spielt dieser Satz in der Integralrechnung die gleiche Rolle wie der obige Satz II im Iterationscalcül.

Die Spezialisierung (A) führt uns nun zu einem neuen wichtigen Begriff.

Ist nämlich ein n-System gegeben $(\varphi_1, \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n)$, so bilden wir die folgenden n^2 Funktionen.

$$\varphi_1 \{ 1 + \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n \} = f_1^{(1)},\ \varphi_1 \{ \overline{\varphi}_1, 1 + \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n \} = f_1^{(2)}, \cdots \varphi_1 \{ \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots 1 + \overline{\varphi}_n \} = f_1^{(n)}$$

$$\varphi_2 \{ 1 + \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n \} = f_2^{(1)},\ \varphi_2 \{ \overline{\varphi}_1, 1 + \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n \} = f_2^{(2)}, \cdots \varphi_2 \{ \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots 1 + \overline{\varphi}_n \} = f_2^{(n)} \qquad (2$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\varphi_n \{ 1 + \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n \} = f_n^{(1)},\ \varphi_n \{ \overline{\varphi}_1, 1 + \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n \} = f_n^{(2)} \cdots \varphi_n \{ \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots 1 + \overline{\varphi}_n \} = f_n^{(n)}.$$

Alsdann liefert die Iteration der Systeme $(f_1^{(1)} \dots f_n^{(1)}), (f_1^{(2)} \dots f_n^{(2)}) \dots$ die n^2 neuen Funktionen

$$\varphi_k\left\{x+\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots \overline{\varphi}_n\right\}, \; \varphi_k\left\{\overline{\varphi}_1, x+\overline{\varphi}_2, \dots \overline{\varphi}_n\right\},$$

$$\dots \varphi_k\left\{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots x+\overline{\varphi}_n\right\} \qquad (k=1 \dots n), \tag{22}$$

von denen je n mit dem Index k Spezialwerte der einen Funktion von n Variablen

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad \text{sind.} \tag{23}$$

Die Gleichungen (21) lehren also eine Operation, durch welche man von den gegebenen $(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n)$ zu neuen Funktionen f gelangt, durch deren Iteration Spezialwerte der φ wieder erzeugt werden.

Im Fall einer einzigen Funktion $\varphi(x)$ giebt es nur eine solche Funktion

$$f(\xi) = \varphi(1+\overline{\varphi}\,\xi), \tag{24}$$

deren Iterale offenbar $\varphi(x+\overline{\varphi}\,\xi)$, also wieder $\varphi(x)$ selbst ist.

Diese Operation ist also der Iteration gerade entgegengesetzt und verhält sich zu ihr, wie das Differenzenbilden zum Summieren. Ich nenne sie daher *Reversion* und das Resultat der Reversionen nach den verschiedenen Variablen, die Funktionen f, *partielle Reverse.*

Es ist von Vorteil, hier einige Bezeichnungen einzuführen.

Ich nenne die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ eines n-Systems *homolog,* und dem entsprechend die partiellen Reverse nach derselben Variablen, also z. B.

$$f_1^{(1)} = \varphi_1(1+\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots), \; f_2^{(1)} = \varphi_2(1+\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots) \dots$$

$$f_n^{(1)} = \varphi_n(1+\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots)$$

homologe Reverse

und ihre Iteralfunktionen

$$\varphi_1(x+\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2 \dots) \dots \qquad \varphi_n(x+\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2 \dots)$$

homologe Iteralfunktionen.

Dagegen sollen die Reverse ein und derselben Funktion nach den verschiedenen Variablen, als z. B.

$$f_k^{(1)} = \varphi_k(1+\overline{\varphi}_1, \varphi_2 \dots), \quad f_k^{(2)} = \varphi_k(\overline{\varphi}_1, 1+\overline{\varphi}_2, \dots), \dots$$

$$f_k^{(n)} = \varphi_k(\overline{\varphi}_1, \dots 1+\overline{\varphi}_n)$$

associerte Reverse heissen.

Alle die n^2 Iteralfunktionen in (22) heissen übrigens noch *partiell*, da sie sämtlich Spezialwerte der n Funktionen $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ $(x_1 \ldots x_n)$ in (23) sind. Diese letztern bilden das *totale Iteralsystem* zu dem *totalen Reverssystem* (21).

Ausser den in (21) definierten Funktionen f werden wir aber auch die folgenden Ausdrücke

$$\varphi_k(1+\overline{\varphi}_1, 1+\overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3 \ldots), \quad \varphi_k(1+\overline{\varphi}_1, 1+\overline{\varphi}_2, 1+\overline{\varphi}_3, \ldots \overline{\varphi}_n \text{ etc.}$$

als partielle Reverse bezeichnen, dieselben aber von den bisher besprochenen einfachen Reversen durch das Beiwort «*gemischt*» unterscheiden. Demgemäss werden auch die Funktionen

$$\varphi_k(x_1+\overline{\varphi}_1, x_2+\overline{\varphi}_2, \ldots), \quad \varphi_k(x_1+\overline{\varphi}_1, x_2+\overline{\varphi}_2, x_3+\overline{\varphi}_3, \ldots) \text{ etc.}$$

gemischte Iteralfunktionen heissen.

Endlich werden wir gelegentlich auch Ausdrücke wie $\varphi(\overline{\varphi}+a)$, $\varphi_k(\overline{\varphi}_1+a, \overline{\varphi}_2+b, \ldots)$, worin a, b Konstanten sind, als Reverse von φ in etwas allgemeinerem Sinn bezeichnen, da sie von den oben definierten nicht wesentlich verschieden sind.

Nach diesen notwendigen Feststellungen wollen wir nun die Eigenschaften unseres neuen Begriffs näher untersuchen.

§ 3.

Substituieren wir von 2 associerten Revers-Systemen

$$(f_1 \ldots f_n) = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)(a+\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots \overline{\varphi}_n);$$

$$(g_1 \ldots g_n) = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)(\overline{\varphi}_1, b+\overline{\varphi}_2, \ldots \overline{\varphi}_n)$$

das erste in das zweite, oder das zweite in das erste, so ist das Resultat beidemal dasselbe, nämlich

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(a+\overline{\varphi}_1, b+\overline{\varphi}_2, \ldots \overline{\varphi}_n).$$

Zwei Funktionen oder Funktionensysteme, die bei der Substitution ineinander das commutative Gesetz befolgen, heisse ich *commutativ*. Da nun also

$$f_k(g_1, \ldots g_n) = g_k(f_1 \ldots f_n) \qquad (k = 1, \ldots n), \qquad (2\ldots$$

so haben wir den

Satz III. Associerte partielle Revers-Systeme sind commutativ.

Dieser Satz entspricht dualistisch der bekannten Relation

$$\Delta_\xi \Delta_\eta F(\xi, \eta) = \Delta_\eta \Delta_\xi F(\xi, \eta).$$

Es gilt nun aber auch der umgekehrte Satz, nämlich

Satz IV. *Sind zwei n-Systeme $(f_1 \dots f_n)$, $(g_1 \dots g_n)$ kommutativ, so sind sie associerte, partielle Reverse eines und desselben Funktionensystems $(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n)$.*

Beweis. Sind die beiden Systeme commutativ, so gilt

$$(f_1 \dots f_n)(g_1 \dots g_n) = (g_1 \dots g_n)(f_1 \dots f_n).$$

Substituieren wir beide Seiten in $(f_1 \dots f_n)$ und bezeichnen allgemein ein n-fach iteriertes System mit $(f_1 \dots f_n)^n$, so folgt successive

$$(f_1 \dots f_n)^2 (g_1 \dots g_n) = (f_1 \dots f_n)(g_1 \dots g_n)(f_1 \dots f_n) = (g_1 \dots g_n)(f_1 \dots f_n)^2$$
$$(f_1 \dots f_n)^3 (g_1 \dots g_n) = (g_1 \dots g_n)(f_1 \dots f_n)^3.$$

Allgemein haben wir für zwei ganze Zahlen x_1, x_2

$$(f_1 \dots f_n)^{x_1} (g_1 \dots g_n)^{x_2} = (g_1 \dots g_n)^{x_2} (f_1 \dots f_n)^{x_1}. \tag{26}$$

Bezeichnen wir diese n Funktionen von x_1, x_2 und den ξ mit

$$\Phi_1(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n), \quad \Phi_2(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n), \dots \Phi_n(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n),$$

so gelten offenbar die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\Phi_1 \dots \Phi_n)(x_1+1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n) &= (f_1 \dots f_n)(\Phi_1 \dots \Phi_n)(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n) \\ (\Phi_1 \dots \Phi_n)(x_1, x_2+1; \xi_1 \dots \xi_n) &= (g_1 \dots g_n)(\Phi_1 \dots \Phi_n)(x_1, x_2; \xi_1 \dots \xi_n).\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Setzen wir nun für $\xi_1 \dots \xi_n$ willkürliche Funktionen von $n-2$ neuen Grössen $x_3, x_4, \dots x_n$, so gehen die Funktionen Φ über in Funktionen $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ der n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ und die beiden obigen Gleichungen werden zu den folgenden:

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1+1, x_2, \dots x_n) = (f_1 \dots f_n)(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n)$$
$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1, x_2+1, \dots x_n) = (g_1 \dots g_n)(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n).$$

Bei der Wahl der genannten willkürlichen Funktionen hat man nur darauf zu achten, dass die $\varphi_1 \dots \varphi_n$ von einander unabhängig werden, d. h., dass ihre Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Dann kann man nämlich das System $(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n)$ umkehren und setzen:

$$x_1 = \bar{\varphi}_1(\xi_1 \dots \xi_n), \quad x_2 = \bar{\varphi}_2(\xi_1 \dots \xi_n), \dots \quad x_n = \bar{\varphi}_n(\xi_1 \dots \xi_n),$$

wodurch wir die Funktionen f und g in der That als partielle Reverse der φ dargestellt erhalten. Zugleich sieht man, dass infolge der Willkürlichkeit der in (27) eingeführten Funktionen von $x_3 \dots x_n$ unendlich viele solcher Funktionen φ existieren, sobald $n > 2$.

Satz V. Sind n n-Systeme $(f_1^{(1)} \dots f_n^{(1)}), (f_1^{(2)} \dots f_n^{(2)}), \dots (f_1^{(n)} \dots f_n^{(n)})$ *gegeben, von denen je zwei zueinander kommutativ sind, so bilden die* n^2 *Funktionen f ein totales Revers-System, d. h. es lässt sich dann ein bis auf n willkürliche Konstanten völlig bestimmtes System* $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ $(x_1 \dots x_n)$ *finden, für welches die Gleichungen (21) gelten.*

Beweis. Wir bestimmen zunächst die n partiellen Iteralsysteme

$$(f'_1 \dots f'_n)^{x_1}, \quad (f_1^{(2)} \dots f_n^{(2)})^{x_2}, \dots\dots \quad (f_1^{(n)} \dots f_n^{(n)})^{x_n}.$$

Bilden wir von diesen n Systemen das Substitutionsprodukt, so ist dieses nach der Annahme wenigstens für ganzzahlige $x_1 \dots x_n$ von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig und stellt also ein ganz bestimmtes System von n Funktionen der n Variablen $x_1 \dots x_n$ vor, das wir schreiben

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n) = (f'_1 \dots f'_n)^{x_1} (f_1^{(2)} \dots f_n^{(2)})^{x_2} \dots (f_1^{(n)} \dots f_n^{(n)})^{x_n}. \quad (28)$$

Diese Funktionen enthalten noch die Substituenten $\xi_1 \dots \xi_n$, welche als willkürliche Konstanten betrachtet werden können. Da allgemein $(f_1 \dots f_n)^0 = (\xi_1 \dots \xi_n)$ ist, so sieht man sofort, dass

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)(0, 0, \dots 0) = (\xi_1 \dots \xi_n) \text{ wird, d. h.}$$

$$\xi_1 = \varphi_1(0 \dots 0), \quad \xi_2 = \varphi_2(0, \dots 0), \dots \quad \xi_n = \varphi_n(0, \dots 0). \quad (29)$$

Es bleiben also die Anfangswerte der Funktionen φ beliebig.

Aus der Formel (28) zieht man noch die beiden folgenden

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1\, 0 \dots 0) = (f'_1 \dots f'_n)^{x_1}; \quad \dots (\varphi_1 \dots \varphi_n)(0 \dots 0\, x_n) = (f_1^{(n)} \dots f_n^{(n)})^{x_n} \quad (30)$$

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 x_2 \dots x_n) = (\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots 0_n) \mid (\varphi_1 \dots \varphi_n)(0\, x_2 \dots 0) \dots \mid (\varphi_1 \dots \varphi_n)(0 \dots x_n). \quad (31)$$

Es ist also das totale Iteralsystem das Substitutionsprodukt der n associerten partiellen Iteralsysteme.

Satz VI. Zu jedem n-System $(f_1 \dots f_n)$ *können (falls* $n > 1$*) unendlich viele Systeme* $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ *so bestimmt werden, dass* $f_1, f_2, \dots f_n$ *homologe partielle Revers eines jeden sind.*

Beweis. Bezeichnen wir für den Augenblick das Iteralsystem der $(f_1 \dots f_n)$ mit $(\Phi_1 \dots \Phi_n)(x_1; \xi_1 \dots \xi_n)$, so gilt

$$(\Phi_1 \dots \Phi_n)(x_1 + 1; \xi_1 \dots \xi_n) = (f_1 \dots f_n)(\Phi_1 \dots \Phi_n)(x_1; \xi_1 \dots \xi_n).$$

Setzen wir hierin für $\xi_1 \dots \xi_n$ beliebige Funktionen der neuen Variablen $x_2, \dots x_n$ ein und bezeichnen die so transformierten $(\Phi_1 \dots \Phi_n)$ mit

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n),$$

so geht das obige Gleichungssystem über in

$$(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 + 1, x_2, \dots x_n) = (f_1 \dots f_n)(\varphi_1 \dots \varphi_n)(x_1 \dots x_n),$$

womit der Satz bewiesen ist. — Der Nutzen dieses Satzes ergiebt sich aus folgender Bemerkung. Bilden wir nämlich von den so gefundenen Funktionen φ die Reverse nach den Variablen $x_2, \dots x_n$, so erhalten wir nach Satz III lauter zu $(f_1 \dots f_n)$ kommutative Systeme. Das giebt das

Corollar: Zu jedem gegebenen n-System $(f_1 \dots f_n)$ *kann, falls* $n > 1$ *ist, eine unendliche Anzahl kommutativer Systeme* $(g_1 \dots g_n)$ *gefunden werden.*

Wir wollen nach dieser Methode ein *Beispiel* rechnen, indem wir die *Aufgabe* lösen, *zu den beiden linearen Funktionen*

$$f_1 = a\xi + b\eta \qquad f_2 = c\xi + d\eta \tag{32}$$

die allgemeine Form der zu ihnen kommutativen Funktionen g_1, g_2 *zu bestimmen.*

Wir suchen Grössen λ, μ, ω der Art, dass die Gleichung besteht

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = \omega(\lambda\xi + \mu\eta)$$

und zwar findet man leicht

$$\lambda = c, \ \mu = \omega - a; \ \omega^2 - (a + d)\omega + (ad - bc) = 0.$$

Nehmen wir die beiden Werte ω_1, ω_2 von ω für verschieden an, bezeichnen wir ferner die partiellen Iteralfunktionen von f_1, f_2 mit $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, so hat man die Beziehungen

$$\begin{aligned} c\Phi(x) + (\omega_1 - a)\Psi(x) &= \omega_1^x (c\xi + (\omega_1 - a)\eta) \\ c\Phi(x) + (\omega_2 - a)\Psi(x) &= \omega_2^x (c\xi + (\omega_2 - a)\eta). \end{aligned} \tag{33}$$

Wir setzen nun für ξ, η willkürliche Funktionen einer neuen Variablen y ein, setzen also etwa

$$c\xi + (\omega_1 - a)\eta = P(y); \qquad c\xi + (\omega_2 - a)\eta = Q(y)$$

und schreiben für Φ, Ψ jetzt $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$, so gilt:

$$\begin{aligned} c\varphi(x,y) + (\omega_1 - a)\psi(x,y) &= \omega_1^x \,.\, P(y) \\ c\varphi(x,y) + (\omega_2 - a)\psi(x,y) &= \omega_2^x\, Q(y). \end{aligned} \tag{34}$$

Wir berechnen nun die Ausdrücke

$$g_1 = \varphi(\overline{\varphi}, 1 + \overline{\psi}) \qquad g_2 = \psi(\overline{\varphi}, 1 + \overline{\psi}), \tag{35}$$

welches die gesuchten Funktionen sind. Zunächst bemerken wir durch Elimination von x aus (33), dass der Ausdruck

$$C(\varphi, \psi) = \frac{[c\varphi(x,y) + (\omega_1 - a)\psi(x,y)]^{\frac{1}{\log \omega_1}}}{[c\varphi(x,y) + (\omega_2 - a)\psi(x,y)]^{\frac{1}{\log \omega_2}}}$$

bloss Funktion von y ist, so dass wir umgekehrt y gleich einer willkürlichen Funktion $\Omega(C(\varphi, \psi))$ setzen können. Aus (34) ziehen wir dann

$$c\psi(x, y+1) + (\omega_1 - a)\psi(x, y+1)$$
$$= \omega_1^x\, Py \,.\, \frac{P(y+1)}{Py} = \{c\psi(x,y) + (\omega_1 - a)\psi(x,y)\}\frac{P(y+1)}{Py}$$

Setzen wir in dieser und der analogen Gleichung für ω_2 Fy, G(y) an Stelle von $\frac{P(y+1)}{P(y)}$, $\frac{Q(y+1)}{Q(y)}$, machen wir ferner

$$x = \overline{\varphi}(\xi, \eta), \qquad y = \Omega C(\xi, \eta) = \overline{\psi}(\xi, \eta)$$

und bedenken die Gleichungen (35), so erhalten wir

$$\begin{aligned} cg_1 + (\omega_1 - a)g_2 &= \{c\xi + (\omega_1 - a)\eta\}\, F(\overline{\psi}) \\ cg_1 + (\omega_2 - a)g_2 &= \{c\xi + (\omega_2 - a)\eta\}\, G(\overline{\psi}). \end{aligned}$$

Berechnen wir hieraus g_1, g_2, und schreiben für $\frac{F\Omega(t)}{c(\omega_2 - \omega_1)}$ $\frac{G\,\Omega(t)}{c(\omega_2 - \omega_1)}$ wieder F(t), G t), so erhalten wir endlich:

$$\begin{aligned} g_1(\xi, \eta) &= (\omega_2 - a)\{c\xi + (\omega_1 - a)\eta\}\, FC(\xi\eta) \\ &\qquad - (\omega_1 - a)\{c\xi + (\omega_2 - a)\eta\}\, GC(\xi\eta) \\ g_2(\xi, \eta) &= -c\{c\xi + (\omega_1 - a)\eta\}\, FC(\xi_1 \eta) \\ &\qquad + c\{c\xi + (\omega_2 - a)\eta\}\, GC(\xi\eta), \end{aligned} \tag{36}$$

worin $\quad C(\xi, \eta) = \frac{[c\xi + (\omega_1 - a)\eta]^{\frac{1}{\log \omega_1}}}{[c\xi + (\omega_2 - a)\eta]^{\frac{1}{\log \omega_2}}}\quad$ bedeutet

F, G sind völlig willkürliche Funktionen. Die Formeln (36) enthalten die vollständige Lösung unserer Aufgabe für den Fall ungleicher Wurzeln ω.

Die Funktionen f_1, f_2, g_1, g_2, bilden zusammen ein totales Reverssystem, das die totalen Iteralen $\varphi(x\,y)$, $\psi(x\,y)$ hat.

Setzt man für F, G beliebige Konstanten A, B, so erhält man eine partikulare Lösung des Problems, aus der man also die allgemeine findet, indem man die Konstanten durch willkürliche Funktionen des Ausdrucks $C(\xi, \eta)$ ersetzt. Diese Funktion $C(\xi\,\eta)$ hat die Eigenschaft, sich nicht zu ändern, wenn man an Stelle von ξ, η resp. $f_1(\xi\,\eta)$, $f_2(\xi\,\eta)$ setzt. Da sie demnach für alle Iterierten von (f_1, f_2) sich gleich bleibt, nenne ich sie eine *Coiterante* von (f_1, f_2).

Solche Coiteranten gibt es zu jedem System $(f_1 \cdots f_n)$. Man kann sie in der angegebenen Weise erhalten, indem man aus je zwei Iteralfunktionen die Iterationsvariable eliminiert. Sie spielen in dem Problem, die kommutativen Funktionen zu finden, eine Hauptrolle, indem sie dazu dienen, aus partikularen Lösungen mit willkürlichen Konstanten allgemeinere Lösungen herzustellen.

Zum Schluss dieses Paragraphen folge noch eine Bemerkung zur Theorie der Reverse. Es gelte nämlich zwischen den Funktionen $(f_1 \cdots f_n)$ eines n-Systems und den n Funktionen $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ der r Variablen $x_1 \cdots x_r$ ein Gleichungssystem der Form

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1+1, x_2, \ldots x_r) = (f_1 \ldots f_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_r) \quad (37)$$

Ist nun $r = n$, so sind, wie wir gesehen haben, $f_1 \cdots f_n$ durch diese Gleichungen als partielle Reverse der $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ eindeutig bestimmt und können durch Einführung der Inversen der φ aus diesen leicht dargestellt werden.

Ist aber $r < n$, so sind die $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ nicht von einander unabhängig, es existieren vielmehr $n - r$ Relationen zwischen ihnen, die wir etwa schreiben können

$$\varphi_1 = G_1(\varphi_1 \ldots \varphi_n), \quad \varphi_2 = G_2(\varphi_1 \ldots \varphi_n), \ldots \varphi_{n-r} = G_{n-r}(\varphi_1 \ldots \varphi_n).$$

Führen wir diese Ausdrücke für $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-r}$ in die rechte Seite von (37) ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an

$$(f'_1 \ldots f'_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_r).$$

Die Gleichung (37) bleibt also bestehen, wenn wir die f′ durch die f ersetzen, d. h. es gilt der Satz:

Satz VII. Besteht ein Gleichungssystem der Form (36), worin die φ gegebene Funktionen von weniger Variablen, als ihre Anzahl beträgt, sind, so giebt es im Allgemeinen noch unendlich viele Funktionen $f'_1 \cdots f'_n$, die für $f_1 \cdots f_n$ eingesetzt, das Gleichungssystem befriedigen.

§ 4.

Mit den Reversen sind gewisse andere Funktionen von $2n$ Variablen $\xi_1 \cdots \xi_n \; \eta_1 \cdots \eta_n$ nahe verwandt, die wir durch folgende Gleichungen definieren

$$\varphi\,(\overline{\varphi}\,(\xi) + \overline{\varphi}\,(\eta)) = \lambda\,(\xi, \eta) \tag{38}$$

$$\varphi_k\{\overline{\varphi}_1(\xi_1 \ldots \xi_n) + \overline{\varphi}_1(\eta_1 \ldots \eta_n); \ldots \overline{\varphi}_n(\xi_1 \ldots \xi_n) + \overline{\varphi}_n(\eta_1 \ldots \eta_n)\}$$
$$= \lambda_k \begin{Bmatrix} \xi_1, \; \xi_2, \ldots \xi_n \\ \eta_1, \; \eta_2, \ldots \eta_n \end{Bmatrix} \; (k = 1 \ldots n) \tag{39}$$

Es folgen hieraus sofort die andern

$$\varphi\,(x + y) = \lambda\,(\varphi\,(x), \; \varphi\,(y)). \tag{40}$$

$$\varphi_k\{x_1 + y_1, \; x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n\}$$
$$= \lambda_k \begin{Bmatrix} \varphi_1(x_1 \ldots x_n), \ldots \varphi_n(x_1 \ldots x_n) \\ \varphi_1(y_1 \ldots y_n), \ldots \varphi_n(y_1 \ldots y_n) \end{Bmatrix} \quad (k = 1 \ldots n). \tag{41}$$

Den Inhalt solcher Gleichungen nennt man bekanntlich ein *Additionstheorem.* Die Funktionen λ, λ_k, welche n Paare von Funktionen gewissermassen zu n Funktionen derselben Art (mit neuen Argumenten) zusammenbinden, heisse ich *Liganten.*

Die Liganten, nur als Funktionen der ξ betrachtet, sind partielle Reverse in weiterem Sinne, und als solche für jedes n-System völlig bestimmt. Wir haben so den Satz:

Satz VIII. Zu jedem n-System gehört ein bestimmtes Ligantensystem. Die ligierten Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ sind die Iteralfunktionen ihrer Liganten.

Trotz der Analogie mit den Reversen spielen doch die Liganten eine besondere Rolle. Ein Revers kann z. B. algebraisch sein, während es die zugehörige Ligante nicht ist. So ist der Revers von b^{a^x} gleich ξ^a, hingegen die Ligante $e^{\log \xi . \log \eta}$. Es kann daher eine Funktion Iterale einer algebraischen Funktion sein und doch kein algebraisches Additionstheorem besitzen.

Die Liganten zeichnen sich durch gewisse Eigenschaften aus, auf denen ihre Wichtigkeit beruht.

I. Setzen wir in (41) $y_1 = y_2 = \cdots y_n = o$.

$$\varphi_1(o, \ldots o) = \omega_1 \quad \ldots \quad \varphi_n(o, \ldots o) = \omega_n$$
$$\varphi_1(x_1 \ldots x_n) = \xi_1 \quad \ldots \quad \varphi_n(x_1 \ldots x_n) = \xi_n,$$

so erhalten wir

$$\xi_k = \lambda_k \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \omega_1 \ldots \omega_n \end{matrix} \right\} \qquad (k = 1 \ldots n),$$

d. h. es giebt immer n von den ξ unabhängige Konstanten, $\omega_1 \ldots \omega_n$, welche, in $\lambda_k \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{matrix} \right\}$ für $\eta_1 \ldots \eta_n$ eingesetzt, $\lambda_k = \xi_k$ machen.

II. Aus dem Anblick von (38), (39) ergiebt sich sofort

$$\lambda_k \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{matrix} \right\} = \lambda_k \left\{ \begin{matrix} \eta_1 \ldots \eta_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{matrix} \right\}.$$

III. Substituieren wir das System $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}$ in das andere $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}$ an Stelle der $\xi_1 \ldots \xi_n$, so resultiert

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n) [\overline{\varphi}_1 (\xi_1 \ldots \xi_n) + \overline{\varphi}_1 (\eta_1 \ldots \eta_n) + \overline{\varphi}_1 (y_1 \ldots y_n); \ldots .],$$

d. h. ein in den 3 Wertsystemen $(\xi_1 \ldots \xi_n)$, $(\eta_1 \ldots \eta_n)$, $(y_1 \ldots y_n)$ symmetrisches Funktionsystem.

Infolge der obigen drei Eigenschaften ist es möglich, für die Liganten die folgende, handlichere Schreibweise einzuführen. Ich setze nämlich

$$\lambda_k \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{matrix} \right\} = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown_k (\eta_1 \ldots \eta_n) \qquad (k = 1 \ldots n)$$

und fasse diese n Gleichungen in die eine symboliscbe zusammen:

$$(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{matrix} \right\} = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n).$$

Wenn also das Ligantenzeichen $\frown$ keinen Index hat, bedeutet es das ganze System. Die Relationen I, II, III lassen sich dann so darstellen.

$$\text{I.}\quad (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\omega_1 \ldots \omega_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n).$$

$$\text{II.}\quad (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\xi_1 \ldots \xi_n).$$

$$\begin{aligned}\text{III.}\quad & [(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (y_1 \ldots y_n)] \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \\ &= (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown [(y_1 \ldots y_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)] \\ &= (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (y_1 \ldots y_n).\end{aligned} \tag{42}$$

Man sieht, dass man mit dem Zeichen $\frown$ gerade so operiert, wie mit dem Zeichen $+$ der Addition, die ja auch eine Ligante ist.

Die genannten drei Eigenschaften sind nun aber für die Liganten definitorisch und darin liegt auch ihre Wichtigkeit. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz IX. Alle Funktionen oder Funktionensysteme von 2 n Variablen, denen die Eigenschaften I, II, III zukommen, sind Liganten eines Systems von n Funktionen mit n Variablen.

Beweis: Genügt das System $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$ den Gleichungen I, II, III, so findet man zunächst mit Hilfe von II, III

$$J^2 (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown \{ (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \}$$

$$J^3 (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown \{ (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \}.$$

Bezeichnen wir allgemein den Ausdruck

$(\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown \ldots\ldots \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$, worin $(\eta_1 \ldots \eta_n)$ k mal vorkommt, mit $(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown k}$, so findet man für das Iteralsystem von $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$ den Ausdruck

$$J^x (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown x}. \tag{43}$$

Für $x = o$ ergiebt sich daraus mit Hilfe von I die Bedeutung des Symbols $(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown o}$, nämlich

$$(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown o} = (\omega_1 \ldots \omega_n). \tag{44}$$

Setzen wir nun in (43) $\xi_1 = \omega_1,\ \xi_2 = \omega_2, \ldots \xi_n = \omega_n$, so dass also $J^0 = (\omega_1 \ldots \omega_n)$, $J^1 = (\eta \ldots \eta_n)$ wird, setzen dann für $(\eta_1 \ldots \eta_n)$ der Reihe nach die Wertsysteme

$$(\eta'_1 \cdots \eta'_n), \quad (\eta_1^{(2)} \cdots \eta_n^{(2)}), \ldots (\eta_1^{(n)} \cdots \eta_n^{(n)})$$

in und für x entsprechend $x_1, x_2, \ldots x_n$, verbinden endlich die so rhaltenen n Iteralsysteme durch das Zeichen $\frown$, so ist das Resultat ffenbar das n-System

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(x_1 \cdots x_n)$$
$$= (\eta'_1 \cdots \eta'_n)^{x_1} \frown (\eta_1^{(2)} \cdots \eta_n^{(2)})^{x_2} \frown \cdots (\eta_1^{(n)} \cdots \eta_n^{(n)})^{x_n}. \qquad (45)$$

Setzt man hierin $x_k + y_k$ an Stelle von x_k, und ordnet die lieder rechts passend um, was wegen II, III möglich ist, so erhält an sofort die Formel

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(x_1 + y_1, \ldots x_n + y_n)$$
$$= (\varphi_1 \cdots \varphi_n)(x_1 \cdots x_n) \frown (\varphi_1 \cdots \varphi_n)(y_1 \cdots y_n). \qquad (46)$$

elche von (41) nur durch die Schreibweise verschieden ist. Damit t der Satz bewiesen.

Eine genauere Betrachtung zeigt übrigens, dass die Relationen II, schon in der dritten enthalten sind, so dass also die Eigenschaft allein zur Definition der Liganten ausreicht.

Für $n = 1$ hat Abel zuerst den obigen Satz (aus der Annahme III) f anderm Wege hergeleitet.

Bedenkt man, dass aus (45) folgt

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(x_1\, 0 \cdots 0) = (\eta'_1 \cdots \eta'_n)^{x_1} \quad \text{etc.,}$$

sieht man, dass sich (45) auch in der Form schreiben lässt:

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(x_1 \cdots x_n)$$
$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(x_1 \cdots 0) \frown (\varphi_1 \cdots \varphi_n)(0\, x_2 \cdots 0) \frown \cdots \frown (\varphi_1 \cdots \varphi_n)(0 \cdots x_n), \qquad (47)$$

h. in Worten:

Satz X. *Alle Funktionen eines n-Systems lassen sich mit Hilfe der Liganten durch die n^2 Funktionen $(\varphi_1 \cdots \varphi_n)$ $(x_1\, 0 \cdots 0)$ etc. von je nur einer Variablen ausdrücken.*

Sind die Liganten algebraisch, so ist also auch diese Zurück- rung algebraisch ausführbar. Den Satz X hat zuerst *Jacobi* am ispiel der Abelschen Funktionen nachgewiesen.

Wir sind zu dem Begriff einer Ligante gelangt durch die Aufgabe, Funktion einer Summe durch die Funktionen der einzelnen Sum-

manden auszudrücken. Diesem Problem steht offenbar dual das ande gegenüber, eine Summe von Funktionswerten durch einen einzig Funktionswert darzustellen. Es ist bekannt, dass auch dieses Proble durch dieselben Liganten gelöst wird, und in diesem Umstand tr der in der Einleitung erwähnte Dualismus besonders stark ans Lich

Nimmt man nämlich auf beiden Seiten der Gleichungen (45) d Inversen $(\bar{\varphi}_1 \cdots \bar{\varphi}_n)$ und setzt $x_k = \bar{\varphi}_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$, $y_k = \bar{\varphi}_k(\eta_1 \cdots \eta_n)$, so e hält man die gesuchte Darstellung

$$\bar{\varphi}_k(\xi_1 \cdots \xi_n) + \bar{\varphi}_k(\eta_1 \cdots \eta_n) = \bar{\varphi}_k(\lambda_1, \cdots \lambda_n) \qquad (k = 1 \cdots n),$$

worin der Kürze halber $(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = (\xi_1 \cdots \xi_n) \frown (\eta_1 \cdots \eta_n)$ gesetzt ist.

Die Wichtigkeit der Liganten beruht nun zum grossen T darin, dass sie sich leichter iterieren lassen als andere, oft scheinb einfachere Funktionen; wenigstens gilt dies von den bisher allein Betracht gezogenen algebraischen Liganten. Da man durch ihre I ration direkt die ligierten Funktionen erhält, wie dies bereits A bei den elliptischen Funktionen ausgeführt hat, so erklärt sich, w halb die Funktionen, welche algebraische Additionstheoreme besitz verhältnismässig leicht zugänglich sind.

§ 5.

Nachdem im Vorhergehenden die Grundoperationen der Iteratio rechnung, die Transformation (Satz II), die Reversion und die Ligant bildung, in formaler Weise besprochen worden sind, ohne Rücksi auf die spezielle Natur der Funktionen, werfen wir nun zum Schl einen kurzen Blick auf das Verhalten der einzelnen Funktio gegenüber der Iteration.

Indem man sich an das in der Einleitung auseinandergese Schema von 4 Stufen erinnert, leuchtet ein, dass wir uns auf Untersuchung der (algebraischen) Deuterofunktionen beschrän müssen, indem ja erst aus diesen die Tritofunktionen erschlos werden sollen, was bisher nur unvollständig gelungen ist. Dabei z sich gleich, dass die algebraischen Funktionen sich in gewisse Klas sondern lassen, die bei der Iteration ein wesentlich verschiede Verhalten aufweisen. Darauf soll im Folgenden etwas eingegan werden.

Die einfachsten Deuterofunktionen sind offenbar die *linearen*. a sie am nächsten der Protofunktion verwandt sind. Jedes Gleichungs-ystem von der Form:

$$f_k = A_0^{(k)} + A_1^{(k)} \xi_1 + A_2^{(k)} \xi_2 + \cdots A_n^{(k)} \xi_n \qquad (k = 1 \cdots n)$$

hrt bekanntlich im allgemeinen auf Exponentialfunktionen, in peziellen Fällen auf ganze rationale Funktionen. Setzt man $A_0^{(k)} = 0$ nd führt ein

$$\frac{f_k}{f_n} = g_k \qquad \frac{\xi_k}{\xi_n} = \eta_k,$$

liefert die Iteration des Systems gebrochener Funktionen mit eichen Nennern:

$$g_k = \frac{A_1^{(k)} \eta_1 + A_2^{(k)} \eta_2 + \cdots A_n^{(k)} \eta_n}{A_1^{(n)} \eta_1 + A_2^{(n)} \eta_2 + \cdots A_n^{(n)} \cdot \eta_n} \qquad (k = 1, \cdots n) \qquad (49)$$

uotienten solcher Exponentialfunktionen resp. gebrochene rationale unktionen. Die Formeln für die Iteralfunktionen sind leicht herzu-iten, ich begnüge mich mit dem einfachsten, oft gebrauchten Fall ner einzigen Variablen. Es ist:

$$J^x\left(\frac{A\xi + B}{C\xi + D}\right) = \frac{[Q(x) + (A-D)P(x)]\,\xi + 2P(x)\cdot B}{2P(x)\cdot C\cdot\xi + [Q(x) - (A-D)P(x)]}, \qquad (50)$$

orin $P(x) = \dfrac{(u+w)^x - (u-w)^x}{2w}, \qquad Q(x) = \dfrac{(u+w)^x + (u-w)^x}{2}$

$$u = \frac{A+D}{2}, \qquad w = \frac{1}{2}\sqrt{\varDelta} = \frac{1}{2}\sqrt{(A-D)^2 + 4BC}.$$

Spezielle Fälle, die häufig vorkommen, sind:

$= D)$ $\quad J^x\left(\dfrac{A\xi + B}{C\xi + A}\right) = \dfrac{Q(x)\cdot\xi + 2P(x)\cdot B}{2P(x)\cdot C\cdot\xi + Q(x)},$ $\qquad$ z. B.:

$$J^x\left(\frac{\xi + a}{1 - a\xi}\right) = \frac{\dfrac{(1+ia)^x + (1-ia)^x}{2}\,\xi + \dfrac{(1+ia)^x - (1-ia)^x}{2}}{\dfrac{(1+ia)^x + (1-ia)^x}{2} - \dfrac{(1-ia)^x - (1-ia)^x}{2i}\cdot\xi}$$

$= 0$ $\quad J^x\left(\dfrac{A\xi + B}{C\xi + D}\right) = \dfrac{[(x+1)A - (x-1)D]\,\xi + 2xB}{2xC\cdot\xi + [(x+1)D - (x-1)A]}$ (rational).

Für die Funktionen P(x), Q(x) und ihr Verhältnis T(x) gelt
die Formeln

$$P(x+y) = P(x) \cdot Q(y) + P(y) Qx \qquad T(x+y) = \frac{T(x)+T(y)}{1+\varDelta \cdot T(x) T(}$$
$$Q(x+y) = Q(x) \cdot Q(y) + \varDelta P(x) \cdot Py$$

Je nach den verschiedenen Werten von $J^0 = \xi$ modifizieren si
die Formeln. Für die Liganten der Iteralfunktion (50) finden w
falls $J^0 = \infty$ genommen wird

$$\operatorname{Lig} J^x \left(\frac{A\xi+B}{C\xi+D}\right) = \frac{C\eta\xi+B}{C(\eta+\xi)-(A-D)}. \qquad (5$$

Wenn der Grad der rationalen Funktionen den ersten übertri
so stösst die allgemeine Iteration auf grosse Schwierigkeiten. N
in speziellen Fällen lässt sich die Iteration ausführen und liefert da
die Exponentialfunktionen a^x oder a^{b^x}. Dazu gehört vor allen
bemerkenswerte Klasse der *isobaren* Funktionen. Ist nämlich $f_k = \varphi_k$
eine isobare Funktion der Variablen $\xi_1 \cdots \xi_k$, wobei ξ_k das Gewich
besitzt, so ist das System

$$\begin{aligned}
\varphi_1(1) &= \quad A \cdot \xi_1 \\
\varphi_2(1) &= \quad B \cdot \xi_1^2 + B_1 \xi_2 \\
\varphi_3(1) &= \quad C \cdot \xi_1^3 + C_1 \xi_1 \cdot \xi_2 + C_2 \qquad (5 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_k(1) &= \cdots M \xi_1^k + M_1 \xi_1^{k-2} \cdot \xi_2 + M_2 \cdot \xi_1^{k-3} \cdot \xi_3 + \cdots M_{r_k}
\end{aligned}$$

leicht zu iterieren. Ein solches isobares System hat die Eigensch
dass das inverse System wiederum isobar ist, ebenso alle Iteriert
wie man leicht einsieht. Man kann für die Iteralfunktionen φ
daher ansetzen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= A(x) \cdot \xi_1 \\
\varphi_2(x) &= B(x) \cdot \xi_1^2 + B_1(x) \\
\varphi_3(x) &= C(x) \cdot \xi_1^3 + C_1(x) \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + C_2(x) \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Durch Rekursionsformeln erhält man so

$$A(x) = A^x; \quad B(x) = B \cdot \frac{B_1^x - A^{2x}}{B_1 - A^2}; \qquad B_1(x) = B_1^x$$

$$C(x) = \frac{CC_2 + A(BC_1 - B_1 C)}{C_2 - A \cdot B_1} \cdot \frac{C_2^x - A^{3x}}{C_2 - A^3} - \frac{ABC_1}{C_2 - AB_1} \cdot \frac{(AB_1)^x - A^{3x}}{AB_1 - A^3}$$

$$C_1(x) = C_1 \frac{C_2^x - (A B_1)^x}{C_2 - A B_1}; \qquad C_2(x) = C_2^x \quad \text{etc.}$$

Man überzeugt sich leicht, dass allgemein $\varphi_k(x)$ aus Exponential-
ıktionen, eventuell auch aus rationalen Funktionen zusammengesetzt ist.

Wenden wir uns zu den algebraischen Funktionen überhaupt,
ist klar, dass hier die Schwierigkeit der Iteration noch grösser
, als bei den rationalen Funktionen. Indessen giebt es doch viele
ıd allgemeine Fälle, in denen diese Schwierigkeiten zum Teil ge-
ben sind, so dass man zu Resultaten gelangen kann.

So giebt es z. B. unzählige Funktionen, die nach Art des Satzes II
rch algebraische Transformation aus linearen oder isobaren Funktionen
standen sind und natürlich durch Iteration auf Exponentialfunktionen
ren. Dahin gehören ferner alle algebraischen Funktionen, die etwa
er linearen Iteralgleichung

$$f^{(k)} = a_1 f^{(k-1)} + a_2 f^{(k-2)} + \cdots a_{k-2} f f(\xi) + a_{k-1} f(\xi) + a_k \cdot \xi$$
$$(f^{(k)} = J^{(k)} f)$$

ıügen, so z. B. die Funktionen f in dem Beispiel pag. 13, die
ionalen Werten der Konstanten C entsprechen.

Zwei Klassen algebraischer Funktionen sind dadurch interessant,
s sich bei ihnen die Iteration durch *rationale* Rechnung be-
tigen lässt.

Es seien $f_1, \cdots f_n$ n unabhängige algebraische Funktionen der
iablen $\xi_1 \cdots \xi_n$ und es sei Ω der Körper aller rationalen Funk-
ıen der ξ. Der durch Adjunktion von $f_1, \cdots f_n$ entstandene Körper
$f_1 \cdots f_n)$ heisse dann kurz «der Körper von $(f_1 \cdots f_n)$».

Iterieren wir $f_1 \cdots f_n$, so werden die Ausdrücke $f_1(f_1 \cdots f_n)$,
$f_n(f_1 \cdots f_n)$ im allgemeinen nicht mehr dem Körper $\Omega(f_1 \cdots f_n)$ an-
ören. Es giebt indes eine grosse Zahl von Funktionen, für welche
ser Fall eintritt, für welche also

$$_1 \cdots f_n), \cdots f_n(f_1 \cdots f_n) = \text{rationalen Funktionen von } (f_1 \cdots f_n, \xi_1 \cdots \xi_n)$$

l. Ebenso sind dann auch die Iterierten höherer Ordnung Funk-
en in $\Omega(f_1 \cdots f_n)$. Solche Funktionen $f_1 \cdots f_n$, die in ihrem eigenen
per iterierbar sind, heisse ich *«körpertreu»*.

Man kann die Aufgabe zu gegebenen Irrationalitäten $\varrho_1(\xi_1 \cdots \xi_n)$,
$\cdots \varrho_n$ alle körpertreuen Funktionen zu finden, leicht auf eine Auf-
e der Gleichungslehre zurückführen. Bezeichnen $R_1, \cdots R_n$ ratio-

nale Funktionen der Variablen $x_1 \cdots x_n$ mit vorläufig willkürliche
Koeffizienten und bilden wir von dem Ausdruck

$$\varrho_k(x_1, \cdots x_n) - R_k(x_1, \cdots x_n) \qquad (k = 1 \cdots$$

das Produkt über alle Konjugierten von ϱ_k, so erhalten wir d
folgende System rationaler Gleichungen

$$G_k = \Pi \varrho_k(x_1, \cdots x_n) - R_k(x_1, \cdots x_n) = 0 \qquad k = 1, \cdot\cdot n), \qquad (5$$

wodurch $x_1, \cdot\cdot x_n$ als Funktionen der Koeffizienten der R bestim
sind. Unsere Aufgabe läuft nun darauf hinaus, diese Koeffizienten d
sonst willkürlichen rationalen Funktionen R als Grössen aus $\Omega(\varrho_1 \cdot\cdot$
so zu bestimmen, dass das Gleichungssystem (53) ein System rational
Lösungen erhält:

$$x_1 = f_1 = R_1(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n, \xi_1 \cdot\cdot \xi_n), \cdots x_n = f_n = R_n(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n\, \xi_1 \cdot\cdot \xi_n). \quad (5$$

Dabei hat man noch zu achten, dass die f auch primitive Grössen d
Körpers $\Omega(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n)$ sind, d. h., dass sich auch die $\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n$ umgekeh
durch die $f_1 \cdot\cdot f_n$ ausdrücken lassen.

In jeder der Gleichungen (53) muss ferner ein Faktor ve
schwinden, also für jedes k gelten:

$$\varrho'_k(f_1 \cdot\cdot f_n) = R_k(f_1, \cdot\cdot f_n) \qquad (k = 1 \cdot\cdot n) \qquad (5$$

wo ϱ'_k irgend eine der Konjugierten von ϱ_k oder ϱ_k selbst vorstell
soll. Sind nun noch $\Omega(\varrho_1)$, $\Omega(\varrho_2)$, $\cdot\cdot$ $\Omega(\varrho_n)$ lauter Galois'sche Körp
die mit ihren conjugierten Körpern zusammenfallen, so folgt aus (5
dass auch $\varrho_k(f_1 \cdot\cdot f_n)$ und somit auch $f_k(f_1 \cdot\cdot f_n)$ sich rational dur
$\varrho_1 \cdots \varrho_n$ resp. $f_1 \cdots f_n$ darstellen lassen, *d. h. die Lösungen $f_1 \cdots$
sind körpertreue Funktionen.

Statt der n Funktionen $\varrho_1 \cdots \varrho_n$ kann man auch eine einz
primitive Grösse ϱ des Körpers $\Omega(\varrho_1 \cdots \varrho_n)$ einführen.

Hat man so ein körpertreues Funktionensystem gefunden,
kann man sich die Iterierten verschiedener Ordnung durch bl
rationale Rechnung successive darstellen. Damit bleibt allerdings
Schwierigkeit, die allgemeine Iteralfunktion zu finden, noch diesel
wie für die rationalen Funktionen. Indes ist die Lösung des obig
Problems auch so schon wichtig, zumal sie einer interessanten A
wendung auf die *Zahlentheorie* fähig ist.

Ist nämlich $F(x, x_1, \ldots x_n)$ eine rationale Form der Variab
$x, x_1 \cdots x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so stellt die Zahlentheo

e Aufgabe, solche *rationale* Werte der $x, x_1 \cdots x_n$ zu bestimmen, elche der Gleichung

$$F = 0$$

nüge thun.

Angenommen nun, wir kennten ein Lösungssystem $x = a$, $= a_1, \cdots x_n = a_n$, so liefert das folgende Verfahren ein Mittel, um waige weitere Lösungen zu finden.

Lösen wir die Gleichung $F = 0$ nach einer der Variablen, z. B. ch x auf, so erhalten wir

$$x = \varrho(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

ϱ algebraisch ist. Nun suchen wir, wenn dies überhaupt möglich, ein körpertreues System $f_1 \cdots f_n$ zu $\Omega(\varrho)$. Setzen wir alsdann

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 = R_1(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n = R_n(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)), \end{aligned} \tag{56}$$

gilt auch wegen der Körpertreue der $f_1 \cdots f_n$

$$x = \varrho(f_1 \cdots f_n) = R(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)).$$

Für $\xi_1 = a_1,\ \xi_2 = a_2, \ldots \xi_n = a_n$ geht dann $\varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)$ in eine ionale Zahl a über. $x, x_1, \cdots x_n$ werden daher ebenfalls rational d stellen ein neues Lösungssystem vor. Iterieren wir successive System $(f_1 \cdots f_n)$, so erhalten wir in den Iterierten beliebiger dnung

$$x_1^{(\nu)} = J_1^{\nu}(f_1 \cdots f_n),\ x_2^{(\nu)} = J_2^{\nu}(f_1 \cdots f_n), \cdots\cdots x_n^{(\nu)} = J_n^{(\nu)}(f_1 \cdots f_n)$$

bunden mit $x^{(\nu)} = \varrho(J_1^{\nu}, J_2^{\nu}, \cdots J_n^{\nu})$ neue rationale Lösungssysteme, ald nach der Iteration $\xi = a,\ \xi_1 = a_1, \cdots \xi_n = a_n$ gesetzt wird.

Die so erhaltenen Lösungen brauchen nicht alle von einander schieden zu sein. Sobald das System $(f_1 \cdots f_n)$ für die speziellen rte $\xi_1 = a_1, \cdots \xi_n = a_n$ cyclisch wird, wiederholen sich von einer vissen Ordnung an die Lösungen wieder.

Ist also ein einziges Lösungssystem bekannt, so liefert uns die ration gewisser körpertreuer Funktionen eine endliche bis unendliche zahl neuer.

Diese Methode ist die Verallgemeinerung des bei der Pell'schen ichung längst bekannten Verfahrens.

Beispiel einer körpertreuen Funktion ist

$$f = \xi \cdot \frac{(\xi^4 - 6\xi^2 + 1) + 4(1 - \xi^2)\sqrt{1 - \xi^2}}{1 + \xi^2};$$

$$\sqrt{1 - f^2} = \frac{4\xi^2(1 - \xi^2) - (\xi^4 - 6\xi^2 + 1)\sqrt{1 - \xi}}{1 + \xi^2}$$

Von nicht geringerem Interesse als die körpertreuen Funktione ist eine andere nah verwandte Klasse.

Die körpertreuen Funktionen sind dadurch charakterisiert, da ihre Iterierten sämtlich dem gleichen Körper $\Omega(f_1 \cdots f_n) = \Omega(\varrho)$ a gehören. Lassen wir diese Bedingung fallen, nehmen also an, da die Funktionen $(f_1, \cdots f_n)$ und ihre Iterierten J^2, J^3, etc. der Reil nach den verschiedenen Körpern $\Omega(\varrho_1)$, $\Omega(\varrho_2)$, $\Omega(\varrho_3)$ . . . angehöre so kann der Fall eintreten, dass diese Körper wenigstens alle d gleichen Grad ν besitzen. Genügt also etwa $f_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$ einer rational Gleichung vom Grade ν_k

$$f_k^{\nu_k} + A_1 f_k^{\nu_k - 1} + A_2 f_k^{\nu_k - 2} + \cdots A_{\nu_k} = 0,$$

worin $A_1 \ldots A_{\nu_k}$ rationale Funktionen der ξ vorstellen, so erfüllt da ihre erste Iterierte $f_k(f_1 \ldots f_n)$ eine analoge Gleichung vom selb Grade mit Koeffizienten, die rational aus den Grössen $A_1 \ldots A_{\nu_k}$ z sammengesetzt sind. Dasselbe gilt von den höheren Iterierten. D Problem der Iteration von $(f_1 \ldots f_n)$ kann als gelöst betrachtet werde wenn die Koeffizienten der Gleichungen für $J^x(f_1 \ldots f_n)$ allgemein b stimmt sind, was auf die Iteration eines bloss rationalen n-Syster herausläuft.

Solche Funktionen $f_1 \ldots f_n$, deren Iterierte sämtlich Körpern v gleichen Grad angehören, heisse ich «*gradtreu*».

Beispiel einer solchen gradtreuen Funktion ist

$$f = \sqrt{\xi^2 - a^2 - 2a\sqrt{1 - \xi^2}}, \qquad ff = \sqrt{\xi^2 - 4a^2 - 4a\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Die gradtreuen und körpertreuen Funktionen haben beide Eigenschaft, dass der Grad der in ihnen vorkommenden Irrationali bei der Iteration erhalten bleibt, oder dass die rationalen, irreducib Gleichungen, denen die verschiedenen Iterierten $J_k^x(f_1 \ldots f_n) = \varphi_k$ für ganzzahlige x genügen

$$R_0(\xi_1 \ldots \xi_n)^{(x)} \varphi_k^{\nu}(x) + R_1(\xi_1 \ldots \xi_n)^{(x)} \varphi_k^{\nu-1}(x) + \cdots R_n(\xi_1 \cdots \xi_n)^{(x)} =$$

für alle diese Werte von x denselben Grad besitzen in Bezug auf $\varphi_k($

dessen wird der Grad der ganzen rationalen Funktionen von $\xi_1 \dots \xi_n$ allgemeinen mit wachsendem x rasch zunehmen, wodurch der ration praktisch bald eine Grenze gesteckt wird.

Nun enthalten aber beide Klassen noch eine unendliche Anzahl gebraischer Funktionen, bei deren Iteration selbst die Funktionen $(\xi_1 \dots \xi_n)^{(x)}$ in Bezug auf alle ξ denselben Grad behalten. Diese nktionen $f_1 \dots f_n$ unterscheiden sich daher von ihren Iterierten nur rch die wechselnden Werte der in ihnen vorkommenden Konstanten, *h. die Form der Funktionen bleibt bei der Iteration erhalten.*

Solche Funktionen nenne ich nun «*formtreu*» und zwar «*eigentlich*» oder «*uneigentlich*», je nachdem sie zugleich körpertreu oder nur adtreu sind.

Beispiel einer eigentlich formtreuen Funktion ist

$$= \frac{5\xi + 6\sqrt{1+2\xi^2-8\xi^4}}{9+32\xi^2} \qquad ff = \frac{12540\sqrt{1+2\xi^2-8\xi^4}-46031.\xi}{43681+28800\xi^2}$$

hrend die Funktion

$$f = \sqrt{a+\xi^2}$$

eigentlich formtreu ist.

Zu den formtreuen Funktionen gehören auch vor allem die earen und isobaren Funktionen, deren leichte Iterierbarkeit zumeist ihrer Formtreue beruht. Überhaupt erscheinen die formtreuen nktionen gewissermassen als «algebraisch lineare» Funktionen und d daher in Bezug auf Iteration als die einfachste Klasse der alraischen Funktionen zu betrachten. Dies tritt auch zu Tag in ihrer en Beziehung zu den Funktionen von 2 n Variablen $\xi_1 \dots \xi_n \; \eta_1 \dots \eta_n$, wir oben (§ 4) Liganten genannt haben.

Ist nämlich $(\xi_1 \dots \xi_n) \frown (\eta_1 \dots \eta_n)$ ein Ligantensystem, so ist das ierte System gleich

$$\{(\xi_1 \dots \xi_n) \frown (\eta_1 \dots \eta_n)\} \frown (\eta_1 \dots \eta_n) = (\xi_1 \dots \xi_n) \frown (\eta_1 \dots \eta_n)^2.$$

Man erhält also die Iterierten der Liganten, indem man an Stelle $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ resp. die Ausdrücke

$$(\eta_1 \dots \eta_n) \frown_1 (\eta_1 \dots \eta_n), \dots\dots (\eta_1 \dots \eta_n) \frown_n (\eta_1 \dots \eta_n)$$

t, *d. h. die Liganten sind formtreue Funktionen von* $\xi_1 \dots \xi_n$.

Wir kommen somit wieder zur Erkenntnis, dass die nächste gabe der endlichen Iterationsrechnung darin besteht, sämtliche braische Liganten etwa auf Grund der Definition in Satz IX mit

rein algebraischen Mitteln herzustellen und sodann ihre Iteralfunktione zu untersuchen. In der That sind diese letzteren Funktionen (un die aus ihnen zusammengesetzten) die einzigen Tritofunktionen, di bisher erhalten worden sind, und es ist das grosse Abel'sche Theore in seiner ursprünglichen Form nichts anderes, als die dualistische Be handlung und teilweise Lösung des soeben aufgestellten Problems.

Zum Schluss mag noch eine allgemeine Bemerkung folgen. W verstanden in dieser Arbeit unter Iterieren durchweg, dass eine Funktio oder ein Funktionensystem *unverändert* und fortgesetzt in sich selb substituiert wird. Wir können nun aber den Begriff des Iterieren dadurch erweitern, dass wir die Funktionen bei jeder Substituti etwas abändern. Ist z. B. $f(\xi, \alpha)$ eine Funktion von ξ mit eine Parameter α, so bilden wir die Reihe

$$f(\xi, \alpha_1),\quad f(\xi, \alpha_2),\quad f(\xi, \alpha_3), \ldots\ldots f(\xi, \alpha_n), \ldots\ldots$$

und substituieren das zweite Glied in das erste, das dritte in d zweite u. s. f. Wir erhalten so einen Ausdruck, den ich eine *Fun tionenkette* heisse. Unterliegen die Grössen α_n einem bekannten G setz, bilden sie z. B. eine arithmetische Reihe, so kann man nach d Funktion von n fragen, welche diese Kette allgemein als Funkti ihrer Gliederzahl darstellt. Eine solche «Iteralfunktion» ist z. B. d *Fakultät* $(a, +1)^n$ nach Crelles Bezeichnung.

Diese «erweiterte Iterationsrechnung» lässt sich formal zum T ganz ähnlich behandeln wie die gewöhnliche, spielt indes keine solc Rolle. Übrigens kann sie ganz auf die letztere zurückgeführt werd so dass keine neuen Funktionen dadurch zustande kommen. Sie hier nur der Vollständigkeit wegen erwähnt worden, und weil es nützlich ist, gewisse Probleme unter diesem Gesichtspunkt zu betracht

SSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZUM JAHRESBERICHT
S REALGYMNASIUMS ZU WITTEN. OSTERN 1906.

E ELEMENTE DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

FÜR DIE SCHÜLER DER HÖHEREN LEHRANSTALTEN
BEARBEITET VON

PROF. H. STECKELBERG.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

gr. Nr. 460.

Die vorliegende Arbeit ist in erster Linie für die Schüler
estimmt. Den Anregungen des Herrn Geheimrats Felix Klein
Göttingen folgend, habe ich seit einigen Jahren den Versuch
macht, den Schülern der oberen Klassen die Elemente der
ifferential- und Integralrechnung in Verbindung mit der ana-
tischen Geometrie zum Verständnis zu bringen. Es bestand
i mir von vornherein kein Zweifel, daß dieser Versuch er-
lgreich sein müsse und auch zweckmäßig sei; denn ich selbst
tte schon als Primaner in einem vorzüglichen mathematischen
nterricht die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung kennen
lernt und an mir selbst die großen Vorteile dieser Kenntnis
fahren. Schwierigkeiten bieten die Erörterungen einem Durch-
nittsprimaner nicht, und selbst schwächere Schüler bringen
n Erläuterungen ein lebhaftes Interesse entgegen. Ganze
uppen von Aufgaben lassen sich spielend lösen, und dem
gehenden Studenten, was er auch immer studieren möge, sind
Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung ein willkommener
sitz, da er bei seinen Studien vielfach auf Differentiale und
egrale stößt.

Im letzten Jahre habe ich schon in Unterprima, ohne be-
ndere Rücksicht auf die analytische Geometrie zu nehmen,
Differential- und Integralrechnung durchgenommen. Auch
ser Versuch erscheint mir gut gelungen und bietet gegen-
er meinen früheren Versuchen den wesentlichen Vorteil, daß
Anwendungen vielseitiger sind und nachher große Erleich-
ungen auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik und
ysik gewähren.

Ich will nicht unerwähnt lassen, daß von hervorragenden Mathematikern vor Jahren schon mit bestem Erfolge Versuche gemacht worden sind, die Elemente der Differential- und Integralrechnung in den Schule einzuführen; ich er- innere an Seeger*), Direk- tor in Güstrow, Most**) Direktor in Coblenz, und in neuester Zeit Schröder***) Direktor in Groß-Lichter- felde.

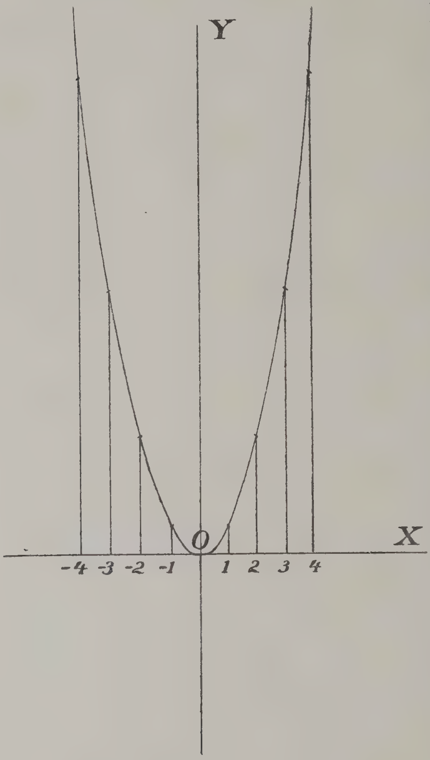


Fig. 1.

§ 1. Der Funktionsbegrif

Wenn eine Größe y m einer veränderlichen Größ x in der Weise zusammen hängt, daß jedem Werte vo x ein bestimmter Wert vo y zugeordnet ist, so nen man y eine Funktion von und drückt diese Abhängi keit allgemein dadurch au daß man schreibt $y = f($ Die Größe x ist die u abhängige und y die abhängige Veränderliche od Variable.

---

*) Seeger, Elemente der algebraischen Analysis und der Infinitesim- rechnung. Wismar 1894.

**) Most, Der mathematische Unterrichtsstoff in den oberen Klass Coblenz 1901.

***) Schröder, Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnu Leipzig 1905.

In der folgenden Tabelle sind eine Reihe von zusammen-
ehörigen Werten der Veränderlichen x und y zusammenge-
tellt für die Funktion $y = x^2$:

$x =$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y =$	$\cdots$	16	9	4	1	0	1	4	9	16	$\cdots$

Trägt man die verschiedenen Werte von x als Abscissen
nd die von y als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinaten-
ystem ein, so erhält man eine Reihe von Punkten (Fig. 1),
elche der gegebenen Funk-
on entsprechen. Werden diese
unkte durch einen freien Kur-
enzug verbunden, so entspricht
ie entstehende Kurve der ge-
ebenen Funktion. Der Glei-
jung $y = x^2$ entspricht die in
ig. 1 gezeichnete Parabel. Die
unktion $y = \sqrt{16 - x^2}$ liefert
nen Kreis mit dem Radius
$= 4$ (Fig. 2), $y = \sin x$ eine
Vellenlinie (Fig. 3), $y = \operatorname{tang} x$
ne Kurve, welche aus unend-
ch vielen kongruenten Teilen

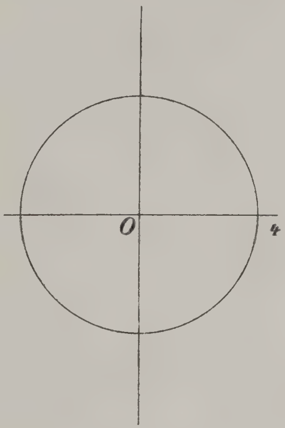


Fig. 2.

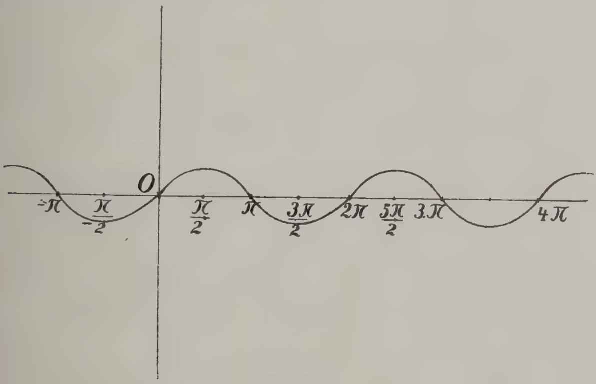


Fig. 3.

besteht (Fig. 4). In gleicher Weise lassen sich von ähnlichen Funktionen auf Grund einer tabellarischen Zusammenstellung die Zeichnungen entwerfen.

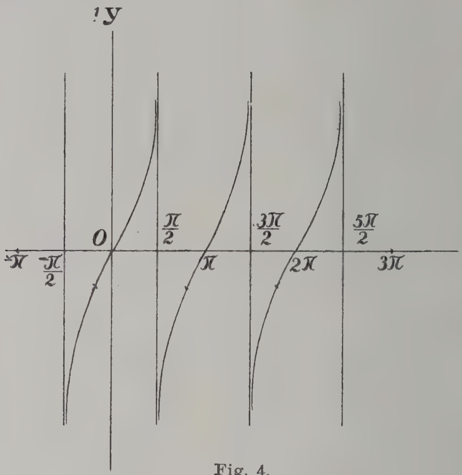


Fig. 4.

§ 2. **Der Differentialquotient.**

Die beliebige Funktion $y = f(x)$ sei durch eine Kurv *UVW* (Fig. 5) dargestellt. Die Koordinaten eines beliebi gewählten Punktes P un eines benachbarten Punk tes P_1 auf dieser Kurv genügen alsdann de Funktionsgleichung; e ist also auch $y_1 = f(x_1$ Die Sekante PP_1 bild mit der positiven Seit der X-Achse den Winkel dann ist auch $\sphericalangle P_1PC =$ also wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1C}{PC} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Man bezeichnet $y_1 - y$ m

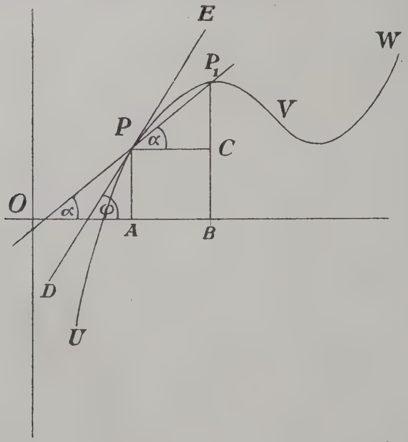


Fig. 5.

Δy und $x_1 - x$ mit Δx und nennt Δy den Zuwachs, den y erfährt, wenn man von einem Punkte P zu einem benachbarten Punkte P_1 übergeht. Ebenso ist Δx der Zuwachs von x. Es wird also $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Rückt nun der Punkt P_1 auf der Kurve näher und näher, schließlich unendlich nahe an P heran, so dreht sich die Sekante um den Punkt P und geht schließlich in die Tangente DE des Punktes P über. Dabei werden Δy und Δx allmählich immer kleiner und gehen zuletzt in unendlich kleine Größen über, die man mit dy und dx bezeichnet und die Differentiale von y und x nennt. Δy war also ein endlicher Zuwachs von y, das Differential dy ist dagegen ein unendlich kleiner Zuwachs von y, welcher im Vergleich mit einer endlichen Größe gleich Null ist. Man hat also $dy = \lim \Delta y$, d. h. gleich dem Grenzwert (limes), in welchen das endliche Δy übergeht, wenn P_1 mit P zusammenfällt. Ebenso ist $dx = \lim \Delta x$.

Bildet die Tangente DE den Winkel φ mit der positiven Seite der X-Achse, so wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

das soll heißen: Wenn P_1 mit P zusammenfällt, wird Δy zu dy, Δx zu dx und Winkel α zum Winkel φ. Man nennt $\frac{dy}{dx}$ den Differentialquotienten von y nach x und hat somit den

Lehrsatz: Der Differentialquotient ist gleich dem Tangens des Winkels, welchen die Tangente eines beliebigen Punktes der Kurve mit der positiven Seite der X-Achse bildet.

In Fig. 5 ist $x = OA$; $\Delta x = AB$; $x_1 = OB = x + \Delta x$. Ferner ist $y = PA$; $\Delta y = P_1C$; $y_1 = P_1B = y + \Delta y$. Ist nun $y = f(x)$, so ist $y_1 = f(x_1) = f(x + \Delta x)$; andererseits ist $y_1 = y + \Delta y$ $= f(x) + \Delta f(x)$; folglich drittens $P_1B = y_1 = f(x + \Delta x)$ $= f(x) + \Delta f(x)$.

Man findet dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Da $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ ist, so erhält man auch, wenn ma zum Grenzwert übergeht:

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx,$$

d. h. man darf mit einem Differential dx wie mit einem en lichen Faktor multiplizieren.

§ 3. Differentiieren einfacher algebraischer Funktionen.

1. Regel: Konstante Summanden verschwinden beim Di ferentiieren.

Voraussetzung: $y = f(x) + a$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$.

Beweis: Es ist $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{[f(x_1) + a] - [f(x) +}{\Delta x}$

$$= \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(}{\Delta x}$$
$$= \frac{df(x)}{dx}.$$

2. Regel: Konstante Faktoren bleiben unverändert.

Voraussetzung: $y = a \cdot f(x)$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{df(x)}{dx}$.

Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{a \cdot f(x_1) - a \cdot f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim a \cdot \frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x} = \lim a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f}{\Delta x}$$
$$= a \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

3. Regel: Man differentiiert eine Summe, indem man Summanden einzeln differentiiert und die einzelnen Differenti quotienten addiert.

Voraussetzung: $y = f(x) \pm \varphi(x)$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{d\varphi(x)}{dx}$.

Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{[f(x_1) \pm \varphi(x_1)] - [f(x) \pm \varphi(x)]}{\Delta x}$

$$= \lim \left[\frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

4. Regel: Man differentiiert eine Potenz, indem man den Exponenten mit einer Potenz multipliziert, deren Exponent um 1 kleiner ist als in der gegebenen Potenz.

Voraussetzung: $y = x^n$; n eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$.

Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{x_1^{\,n} - x^n}{\Delta x} = \lim \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{x^n \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{x^n \cdot \left[1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \binom{n}{3} \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \cdots\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot \Delta x \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot (\Delta x)^2 \cdot x^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot (\Delta x)^3 \cdot x^{n-3} + \cdots - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim \left[\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot \Delta x \cdot x^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot (\Delta x)^2 \cdot x^{n-3} + \cdots\right]$$

$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1}$, wenn man zum Grenzwert übergeht, d. h. wenn Δx unendlich klein wird.

Also $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$; $dy = n \cdot x^{n-1} \cdot dx$.

Beispiele:

1) $y = 3x^3 - x^2 + 5x - 7$; $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 2x + 5$;

$$dy = (9x^2 - 2x + 5) \cdot d$$

2) $y = \frac{4}{x^2} = 4 \cdot x^{-2}$; $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{8}{x^3}$; $dy = -\frac{8}{x^3} \cdot d$

3) $y = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$; $dy = \frac{3 \cdot dx}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$.

§ 4. Differentiieren zusammengesetzter algebraischer Funktionen.

1. Regel: Ein Produkt wird differentiiert, indem man d ersten Faktor mit dem Differentialquotienten des zweiten u den zweiten Faktor mit dem Differentialquotienten des erst Faktors multipliziert und die entstehenden Produkte addiert

Voraussetzung: $y = f(x) \cdot \varphi(x)$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$.

1. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x_1) \cdot \varphi(x_1) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x+\Delta x) \cdot \varphi(x+\Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x+\Delta x) + f(x) \cdot \varphi(x+\Delta x) - f(x}{\Delta x}$$

$$= \lim \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \varphi(x + \Delta x) + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \cdot f(x)\right.$$

$= \frac{df(x)}{dx} \cdot \varphi(x) + \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot f(x)$; denn im Faktor $\varphi(x + \Delta x)$ v schwindet Δx gegenüber x, wenn man zur Gre übergeht.

2. Beweis: Es war soeben

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Nun ist nach § 2: $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$ und

$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Delta \varphi(x)$; folg

$$\frac{ly}{lx} = \lim \frac{[f(x) + \Delta f(x)] \cdot [\varphi(x) + \Delta \varphi(x)] - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \Delta \varphi(x) + \varphi(x) \cdot \Delta f(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \left[f(x) \cdot \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} + \varphi(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \Delta f(x) \cdot \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}\right].$$

Geht man zum Grenzwert über, so wird $\lim \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, im $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$ und $\lim \Delta f(x) = df(x)$. Da dieser Faktor es dritten Gliedes unendlich klein wird, so wird das ganze ritte Glied $= 0$; also bleibt

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Beispiel:

$$y = (x^2 - 5) \cdot (2x^3 - 2x + 3);$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 5) \cdot \frac{d(2x^3 - 2x + 3)}{dx} + (2x^3 - 2x + 3) \cdot \frac{d(x^2 - 5)}{dx}$$

$$= (x^2 - 5) \cdot (6x^2 - 2) + (2x^3 - 2x + 3) \cdot 2x$$

$$= 10x^4 - 36x^2 + 6x + 10.$$

Multipliziert man das Produkt $y = (x^2 - 5) \cdot (2x^2 - 2x + 3)$ us, so wird

$$y = 2x^5 - 12x^3 + 3x^2 + 10x - 15;$$

lglich nach § 3, 3

$$\frac{y}{x} = 10x^4 - 36x^2 + 6x + 10; \quad dy = (10x^4 - 36x^2 + 6x + 10) \cdot dx.$$

2. Regel: Ein Bruch wird differentiiert, indem man den enner mit dem Differentialquotienten des Zählers, den Zähler it dem des Nenners multipliziert, das zweite Produkt vom sten subtrahiert und die Differenz durch das Quadrat des enners dividiert.

Voraussetzung: $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} - f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}}{[\varphi(x)]^2}$.

1. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\dfrac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} - \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{f(x)+\Delta f(x)}{\varphi(x)+\Delta\varphi(x)} - \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x)\cdot\varphi(x) + \varphi(x)\cdot\Delta f(x) - f(x)\cdot\varphi(x) - f(x)\cdot\Delta\varphi}{\varphi(x)\cdot[\varphi(x)+\Delta\varphi(x)]\cdot\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\varphi(x)\cdot\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f(x)\cdot\dfrac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}}{\varphi(x)\cdot[\varphi(x)+\Delta\varphi(x)]}.$$

Geht man zum Grenzwert über, so verschwindet im Nenn $\Delta\varphi(x)$ gegenüber $\varphi(x)$, also erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)\cdot\dfrac{df(x)}{dx} - f(x)\cdot\dfrac{d\varphi(x)}{dx}}{[\varphi(x)]^2}.$$

2. Beweis: Ist $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, so wird $f(x) = y\cdot\varphi(x)$; folgl nach der ersten Regel

$$\frac{df(x)}{dx} = y\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{df(x)}{dx} - y\cdot\dfrac{d\varphi(x)}{dx}}{\varphi(x)}$$

$$= \frac{\dfrac{df(x)}{dx} - \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\dfrac{d\varphi(x)}{dx}}{\varphi(x)}$$

$$= \frac{\varphi(x)\cdot\dfrac{df(x)}{dx} - f(x)\cdot\dfrac{d\varphi(x)}{dx}}{[\varphi(x)]^2},$$

Beispiele:

1) $\qquad y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 4};$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)\cdot\frac{d(x^2-3)}{dx} - (x^2-3)\cdot\frac{d(x-4)}{dx}}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{(x-4)\cdot 2x - (x^2-3)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2-8x+3}{x^2-8x+16};$$

$$dy = \frac{x^2-8x+3}{x^2-8x+16}\cdot dx.$$

2) $y = x^{-n}$ (vergl. § 3, 4) $= \frac{1}{x^n}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n\cdot\frac{d(1)}{dx} - 1\cdot\frac{d(x^n)}{dx}}{(x^n)^2}.$$ Da $\frac{d(1)}{dx} = 0$, so

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\cdot x^{-n-1}.$$

3. Regel: Differentiieren einer Funktion von einer Funktion: Ist y eine Funktion von u und u eine Funktion von x, o findet man den Differentialquotienten von y nach x, indem nan y nach u und u nach x differentiiert und die beiden)ifferentialquotienten multipliziert.

Voraussetzung: $y = f(u)$; $u = \varphi(x)$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim\frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim\frac{f(u_1) - f(u)}{\Delta x}$

$$= \lim\frac{f(u_1) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Geht man zum Grenzwert über, so wird der erste Faktor ı $\frac{df(u)}{du}$ oder zu $\frac{dy}{dx}$, der zweite zu $\frac{du}{dx}$.

Also entsteht schließlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Beispiele: 1) $y = x^{\frac{p}{q}}$, folglich $y^q = x^p$ und

$$\frac{d(y^q)}{dx} = \frac{d(x^p)}{dx} \text{ oder}$$

$$\frac{d(y^q)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1} \text{ oder } q \cdot y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot y^{q-1}} = \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}$$

$$= \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \qquad \text{(vergl. § 3, 4).}$$

2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$. Ich setze $u = x^2 - 2x$, so ist

$y = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(u^{\frac{1}{3}}\right)}{dx} = \frac{d\left(u^{\frac{1}{3}}\right)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \tfrac{1}{3} \cdot u^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 2)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}}.$$

§ 5. Differentiieren trigonometrischer Funktionen.

Lehrsatz: Der Grenzwert, in welchen $\frac{\sin x}{x}$ für $x = 0$ üb geht, ist $= 1$.

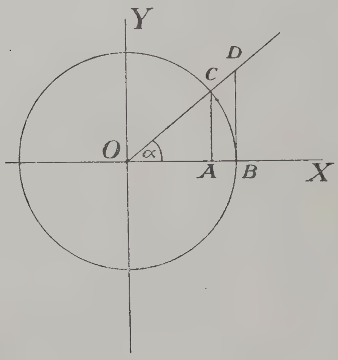


Fig. 6.

1. Beweis: Der Radius Kreises (Fig. 6) sei $= 1$, so $\sin \alpha = CA$; $\sphericalangle \alpha = \widehat{CB}$; $\operatorname{tg} \alpha = B$ Man erhält also

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{CA}{\widehat{CB}}.$$

Dieser Bruch ist ein ech Bruch; denn die Senkrechte ist kleiner als der Bogen Wenn der Winkel α klei wird, dann wird der Untersch

zwischen der Senkrechten und dem Bogen immer geringer, d. h. der Wert des Bruches wird größer, muß aber kleiner als 1 bleiben. Wird $\sphericalangle \alpha$ schließlich gleich Null, so fallen die (unendlich klein gewordenen) Größen CA und $\widehat{CB}$ zusammen, d. h. der Bruch wird $= 1$; also

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

2. Beweis: Für einen beliebigen Wert von α ist (Fig. 6)

$$CA < \widehat{CB} < DB \text{ oder}$$

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha; \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ und}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ oder}$$

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha.$$

Nimmt α ab bis 0, so wird $\cos \alpha = 1$ und der Quotient $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ liegt zwischen einer oberen Grenze 1 und einer unteren Grenze 1, muß also selbst $= 1$ sein, d. h.

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

3. Beweis: Es ist (Fig. 6)

$$\triangle\, OCA < \text{Sektor } OCB < \triangle\, OBD \text{ oder}$$

$$\frac{OA \cdot AC}{2} < \frac{r^2 \cdot \alpha}{2} < \frac{OB \cdot BD}{2}.$$

Nun ist $r = OB = 1$ und $\cos \alpha = OA$; folglich

$$\cos \alpha \cdot \sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha.$$

Wird $\alpha = 0$, so $\dfrac{1}{\cos\alpha} = 1$ und $\cos\alpha = 1$, d. h.

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

a) Voraussetzung: $y = \sin x$.

Behauptung: $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$.

1. Beweis: $\dfrac{dy}{dx} = \lim \dfrac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \dfrac{\sin x_1 - \sin x}{\Delta x}$

$$= \lim \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{2 \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Geht man zum Grenzwert über, so verschwindet im erst[en] Faktor $\dfrac{\Delta x}{2}$ gegenüber x, und $\dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ wird gleich 1.

Also $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ und $dy = \cos x \cdot dx$.

2. Beweis:

Eben war $\dfrac{dy}{dx} = \lim \dfrac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}.$$

Wird nun $\Delta x = 0$, so $\cos \Delta x = 1$, und es hebt sich da[nn] das erste gegen das letzte Glied; es bleibt

$$\frac{dy}{dx} = \lim \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x.$$

b) Voraussetzung: $y = \cos x$.

Behauptung: $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$.

1. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\cos x_1 - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim \frac{-[\cos x - \cos(x + \Delta x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{-2 \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$= - \sin x$ (wie bei a, 1).

2. Beweis:

Es war $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$

$$= \lim \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x}.$$

Nun ist wieder $\lim \cos \Delta x = 1$, so daß sich im Grenzfalle das erste gegen das letzte Glied hebt; es bleibt

$$\frac{dy}{dx} = \lim\left(-\sin x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right)$$

$$= -\sin x;$$

$$dy = -\sin x \cdot dx.$$

c) Voraussetzung: $y = \operatorname{tg} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

1. Beweis: Es ist $y = \frac{\sin x}{\cos x}$; folglich nach § 4, 2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \cdot \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{oder}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} \Delta x}{(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim \frac{\sin \Delta x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin \Delta x}{(\cos \Delta x - \operatorname{tg} x \cdot \sin \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\cos \Delta x - \operatorname{tg} x \cdot \sin \Delta x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Im Grenzfalle wird $\cos \Delta x = 1$, $\sin \Delta x = 0$ und $\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} =$ also

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$dy = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx.$$

d) Voraussetzung: $y = \operatorname{cotg} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$.

1. Beweis: $y = \frac{\cos x}{\sin x}$; folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cdot \dfrac{d \cos x}{dx} - \cos x \cdot \dfrac{d \sin x}{dx}}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -1 - \operatorname{cotg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\operatorname{cotg} x_1 - \operatorname{cotg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{cotg}(x + \Delta x) - \operatorname{cotg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} \Delta x - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \Delta x} - \operatorname{cotg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} \Delta x - 1 - \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} \Delta x}{(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim \frac{-1 - \operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{cotg} x \cdot \sin \Delta x + \cos \Delta x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x},$$

enn man mit $\sin \Delta x$ erweitert.

Nun ist $\lim \cos \Delta x = 1$, $\lim \sin \Delta x = 0$ und $\lim \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$;
lglich

$$\frac{dy}{dx} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$dy = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \cdot dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

§ 6. Differentiieren der Kreisfunktionen.

Ist $m = \sin \alpha$, so ist α der Bogen, dessen Sinus gleich m
. Man schreibt hierfür kurz $\alpha = \arcsin m$ und nennt diese
nktion eine Kreis- oder zyklometrische Funktion.

a) Voraussetzung: $y = \arcsin x$.

Behauptung: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Beweis: Wenn $y = \arcsin x$ ist, so wird $x = \sin y$; folglich

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d \sin y}{dx} = \frac{d \sin y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) Voraussetzung: $y = \arccos x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Beweis: Es wird $x = \cos y$; folglich

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d\cos y}{dx} = \frac{d\cos y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c) Voraussetzung: $y = \operatorname{arctg} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Beweis: Es ist $x = \operatorname{tg} y$; folglich

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d\operatorname{tg} y}{dx} = \frac{d\operatorname{tg} y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = (1 + \operatorname{tg}^2 y) \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}.$$

d) Voraussetzung: $y = \operatorname{arccotg} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$.

Beweis: Es ist $x = \operatorname{cotg} y$; folglich

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d\operatorname{cotg} y}{dx} = \frac{d\operatorname{cotg} y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = -(1 + \operatorname{cotg}^2 y) \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$dy = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

§7. Differentiieren der Exponential- und der logarithmischen Funktionen.

Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man, wenn x ein echter Bruch ist, für jeden Wert von n:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}\cdot x + \binom{n}{2}\cdot x^2 + \binom{n}{3}\cdot x^3 + \cdots.$$

Nehme ich $n > 1$ und $x = \frac{1}{n}$, so entsteht:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

Wenn n jetzt bis ins Unendliche wächst, so werden die Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \cdots$ einzeln $= 0$.

Also entsteht

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

Man bezeichnet die entstehende Konstante mit e; ihr Wert ist 2,7182818 . .; e ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Man hat somit $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Hieraus folgt:

$$e^x = \lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = \lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}\right]$$

$$= \lim_{n=\infty}\left[1 + \binom{nx}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{nx}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{nx}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots\right]$$

$$= \lim_{n=\infty}\left[1 + x + \frac{x\cdot\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{x\cdot\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert für jeden endlichen Wert von x denn der Quotient

$$\frac{x^k}{k!} : \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{x}{k}$$

wird, wenn k ins Unendliche wächst, $= 0$, also kleiner als 1 Die Funktion e^x heißt Exponentialfunktion.

a) Voraussetzung: $y = e^x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = e^x$.

1. Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{e^{x_1} - e^x}{\Delta^x}$

$$= \lim \frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta^x}$$

$$= \lim \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta^x}$$

$$= \lim \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Nun ist $e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots$; folglich en steht:

$$\frac{dy}{dx} = \lim e^x \cdot \frac{1 + \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim e^x \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{2!} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \cdots\right)$$

$$= e^x;$$

$$dy = e^x \cdot dx.$$

2. Beweis: Wenn man die Reihe

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

gliedweise differentiiert, erhält man nach § 3, 3 und 4:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= e^x.$$

b) Voraussetzung: $y = a^x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{\log a}{\log e} \cdot a^x = \log \text{nat}\, a \cdot a^x.$

Beweis: Es sei $a = e^m$, so wird bei beliebiger Basis des Logarithmensystems $\log a = m \cdot \log e$, also

$$m = \frac{\log a}{\log e}.$$

Nimmt man e als Basis des Systems, so entsteht, da $\overset{e}{\log}\, e = 1$ ist, $m = \overset{e}{\log}\, a = \log \text{nat}\, a = \ln a.$

Man erhält nun $y = (e^m)^x = e^{mx}$. Setze ich $u = mx$, so ist $y = e^u$ also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{dx} = \frac{d(e^u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= e^u \cdot m; \text{ folglich}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot m = a^x \cdot \ln a.$$

$$dy = \ln a \cdot a^x \cdot dx.$$

c) Voraussetzung: $y = \ln x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$

1. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\ln x_1 - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\ln (x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Setze ich $\frac{x}{\Delta x} = n$, also $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$, so ist, da Δx im Ver-
gleich mit x sehr klein genommen werden kann, n größer als 1
Wird dann beim Übergang zum Grenzwert Δx unendlich
klein, so wird $n = \infty$ und $\lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Folglich entsteht $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$;

$$\text{also } dy = \frac{dx}{x}.$$

2. Beweis: Wenn $y = \ln x$ ist, so wird

$$x = e^y; \text{ folglich}$$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d(e^y)}{dx} = \frac{d(e^y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = e^y \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

d) Voraussetzung: $y = \overset{a}{\log} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$.

Beweis: Man erhält aus $y = \overset{a}{\log} x$

$$x = a^y; \text{ folglich}$$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d(a^y)}{dx} = \frac{d(a^y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = \ln a \cdot a^y \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x};$$

$$dy = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{dx}{x} \text{ oder} = \log e \cdot \frac{dx}{x}.$$

(In § 7, b war gefunden, daß $\frac{\log a}{\log e} = \ln a$ ist. Nimmt m[an]
auf der linken Seite a als Basis, so wird

$$\frac{1}{\overset{a}{\log} e} = \ln a \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\ln a} = \overset{a}{\log} e.)$$

Beispiele: 1) Es sei $y = u \cdot v$; u und v seien Funktionen on x. Dann ist

$$\ln y = \ln u + \ln v; \quad \text{folglich}$$

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(\ln u)}{dx} + \frac{d(\ln v)}{dx} \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(\ln y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d(\ln v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx}; \quad \text{also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{y}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{(entsprechend § 4, 1).}$$

[ultipliziert man mit dx, so folgt

$$dy = v \cdot du + u \cdot dv \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{v \cdot du}{y} + \frac{u \cdot dv}{y} \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

2) $y = u \cdot v \cdot w$, folglich durch Logarithmieren

$\ln y = \ln u + \ln v + \ln w$ und durch Differentiieren:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}.$$

3) $y = \frac{u}{v}$, folglich durch Logarithmieren

$\ln y = \ln u - \ln v$ und durch Differentiieren:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v},$$

$$dy = \frac{y}{u} \cdot du - \frac{y}{v} \cdot dv$$

$$= \frac{1}{v} \cdot du - \frac{u}{v^2} \cdot dv$$

$$= \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{(entsprechend § 4, 2).}$$

§ 8. Höhere Differentialquotienten. Maclaurinsche un Taylorsche Reihe.

1) Ist $y = f(x)$ gegeben, so erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ allgemeinen wieder als eine Funktion von x, die man kurz y' oder mit $f'(x)$ zu bezeichnen pflegt und welche auch e Ableitung oder Derivierte genannt wird. Differentiiert n diese neue Funktion $y' = f'(x)$ nochmals, so erhält man 2. Differentialquotienten oder die 2. Ableitung oder Derivie $y'' = f''(x)$. In gleicher Weise entstehen die höheren leitungen y''', $y^{\mathrm{IV}} \cdots$. Man schreibt den 2. Differentialquotien $\frac{d^2y}{dx^2}$, den 3. $\frac{d^3y}{dx^3} \cdots$.

2) Ist z. B. eine ganze rationale Funktion vom n-ten Gr gegeben:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots + a_n \cdot x^n,$$

so erhält man

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + \cdots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot a_4 \cdot x^2 + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n}$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 \cdot x + \cdots + (n-2)(n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n}$$

Schließlich $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = n! \cdot a_n$.

Die $(n+1)$-te Ableitung und alle folgenden werden =

Setzt man in den erhaltenen Gleichungen überall $x =$ so wird $f(0) = a_0$; $f'(0) = a_1$; $f''(0) = 2a_2$; $f'''(0) = 3! \cdot$ $f^{\mathrm{IV}}(x) = 4! \cdot a_4$; $\cdots f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$; folglich

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!};\quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!};\quad a_4 = \frac{f^{\mathrm{IV}}(0)}{4!} \cdots;\quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Somit läßt sich die gegebene Funktion schreiben in der For

$$y = f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot$$

3) Nimmt man an, daß sich eine Funktion $y = f(x)$ in ne Reihe entwickeln läßt, z. B.

$$y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots + \text{ in inf.},$$

wird wieder $f(0) = a_0$, und die übrigen Koeffizienten lassen ch wie oben durch die höheren Differentialquotienten beimmen. Man erhält

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \cdots \text{ in inf.}$$

iese Reihe heißt die Maclaurinsche Reihe.

4) Angenommen, die Funktion $f(x+h)$ lasse sich nach otenzen von h in eine Reihe entwickeln, es sei

$$f(x+h) = a_0 + a_1 \cdot h + a_2 \cdot h^2 + h_3 \cdot h^3 + \cdots; \quad \text{dann ist}$$
$$f(x) \quad = a_0 .$$

urch Differentiieren erhält man, wenn $u = x + h$ gesetzt wird:

$$\frac{df(x+h)}{dh} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dh} = f'(u) \cdot \frac{du}{dh} = f'(u) = f'(x+h)$$
$$= a_1 + 2a_2 \cdot h + 3a_3 \cdot h^2 + \cdots;$$

rner

$$f''(x+h) = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot h + \cdots,$$
$$f'''(x+h) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots \quad \text{usw.}$$

tzt man überall $h = 0$, so wird

$$a_1 = f'(x); \quad a_2 = \frac{f''(x)}{2!}; \quad a_3 = \frac{f'''(x)}{3!} \cdots;$$

lglich

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \cdot h^3 + \cdots.$$

Diese letztere Reihe heißt die Taylorsche Reihe.

Beispiele: 1) Es sei $y = f(x) = e^x$; dann ist

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = e^x;$$

lglich

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = 1;$$

so entsteht nach der Maclaurinschen Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{(entsprechend § 7).}$$

2) Es sei $y = \sin x$; dann ist

$$f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\sin x;$$
$$f'''(x) = -\cos x; \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x \cdots;$$

hieraus folgt:

$$f(0) = 0; \; f'(0) = 1; \; f''(0) = 0; \; f'''(0) = -1; \; f^{\mathrm{IV}}(0) = 0.$$

Also wird

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots.$$

Die Reihe konvergiert für jeden Wert von x.

3) Es sei $y = \cos x$; dann ist

$$f'(x) = -\sin x; \quad f''(x) = -\cos x;$$
$$f'''(x) = \sin x; \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos x \cdots;$$

folglich

$$f(0) = 1; \; f'(0) = 0; \; f''(0) = -1; \; f'''(0) = 0; \; f^{\mathrm{IV}}(0) = 1.$$

Also wird

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots.$$

Die Reihe konvergiert für jeden Wert von x.

4) Es sei $y = \ln(1 + x)$; dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = \frac{d\,\frac{1}{1+x}}{dx} = \frac{d(1+x)^{-1}}{dx} = \frac{du^{-1}}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(wenn man $1 + x = u$ setzt)

$$= -1 \cdot u^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

Ebenso erhält man

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \cdots.$$

Folglich wird

$$f(0) = \ln 1 = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = -1;$$
$$f'''(0) = 2; \quad f^{\mathrm{IV}}(0) = -3! \quad \text{usw.}$$

Also entsteht

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert, wenn $-1 < x < 1$ ist.

Man hätte die letzte Funktion auch nach der Taylorschen eihe entwickeln können.

9. Maxima und Minima. Inflexionspunkte. Unbestimmte Ausdrücke.

1) Die Funktion $y=f(x)$ sei durch die Kurve in Fig. 7 ırgestellt. Legt man in einem beliebigen Punkte P_1 die

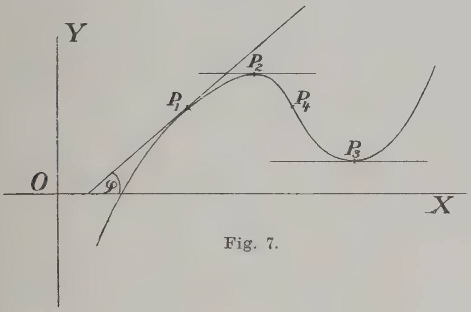


Fig. 7.

ıngente an die Kurve, welche mit der positiven Seite der -Achse den Winkel φ bildet, so ist nach § 2:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Bei P_2 hat die Kurve einen höchsten Punkt, ein Maximum, reicht. Hier ist die Tangente der X-Achse parallel, sie bildet it der X-Achse einen Winkel von 0^0; also wird hier $\operatorname{tg}\varphi=0$. asselbe gilt für die Tangente im tiefsten Punkte P_3, der ein inimum der Kurve anzeigt. Die Kurve und damit auch die ınktion $y=f(x)$ hat folglich an den Stellen ein Maximum er ein Minimum, wo $\operatorname{tg}\varphi$ oder der erste Differentialquotient eich Null wird. Um zu entscheiden, ob an diesen Stellen s Eine oder das Andere eintritt, muß man den zweiten ifferentialquotienten benutzen.

Da $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, so wird in derlben Weise

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \lim \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Nun entsteht $f'(x + \Delta x)$ aus $f'(x)$, wenn man $(x + \Delta x)$ fü
einsetzt, d. h.

$$f'(x + \Delta x) = \lim \frac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x};$$

folglich

$$f''(x) = \lim \frac{\dfrac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} - \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x + 2\Delta x) - 2 \cdot f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2}.$$

Bei den beiden Kurven in Fig. 8a und 8b sei

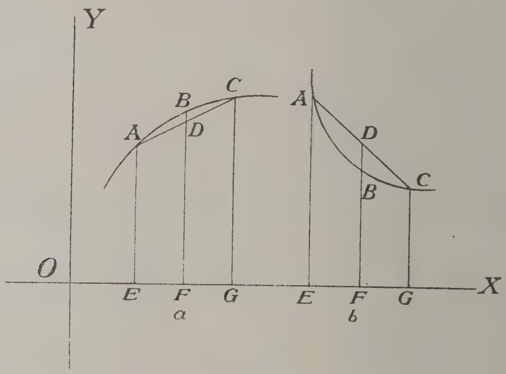


Fig. 8.

$$OE = x; \quad EF = FG = \Delta x,$$

so ist

$$AE = f(x); \; BF = f(x + \Delta x); \; CG = f(x + 2\Delta x).$$

Nun ist

$$DF = \frac{AE + CG}{2} = \frac{f(x) + f(x + 2\Delta x)}{2};$$

folglich

$$DF - BF = \frac{f(x) + f(x + 2\Delta x)}{2} - f(x + \Delta x)$$

$$= \frac{f(x + 2\Delta x) - 2 \cdot f(x + \Delta x) + f(x)}{2}.$$

ese Differenz $DF - BF$ ändert das Vorzeichen nicht beim altiplizieren mit 2 und beim Dividieren mit $(\Delta x)^2$ und auch nn nicht, wenn man nachher zum Grenzwert übergeht, d. h. nn schließlich Δx unendlich klein wird. Durch diese Operionen erhält man aber den obigen Ausdruck für $f''(x)$. Sot muß das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten mit m Vorzeichen der Differenz $DF - BF$ übereinstimmen Bei r konkaven Kurve (Fig. 8a) ist die Differenz negativ, bei : konvexen (Fig. 8b) positiv. Wenn folglich der zweite fferentialquotient negativ ist, muß die Kurve konkav, wenn positiv ist, konvex sein.

Ein Maximum kann nur bei konkaver Krümmung, ein nimum nur bei konvexer Krümmung eintreten (wobei die ümmung von unten her zu betrachten ist). Somit ergibt h folgende Regel zur Bestimmung eines Maximums oder nimums:

Ein Maximum befindet sich da, wo der erste Differentialotient $= 0$ und der zweite Differentialquotient negativ ist; Minimum ist da vorhanden, wo der erste Differentialquotient 0 und der zweite positiv ist.

2) Wie verhält sich nun die Kurve an einer Stelle, wo zweite Differentialquotient $= 0$ ist? Hier kann die Kurve der konkav noch konvex sein, sie muß vielmehr aus der kaven in die konvexe Krümmung (oder umgekehrt) überen; an dieser Stelle befindet sich ein Inflexions- oder Wendeikt (P_4 in Fig. 7). Also ergibt sich die weitere Regel:

Ein Inflexionspunkt liegt da, wo der zweite Differentialotient $= 0$ wird.

Beispiel: Wo hat die Funktion $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ein ximum, ein Minimum oder einen Inflexionspunkt?

Auflösung: Man erhält

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 12x^2 - 24x \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 24x - 24.$$

Setzt man den ersten Differentialquotienten $= 0$, so e
steht $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

Für $x_1 = 0$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -24$;

für $x_2 = 2$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 72$, und

für $x_3 = -1$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 36$.

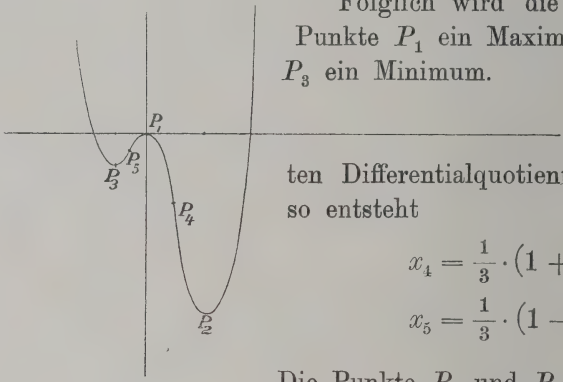


Fig. 9.

Folglich wird die Funktion b
Punkte P_1 ein Maximum, bei P_2
P_3 ein Minimum.

Setze ich
ner den zw
ten Differentialquotienten gleich N
so entsteht

$$x_4 = \frac{1}{3} \cdot (1 + \sqrt{7}) \quad \text{und}$$

$$x_5 = \frac{1}{3} \cdot (1 - \sqrt{7}).$$

Die Punkte P_4 und P_5 sind Inflexi
punkte. Fig. 9 gibt ein Bild der Ku
wobei die Ordinaten auf ein Fünftel verkürzt sind.

3) Die Fnnktion $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ gehe für $x = a$ in den un
stimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ über, d. h. es sei $f(a) = 0$ und $\varphi(a) =$
Entwickelt man die Funktion $f(a + h)$ nach der Taylorsc
Reihe, so ergibt sich:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots$$

Ebenso

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a) \cdot h + \frac{\varphi''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{\varphi'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots$$

Da nun $f(a) = \varphi(a) = 0$ ist, so wird

$$\frac{f(a + h)}{\varphi(a + h)} = \frac{f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots}{\varphi'(a) \cdot h + \frac{\varphi''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{\varphi'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots}.$$

Wenn man nun durch h hebt und darauf h unendlich in werden läßt, erhält man

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Hieraus ergibt sich die Regel zur Bestimmung des unbe- nmten Ausdrucks $\frac{0}{0}$:

Man sucht vom Zähler und vom Nenner der gegebenen nktion den ersten Differentialquotienten, setzt $x = a$ ein und idiert die erhaltenen Ausdrücke.

Sollte der neue Quotient wieder die Form $\frac{0}{0}$ haben, so andelt man ihn ebenso wie die gegebene Funktion, d. h. n bildet die zweiten Differentialquotienten, setzt hierin $x = a$ l dividiert.

Auch folgende Überlegung führt zu demselben Resultat:

Es ist $f(a) = \lim f(a + \Delta a)$ und da $f(a) = 0$ ist, so wird h

$$f(a) = \lim\, [f(a + \Delta a) - f(a)]; \text{ ebenso ist}$$

$$\varphi(a) = \lim\, [\varphi(a + \Delta a) - \varphi(a)].$$

glich

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \lim \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\varphi(a + \Delta a) - \varphi(a)},$$

wenn man Zähler und Nenner durch Δa dividiert:

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \lim \frac{\frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a}}{\frac{\varphi(a + \Delta a) - \varphi(a)}{\Delta a}}.$$

Im Grenzfalle wird der Zähler zu $f'(a)$, der Nenner zu $\imath)$; also

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Beispiel: Welchen Wert hat $y = \frac{x^5 - a^5}{x^2 - a^2}$ für $x = a$?

Auflösung: Es ist $f(x) = x^5 - a^5$, folglich

$$f'(x) = 5 \cdot x^4 \text{ und}$$

$$f'(a) = 5 \cdot a^4.$$

Ferner ist $\varphi(x) = x^2 - a^2$, folglich
$\varphi'(x) = 2x$ und
$\varphi'(a) = 2a$.

Also wird

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{5a^4}{2a} = \frac{5}{2} \cdot a^3.$$

§ 10. Das Integrieren. Unbestimmtes Integral.

Die Funktion $y = f(x)$ liefert durch Differentiieren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad \text{oder} \quad dy = f'(x) \cdot dx.$$

Nehmen wir nun an, die abgeleitete Funktion $u = f'(x)$ gegeben, so besteht die Aufgabe des Integrierens darin, zugehörige ursprüngliche Funktion $y = f(x)$ zu finden. Es also jetzt $dy = f'(x) \cdot dx$ gegeben, so erhält man umgek $y = f(x) = \int dy = \int f'(x) \cdot dx$ und liest:

$y = f(x)$ ist das Integral von dy oder von $f'(x) \cdot dx$.

Wenn z. B. $y = ax^2 + bx + c$ gegeben ist, so wird

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2ax + b.$$

Wäre nun umgekehrt $dy = f'(x) \cdot dx = (2ax + b)$ gegeben, so würde man als zugehörige ursprüngliche Funk $y = \int (2ax + b) \cdot dx = ax^2 + bx + c$ finden. Differentii und Integrieren sind demnach umgekehrte Operationen, die gegenseitig aufheben. Es ist $y = \int dy = d \int y$, d. h. w man eine Funktion erst differentiiert und das Resultat integr oder umgekehrt, so bleibt sie unverändert.

Die Funktionen $u = f(x)$ und $v = f(x) + C$, die sich durch die Konstante C unterscheiden, liefern beide $du = f'(x)$ und $dv = f'(x) \cdot dx$. Durch Umkehrung erhalte ich für $\int f'(x)$ einmal $\int du = u$ und einmal $\int dv = v$, d. h. dasselbe Inte $\int f'(x) \cdot dx$ kann verschiedene Resultate u und v liefern,

h durch die Größe C unterscheiden. Da C unendlich viele erte haben kann, so gehören zu einer Funktion $f'(x)$ unendh viele Integralfunktionen v, oder das Integral

$\int f'(x) \cdot dx$ ist noch ein unbestimmtes Integral.

n fügt jedem unbestimmten Integral eine „Integrationskonnte“ bei, die in besonderen Fällen besonders bestimmt werden ß. Man erhält z. B.

$$\int n \cdot x^{n-1} \cdot dx = x^n + C; \quad \text{denn}$$

$$\frac{d(x^n + C)}{dx} = n \cdot x^{n-1} \quad \text{oder}$$

$$d(x^n + C) = n \cdot x^{n-1} \cdot dx \quad \text{und}$$

$$\int d(x^n + C) \quad \text{oder} \quad (x^n + C) = \int n \cdot x^{n-1} \cdot dx.$$

Aus den Regeln in § 3 ergibt sich durch Umkehrung:

1. Regel: Man integriert eine Summe, indem man die nmanden einzeln integriert; es ist

$$\int [f(x) + \varphi(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int \varphi(x) \cdot dx.$$

2. Regel: Konstante Faktoren darf man vor das Integralchen setzen; es ist $\int a \cdot f(x) \cdot dx = a \cdot \int f(x) \cdot dx.$

Hat man $dy = x^m \cdot dx$, so ist auch durch Erweitern mit $+ 1)$:

$$dy = \frac{1}{m+1} \cdot (m+1) \cdot x^m \cdot dx.$$

raus ergibt sich $y = \int dy = \int x^m \cdot dx$

$$= \int \frac{1}{m+1} \cdot (m+1) \cdot x^m \cdot dx$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot \int (m+1) \cdot x^m \cdot dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

ß das Resultat richtig ist, wird bestätigt, wenn man rückts differentiiert. Somit folgt weiter die

3. Regel: Will man eine Potenz integrieren, so erweit man mit einer Zahl, die um 1 größer ist als der Expon der Potenz, und integriert dann.

Beispiel: Es sei $dy = (5x^2 - 3x + 4) \cdot dx$, so wird

$$y = \int dy = \int (5x^2 - 3x + 4) \cdot dx$$

$$= \int 5x^2 \cdot dx - \int 3x \cdot dx + \int 4 \cdot dx$$

$$= \frac{5}{3} \int 3x^2 \cdot dx - \frac{3}{2} \cdot \int 2x \cdot dx + 4 \cdot \int dx$$

$$= \frac{5}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 4x + C.$$

§ 11. Integrationsformeln.

Aus den durch Differentiieren in den §§ 2 bis 8 gef denen Formeln ergeben sich durch Umkehrung folgende I grationsformeln:

1) $dy = n \cdot x^{n-1} \cdot dx;$

$$y = \int n \cdot x^{n-1} \cdot dx = x^n + C.$$

2) $dy = -n \cdot x^{-n-1} \cdot dx = -\frac{n}{x^{n+1}} \cdot dx;$

$$y = \int -\frac{n}{x^{n+1}} \cdot dx = x^{-n} + C = \frac{1}{x^n} + C.$$

3) $dy = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \cdot dx;$

$$y = \int \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \cdot dx = x^{\frac{p}{q}} + C = \sqrt[q]{x^p} + C.$$

4) $dy = \cos x \cdot dx;$

$$y = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C.$$

5) $dy = -\sin x \cdot dx;$

$$y = \int -\sin x \cdot dx = \cos x + C.$$

6) $dy = (1 + \mathrm{tg}^2 x) \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx;$

$$y = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x) \cdot dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \mathrm{tg}\, x + C.$$

7) $dy = -(1 + \mathrm{cotg}^2 x) \cdot dx = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx;$

$$y = \int -(1 + \mathrm{cotg}^2 x) \cdot dx = \int -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = \mathrm{cotg}\, x + C.$$

8) $dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx;$

$$y = \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C.$$

9) $dy = -\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx;$

$$y = \int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \arccos x + C.$$

Anmerkung: Es ist $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = -\int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx;$
glich, wenn man die Integrationskonstanten in 8) und 9) C und C_1 unterscheidet:

$$\arcsin x + C = -\arccos x + C_1 \quad \text{und}$$
$$\arcsin x + \arccos x = -C + C_1.$$

n ist $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; denn der Sinus eines Winkels gleich dem Kosinus seines Komplements; $\sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$.
lglich müssen die Konstanten C und C_1 so gewählt werden, ß $-C + C_1 = \frac{\pi}{2}$ ist.

10) $dy = \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx;$

$$y = \int \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx = \mathrm{arctg}\, x + C.$$

11) $dy = -\frac{1}{1 + x^2} \cdot dx;$

$$y = \int -\frac{1}{1 + x^2} \cdot dx = \mathrm{arccotg}\, x + C_1.$$

Anmerkung: Für 10) und 11) gilt dieselbe Bedingung w für 8) und 9), daß arctg x + arccotg $x = \frac{\pi}{2}$; also au $-C + C_1 = \frac{\pi}{2}$.

12) $dy = e^x \cdot dx$;

$$y = \int e^x \cdot dx = e^x + C.$$

13) $dy = \ln a \cdot a^x \cdot dx$;

$$y = \int \ln a \cdot a^x \cdot dx = a^x + C.$$

14) $dy = \frac{1}{x} \cdot dx$;

$$y = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + C.$$

15) $dy = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$;

$$y = \int \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \overset{a}{\log}\, x + C.$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich eine ganze Reihe v Integrationen ausführen. Formelsammlungen liefern weitere B spiele. Manche Funktionen lassen sich allerdings gar nic andere nur mit großen Schwierigkeiten integrieren.

§ 12. Quadratur einer Fläche. Bestimmtes Integral. Rektifikation einer Kurve. Kubatur eines Rotationskörpe

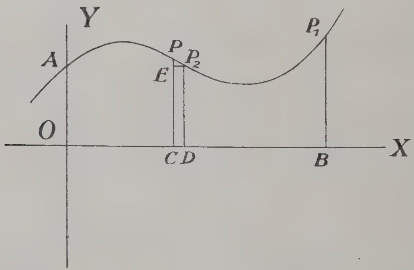


Fig. 10.

1) Die Funktion $y = f$ sei durch eine Kurve d gestellt (Fig. 10). Man z schneide die Fläche OAP durch unendlich viele, u endlich nahe liegende nien, welche der Y-Ac parallel laufen, in une lich schmale Flächenstüc z. B. CDP_2P. Ein solc

ichenstück ist ein unendlich kleiner Zuwachs zu der Fläche APC. Bezeichnet man also $OAPC$ mit F, so ist $CDP_2P = dF$, h. gleich dem Differential von F. Da die Punkte P und unendlich nahe liegen, kann man CDP_2P als ein Rechteck sehen mit der Grundlinie CD und der Höhe CP. Nun ist, ınn P ein beliebiger Punkt der Kurve ist, $OC = x$, folglich $D = dx$; ferner ist $CP = y = f(x)$, folglich ist der Inhalt s Rechtecks $= y \cdot dx = f(x) \cdot dx$.

Also hat man jetzt

$$dF = f(x) \cdot dx.$$

Die ganze Fläche OAP_1B besteht aus unendlich vielen lchen Rechtecken. Durch Addition entsteht die Gesamtche F_{OAP_1B}. Andererseits ist $F = \int dF$; folglich erhält man ch $F = \int f(x) \cdot dx$.

Das Integral ist danach eine Summe aus unendlich vielen, endlich kleinen Teilchen, und das Integralzeichen erklärt sich ; ein in die Länge gezogenes Summenzeichen S.

Differentiieren heißt: Zerlegen in unendlich kleine Teile; tegrieren heißt: Addieren von unendlich vielen, unendlich einen Teilen.

Gelingt es nun, die Integration der Funktion $f(x)$ auszuhren, so ist die Fläche F gefunden, d. h. die Quadratur r Fläche ausgeführt, bis auf eine Konstante C; man muß nächst schreiben:

$$\int f(x) \cdot dx = F + C.$$

2) Man erhält die Fläche OAP_1B, wenn man in der zten Gleichung für x den Wert x_1 einsetzt, und die Fläche AP_2D, wenn man für x den Wert x_2 einsetzt. Es ist

$$\left[\int f(x) \cdot dx\right]_{x=x_1} = F(x_1) + C \quad \text{und}$$

$$\left[\int f(x) \cdot dx\right]_{x=x_2} = F(x_2) + C.$$

Durch Subtrahieren fällt die Integrationskonstante f
und man erhält für das Flächenstück DP_2P_1B:

$$\left[\int f(x)\cdot dx\right]_{x=x_1}-\left[\int f(x)\cdot dx\right]_{x=x_2}=F(x_1)-F(x_2).$$

Man schreibt hierfür kurz:

$$F_{DP_2P_1B}=\int_{x_2}^{x_1} f(x)\cdot dx.$$

Das Integral ist jetzt ein **bestimmtes** Integral, genomm zwischen den Grenzen x_1 und x_2. Fällt der Punkt P_2 mit zusammen, so entsteht

$$F_{OAP_1B}=\int_0^{x_1} f(x)\cdot dx.$$

Regel: Man findet ein bestimmtes Integral, indem m in das unbestimmte Integral für die Veränderliche x erst obere, dann die untere Grenze einsetzt und den zweiten Au druck vom ersten subtrahiert.

3) Bezeichnet man ein beliebiges Bogenstück AP (Fig. 1 mit s, so ist PP_2 ein unendlich kleiner Zuwachs von s, al gleich ds. In dem rechtwinkligen Dreieck PP_2E ist

$$PP_2^2=PE^2+P_2E^2 \text{ oder}$$
$$ds^2=dy^2+dx^2; \text{ folglich}$$
$$ds=\sqrt{dy^2+dx^2}$$
$$=dx\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Also wird $s=\int ds=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx.$

Gelingt es also, diese Integration auszuführen, so ist dan die Länge eines Kurvenbogens bestimmt, also die **Rektif kation** der Kurve ausgeführt.

4) Die Kurve $y=f(x)$ (Fig. 10) rotiere um die X-Achs es soll dann das Volumen des entstehenden Rotationskörpe bestimmt werden.

Denkt man den Körper durch unendlich viele, unendlich ahe liegende Ebenen, welche senkrecht zur X-Achse stehen, ı unendlich viele, unendlich schmale Teile zerschnitten, so ann man wegen der unendlich kleinen Dicke jedes dieser örperteilchen als Zylinder ansehen, dessen Höhe gleich dx, essen Grundflächenradius gleich y, dessen Volumen also $= y^2 \cdot \pi \cdot dx$ ist. Ein einzelner kleiner Zylinder ist ein unıdlich kleiner Zuwachs zu einem Volumen V, also gleich dV; ılglich hat man

$$dV = y^2 \cdot \pi \cdot dx \text{ und}$$

$$V = \int dV = \int y^2 \cdot \pi \cdot dx$$

$$= \int [f(x)]^2 \cdot dx.$$

Man sieht wieder, daß Integrieren nichts anderes ist als n Addieren von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen.

Gelingt die letzte Integration, so ist damit das Volumen s Körpers gefunden, d. h. die Kubatur eines Rotationsörpers ausgeführt.

Beispiele:

1) Quadratur der Parabel.

Auflösung: Für jeden Punkt der Parabel gilt die Gleichung $= 2px$; folglich ist $y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$. Nun ist, wenn an die Fläche OAP_1 (Fig. 11) in ıendlich schmale Rechtecke zerhneidet:

$$dF = y \cdot dx = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx;$$

lglich

$$F = \int \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot \int \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C.$$

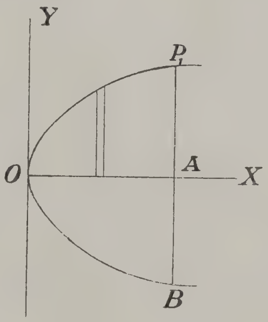


Fig. 11.

Nimmt man das Integral zwischen n Grenzen $x = 0$ und $x = x_1$, so

verschwindet die Integrationskonstante und man erhält das b stimmte Integral

$$F_{OAP} = \int_0^{x_1} \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=x_1} - \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot x_1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot x_1 \cdot \sqrt{x_1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x_1 \cdot \sqrt{2px_1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x_1 \cdot y_1.$$

Folglich wird die ganze Fläche $OBP_1 = \frac{4}{3} x_1 \cdot y_1$.

2) Quadratur der Fläche, welche ein Bogen der Sinu kurve mit der X-Achse bildet.

Auflösung: Es ist $y = \sin x$ (Fig. 12):

$$F = \int y \cdot dx = \int^{\pi} \sin x \cdot dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= [-\cos x]^0_{x=\pi} - [-\cos x]_{x=0}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2 \text{ Quadrat-Einheiten.}$$

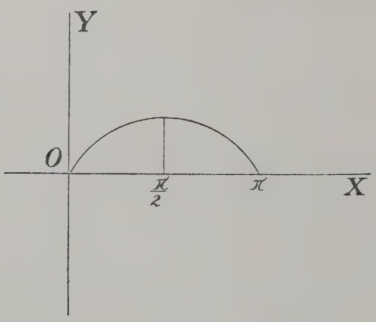


Fig. 12.

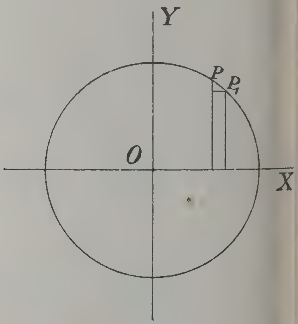


Fig. 13.

3) Rektifikation des Kreises.

Auflösung: Für jeden Punkt der Peripherie (Fig. 13) gilt e Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2;\ \text{also}\ y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{d(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}$; ich setze $u = r^2 - x^2$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(u^{\frac{1}{2}}\right)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Nach § 12, 3 ist ein Bogen $s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$; also tsteht

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx.$$

Die Länge eines Quadranten wird

$$Q = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$= \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$= r \cdot \int_0^r \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} \cdot dx.$$

Nun ist $d\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} \cdot dx$; folglich

$$Q = r \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \cdot d\left(\frac{x}{r}\right).$$

Nach § 11, 8 ist $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C$, folglich

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}} \cdot dx = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + C;$$

$$\text{also } Q = r \cdot \left[\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r$$

$$= r \cdot \left[\arcsin\frac{r}{r} - \arcsin\frac{0}{r}\right]$$

$$= r \cdot \arcsin\ 1$$

$$= r \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Der Umfang des Kreises ist also $= 4 \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} = 2r\pi$.

4) Kubatur eines Rotationsellipsoids.

Auflösung: Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Fig. 14) rotiere u die X-Achse. Ich zerschneide den Körper in unendlich vie unendlich schmale Zylinder mit dem Grundflächenradius $PC=$ und der Höhe $DC = dx$; folglich ist der Inhalt eines Zylinde

$$dV = y^2 \cdot \pi \cdot dx \quad \text{und}$$

$$V = \int y^2 \cdot \pi \cdot dx = \int \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2) \cdot \pi\, dx.$$

Nehme ich das Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ u $x = a$, so wird das Volumen des halben Rotationskörpers

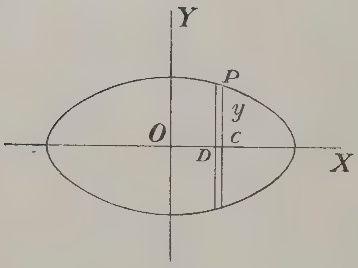


Fig. 14.

$$V = \int_0^a \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2) \cdot \pi \cdot dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^a \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2\right) \cdot dx$$

$$= \pi \cdot b^2 \cdot \int_0^a dx - \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \int_0^a x^2 \cdot$$

$$= \pi \cdot b^2 \cdot a - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot a^3$$

$$= \frac{2}{3} \cdot b^2 \cdot \pi \cdot a.$$

Das Gesamtvolumen ist also $= \frac{4}{3} ab^2 \cdot \pi$.

13. Freier Fall und senkrechter Wurf. Schiefer Wurf.

1) Bei gleichförmiger Bewegung eines Körpers ist die eschwindigkeit konstant gleich dem Quotienten aus Weg und eit : $v = \frac{s}{t} \cdot$ Bei ungleichförmiger Bewegung ist die Ge-hwindigkeit veränderlich und zwar abhängig von der Zeit, so eine Funktion der Zeit. Man spricht dann von der Ge-hwindigkeit des Körpers zu einer gewissen Zeit oder in nem gewissen Punkte seiner Bahn. Befindet sich ein Körper ich t Sekunden in einem Punkte P seiner Bahn und legt er inn in der Zeit Δt den Weg Δs zurück, so hat er während eser Zeit die mittlere Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot$ Lasse ich Δt un-idlich klein werden, so wird auch Δs unendlich klein; der idliche Zuwachs Δs und Δt wird zum unendlich kleinen ıwachs oder zum Differential des Weges und der Zeit ds ıd dt, und für die Geschwindigkeit im Punkte P erhält man e Gleichung:

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt},$$

h. die Geschwindigkeit ist gleich dem Differentialquotienten s Weges nach der Zeit.

Die Geschwindigkeitsänderung wird durch eine Beschleu-gung γ hervorgerufen, welche positiv oder negativ, konstant er veränderlich sein kann. Unter der Beschleunigung ver-ht man den in der Zeiteinheit erlangten Zuwachs an Ge-hwindigkeit. Hat die Geschwindigkeit v in der Zeit Δt den Zu-ichs Δv erfahren, so wird die mittlere Beschleunigung $\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot$ ht man zum Grenzwert über, so entsteht

$$\gamma = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

d. h. die Beschleunigung ist gleich dem Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit.

Nun war $v = \frac{ds}{dt}$, folglich ist auch

$$\gamma = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

d. h. die Beschleunigung ist auch gleich dem zweiten Differe tialquotienten des Weges nach der Zeit.

Beim freien Fall ist die Beschleunigung gleich ein konstanten Größe g, folglich hat man

$$g = \frac{dv}{dt};$$

$$dv = g \cdot dt;$$

$$v = \int dv = \int g \cdot dt = g \cdot t + C.$$

Für $t = 0$ entsteht $v_0 = C$, d. h. die Integrationskonstan ist gleich der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

Ferner war

$$v = \frac{ds}{dt}, \text{ also}$$

$$ds = v \cdot dt = (g \cdot t + C)dt;$$

folglich $s = \int (gt + C) \cdot dt = \int gt \cdot dt + \int C \cdot dt$

$$= \frac{g}{2} \cdot t^2 + C \cdot t + C_1.$$

Setze ich t wieder $= 0$, so wird $s_0 = C_1$, d. h. die Int grationskonstante C_1 bedeutet den Weg, den der Körper v der zu untersuchenden Bewegung zurückgelegt hatte. M. erhält also die bekannten Formeln für den freien Fall: $v = g$ und $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ und für den senkrechten Wurf (nach unt oder oben), wenn c die Anfangsgeschwindigkeit ist:

$$v = c \pm g \cdot t \text{ und } s = c \cdot t \pm \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

2) Schiefer Wurf.

Die Anfangsgeschwindigkeit $OA = c$ (Fig. 15) bilde mit
r X-Achse den Winkel φ; sie wird zerlegt in

$$c_x = OB = c \cdot \cos\varphi \text{ und}$$
$$c_y = OC = c \cdot \sin\varphi.$$

Unter dem Einfluß der Schwerkraft ändert sich nur die nkrechte Komponente c_y, sie erleidet eine Beschleunigung, elche konstant gleich $-g$ ist. Die Beschleunigung in der ichtung der X-Achse ist $= 0$. Werden die in der Richtung r X- und Y-Achse zurückgelegten Wege mit x und y beichnet, so erhält man nach § 13, 1, wenn v_x und v_y die Gehwindigkeiten in der Richtung der X- und Y-Achse sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0 \text{ und}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

Hieraus ergibt sich

$$v_x = \text{const.} = c_x = c \cdot \cos\varphi \text{ und}$$
$$v_y = \int -g \cdot dt = -gt + \text{const.}$$
$$= -g \cdot t + c \cdot \sin\varphi.$$

Die Integrationskonstanten sind also $c \cdot \cos\varphi$ und $c \cdot \sin\varphi$, e sich ergibt, wenn man $t = 0$ nimmt.

Da ferner $v_x = \frac{dx}{dt}$ und $v_y = \frac{dy}{dt}$ ist, so entsteht weiter

$$= v_x \cdot dt \text{ und}$$
$$= \int v_x \cdot dt$$
$$= \int c \cdot \cos\varphi \cdot dt$$
$$= c \cdot \cos\varphi \cdot t + \text{const.};$$
$$= v_y \,.\, dt,$$
$$= \int v_y \cdot dt$$

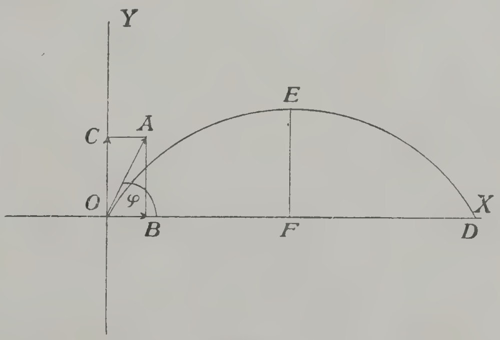


Fig. 15.

$$= \int (-g \cdot t + c \cdot \sin\varphi) \cdot dt$$
$$= -\frac{g}{2} \cdot t^2 + c \cdot \sin\varphi \cdot t + \text{const.}$$

Die Integrationskonstanten werden, wenn man $t = 0$ selbst $= 0$.

Man erhält also für den schiefen Wurf:

1) $x = c \cdot \cos\varphi \cdot t$ und

2) $y = c \cdot \sin\varphi \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$.

Die erste Gleichung liefert $t = \frac{x}{c \cdot \cos\varphi}$; durch Einset die zweite Gleichung entsteht

3) $y = x \cdot \operatorname{tg}\varphi - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2 \cdot \cos^2\varphi}$.

Dies ist die Gleichung einer Parabel.

Setzen wir in 2) $y = 0$, so erhalten wir die Wurfd $T = \frac{2c \cdot \sin\varphi}{g}$, d. h. nach T Sekunden erreicht der K wieder die X-Achse in D. Wird dieser Wert für t in 1 gesetzt, so erhält man die Wurfweite

$$w = OD = \frac{2 \cdot c^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{g} = \frac{c^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}.$$

Der Körper erreicht den höchsten Punkt der Bahn, y wird ein Maximum, wenn $\frac{dy}{dt} = 0$ oder — was dasselbe wenn $v_y = 0$ ist, d. h. wenn die senkrechte Geschwindig komponente $= 0$ ist. Es ist also dann

$$-g \cdot t + c \cdot \sin\varphi = 0, \text{ also}$$
$$T_1 = \frac{c \cdot \sin\varphi}{g},$$
$$\text{d. h. } T_1 = \frac{T}{2}.$$

Setzt man den Wert von T_1 für t in 1) und 2) ei entsteht:

$$OF = x_e = \frac{c^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{g} = \frac{w}{2}$$

und die Wurfhöhe

$$FE = y_e = \frac{c^2 \cdot \sin^2\varphi}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \sin^2\varphi}{g^2} = \frac{c^2 \cdot \sin^2\varphi}{2g}.$$

THEORIA
DERIVATARUM ALTIORUM ORDINU

SCRIPSIT

GUSTAVUS STEINBRINK

DR. PHIL.

BEROLINI MDCCCLXXVI.

APUD S. CALVARY EJUSQUE SOCIUM.

VIRO ILLUSTRISSIMO, PRAECEPTORI CARISSIMO

GUILELMO KLEINSORGE,

SCHOLAE FRIDERICAE GUILELMAE SEDINENSIS DIRECTORI

PIO GRATOQUE ANIMO

HUNC LIBELLUM DEDICAVIT

AUCTOR.

altioribus differentialibus functionum unius variabilis independenter exhib
tat optime meritum esse Reinholdum Hoppeum, qui primus generalem il
riam excogitaverit*), supplementum autem haud mediocre huic theoriae p
cisse Oscarum Schloemilchium**). Ante Hoppeum enim cum ceteri, qui a
derivatis exhibendis studerent, omnia fere ad singulas functiones referrent
ii analysin combinatoriam colebant, quamquam generaliora in hac re spect
en, quia in algorithmo inutili versabantur, ad ipsam theoriam instituendam
um profecerunt.

Hoppeus autem hanc formulam praeclaram invenit:

$$D_x^n f[\varphi(x)] = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1.2\ldots k} D_y^k f(y) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} (k)_h \, y^{k-h} D_x^n \, y^h,$$

$$y = \varphi(x), \quad (k)_h = \frac{k(k-1)\ldots(k-h+1)}{1.2\ldots h},$$

docet, quemadmodum $n$ta derivata functionis compositae $f[\varphi(x)]$ secu
abilem x revocari possit ad derivatas ejusdem functionis secundum varia
$\varphi(x)$. Eandem licet contrahere in:

$$D_x^n f[\varphi(x)] = \sum_{k=1}^{k=n} (n)_k \left[D_\xi^{n-k} \left(\frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)}{\xi} \right)^k \right]_{(\xi=0)} D_y^k f(y).$$

le Hoppeus profectus cujuslibet functionis compositae $n$tam derivatam indepen
essione repraesentari posse demonstravit.

Schloemilchius deinde non solum elegantiores quasdam demonstrationes
ltatumque coëfficientes, quos evolvere frustra Hoppeus conatus erat, indepen
buit, sed etiam de commutatione variabilium formulas generales dedit. Duo
judicat in theoria derivatarum quaerenda eaque inter se contraria: prim
tionibus compositis differentiandis, deinde de *commutandis variabilibus*; ill
opeo pertractatum esse, hoc a se ipso ad exitum adductum. Posito enim:

$$f(y) = f[\varphi(x)] = F(x)$$

*) R. Hoppe, Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten,
. — Cf. Crelle, vol. 33, pag. 78.

**) O. Schlömilch, zur Theorie der höheren Differentialquotienten, Sitzungsberichte
s. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1857 (Zeitschrift für Math. und Phys. III, 185

stulari posse dicit, aut ut $D_x^n F(x)$ exprimatur per $D_y f(y)$, $D_y^2 f(y) \ldots$, $f(y)$ exprimatur per $D_x F(x)$, $D_x^2 F(x), \ldots$; illam esse differentiationem fun npositae, hanc vero commutationem variabilium, quoniam loco $D_y^n f(y)$ etiam sit $D_y^n F(x)$. Formularum autem, quas ad commutandas variabiles Schloem posuit, haec est prima, ex qua ceterae pendent:

$$D_y^n F(x) = \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \left[D_\xi^{n-k} \left(\frac{\xi}{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)} \right)^n \right]_{(\xi=0)} D_x^k F(x).$$

Attamen cum diutius in eam rem animum intendissem, divisio illa i tes naturae quaestionis minus respondere mihi videbatur. Neque enim qui tat, quominus eadem problemata ita interpretemur, ut in priore variabiles videantur, in posteriore autem functio composita differentianda; quoniam rimi debet $D_x^n f(y)$ per $D_y f(y)$, $D_y^2 f(y), \ldots$, in hoc vero $D_y^n F[\psi(y)]$ per D $F(x), \ldots$, denotante $\psi(y)$ functionem inversam functionis φ, ut sit $x=$ ro, si ponimus

$$f(y) = F(x) = z,$$

blemata illa sic enuntiari possunt, ut exprimatur:

I. $D_x^n z$ per $D_y z$, $D_y^2 z, \ldots$ II. $D_y^n z$ per $D_x z$, $D_x^2 z, \ldots$,

le apparet, utroque modo de variabilibus commutandis agi totamque deriv oriam in hoc uno problemate verti:

exprimere $n$tam derivatam functionis z secundum variabilem x per tas ejusdem functionis secundum alteram variabilem y, qualibet re cum x conjunctam.

Jam perspicuum est, et Hoppei et Schloemilchii formulas re vera *ad* estionem pertinere, diversis tamen modis eam persolvere.* Quod quo ceat, in formula Schloemilchii x cum y commutemus, qua transmutation in $\psi(y)$; nihilo minus licebit, functionem arbitrariam z in utraque formul n ponere. Habebimus

I. sec. Hoppeum: $$D_x^n z = \sum_{k=1}^{k=n} (n)_k \left[D_\xi^{n-k} \left(\frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)}{\xi} \right)^k \right]_{(\xi=0)} D_y^k z.$$

II. sec. Schloemilchium: $$D_x^n z = \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \left[D_\eta^{n-k} \left(\frac{\eta}{\psi(y+\eta) - \psi(y)} \right)^n \right]_{(\eta=$$

His vero formulis inter se comparatis suspicio est fore:

$$\frac{n}{k} \left[D_\xi^{n-k} \left(\frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)}{\xi} \right)^k \right]_{(\xi=0)} = \left[D_\eta^{n-k} \left(\frac{\eta}{\psi(y+\eta) - \psi(y)} \right)^n \right]_{(\eta=0)}.$$

ae relatio quamquam notabilis est nec levioris, ut ostendam, in theoria de momenti, Schloemilchium tamen, cum apud eum non reperiatur, videtur la sione videlicet, quam secutus est, impeditum. Itaque id fuit exordium onum mearum, ut relationem illam ipsam confirmarem, quo et Schloemi orematis novam simul demonstrationem afferrem, et manifestius facerem, qu dum Schloemilchii et Hoppei theoremata inter se congruerent; haec vero m fieri possent, de potestatum differentialibus theoremata quaedam genera enda esse cognovi.

Quibus factis, posteaquam quaestionem de variabilibus mutandis latiore
dixi sensu concepi, ad cetera theoremata ipsaque fundamenta theoriae deri
progressus, cum nonnulla ibi simplicioribus modis ostendi posse animadv
alia etiam ad ulteriores quasdam disquisitiones me hortarentur, denique m
ui, ut totius theoriae synopsin conscriberem.

Itaque hac commentatione plurimas formularum ab Hoppeo Schloemilchio
rum complexus nonnullas etiam novas adjeci, imprimis vero id egi, ut ar
ones non modo simpliciores, verum etiam, quoad possem, generaliores int
n. Omnia autem, quae ad priorum scripta attinent, annotationibus exposu

---

ARGUMENTUM.

Praemonita de notis, de signo summatorio, de simplicissimis theorematis ci
as altiores, de coëfficientibus binomii.

PARS I: DE COMMUTATIONE VARIABILIUM.

Problema de variabilibus commutandis exponitur atque ad eruendos termi
i aequatione $D_x^n z = \Sigma u_k^n D_y^k z$ definiuntur, revocatur. Iisdem respondent t
eciproci v_k^n. (Cap. I.) — Termini u_k^n, v_k^n propter definitionem relationib
lam generalibus satisfacere debent (cap. II), unde formae eorum simplicissin
at (cap. III).

Deinde theoremata nonnulla circa derivatas potestatum demonstrantur (cap. I
ope expressiones terminorum u_k^n, v_k^n supra inventae varie transformant
).

Jam terminorum u_k^n, v_k^n casus quidam speciales tractantur (cap. VI).

Denique methodus generalis terminos u_k^n, v_k^n exhibendi ostenditur duobusq
ad exitum adducitur (cap. VII).

PARS II: DE DERIVATIS ALTIORIBUS.

Posteaquam explicatum est, qua ratione fiat compositio functionum (cap. VII
ratione variabilium saepius repetita $n$tam derivatam functionis compositae in
er exhiberi, id autem variis nonnunquam modis effici posse ostendit
X).

PARS III: EXEMPLA.

PRAEMONITA.

A. DE NOTIS, QUIBUS HAC COMMENTATIONE UTEMUR.

notabunt

x, y, ξ, η variabiles;

f, F, G, φ, ψ, χ, z functiones;

a, b, c, t, α, β, γ, δ, ε, μ, ν, ϱ, σ, τ quantitates arbitrarias;

h, k, l, m, n, p, q, r, s numeros integros;

i, e, π ea quae solent;

ln logarithmum naturalem.

B. DE SIGNO SUMMATORIO.

A. DE SUMMIS SIMPLICIBUS.

In theoria derivatarum quo expeditius procedat calculus, signum summato enter usurpandum est. Denotabit igitur $\sum\limits_{k=\alpha}^{k=\beta} f(k)$ aggregatum functionum titutis pro k omnibus deinceps numeris integris, qui conditioni $\alpha \leq k \leq \beta$ nt. — Notandum est, hac definitione et eum casum comprehendi, quo α, eri fracti, et eum, quo $\beta < \alpha$, ubi summa necessario evanescit.

Vocabimus singulas quantitates $f(k)$ *membra* summae, $f(k)$ ipsam *mem* *rale*, k *indicem*, α *limitem inferiorem*, β *superiorem;* eam denique partem in erorum seriei, quae limitibus α, β includitur, *spatium* summae appellare quidem commentatione plerumque evenit, ut membrum generale pro om cis valoribus, qui spatium summae egrediuntur, sua sponte evanescat, q omnino non opus est limites adscribere, dum statuamus, ut omissis limitibu summae in infinitum utrimque sit extendendum.

Algorithmus signi summatorii paucis legibus continetur, quae tam f
lliguntur, ut satis sit brevi eas commemorasse. Valent igitur haec de sum
icibus:

I. $\Sigma a f(k) = a \Sigma f(k)$

II. $\Sigma[f_1(k) + f_2(k) + \ldots] = \Sigma f_1(k) + \Sigma f_2(k) + \ldots$

III. $\sum_{k=\alpha}^{k=\beta} f(k) = \sum_{k=\alpha}^{k=r} f(k) + \sum_{k=r+1}^{k=\beta} f(k)$

bi $\alpha < r < \beta$, designante r numerum integrum;

III*. $\sum_{k=\alpha}^{k=\beta} f(k) = \sum_{k=\alpha}^{k=\varrho} f(k) + \sum_{k=\varrho}^{k=\beta} f(k)$

bi $\alpha < \varrho < \beta$, designante ϱ numerum fractum.

IV. $\sum_{k=\alpha}^{k=\beta} f(k) = \sum_{k=\alpha \mp p}^{k=\beta \mp p} f(k \pm p)$

V. $\sum_{k=\alpha}^{k=\beta} f(k) = \sum_{k=p-\beta}^{k=p-\alpha} f(p-k)$

VI. $\sum_{k=\alpha}^{k=\beta} f(k) = \sum_{k=\frac{\alpha}{2}}^{k=\frac{\beta}{2}} f(2k) + \sum_{k=\frac{\alpha-1}{2}}^{k=\frac{\beta-1}{2}} f(2k+1).$

B. DE SUMMIS DUPLICIBUS.

1. Si membrum generale functio unius indicis est, summam si
lesse vidimus; sin ex duobus illud indicibus pendet, summa duplex emerg
Itaque nota $\sum_{h,k} f(h, k)$, si spatium in infinitum extenditur, designabit
ım omnium quantitatum $f(h, k)$, substitutis pro h et k omnibus deinceps
ıtegris, ita ut quisque valor ipsius h cum quoque valore ipsius k combinet
ɔatium summae finitum est, conditionibus quibusdam intercedentibus, quibu
k satisfacere debeant, nota $\sum_{h,k} f(h, k)$ ex infinito illo membrorum numer
uandam repraesentabit.

Spatium finitum quale quantumve sit, rem geometrice intuendo
erspiciemus. Dato enim systemate coordinatarum rectangularum h, k insi
ɔi omnibus punctis, quorum coordinatae numeris integris exprimuntur, qua
ıtegra nominare brevitatis causa liceat, ita ut unicuique puncto integro n
uoddam $f(h, k)$ respondeat, manifestum est spatium summae esse partem
lani coordinatarum quacunque curva circumscriptam, summam autem ipsar
atum omnium membrorum, quae punctis integris aut intra spatium illud au
ırcuitu jacentibus respondeant.

Si membrum generale ita comparatum est, ut extra spatium sum
ɔonte evanescat, conditiones limitares adjicere non opus est.

Cum valor summae idem maneat, quoquo ordine membra summae com-
licebit primum, indice k constante, secundum indicem h solum summare,
secundum indicem k; unde cognoscitur, summam duplicem etiam duabus
summationibus effici posse, ita ut sit:

$$\sum_{h,\,k} f(h, k) = \sum_{k=\alpha}^{k=\beta} \sum_{h=\gamma_k}^{h=\delta_k} f(h, k).$$

indice h procedentem appellabimus *priorem*, alteram *posteriorem*. Sed licet
s secundum k summare, postea secundum h; idcirco habetur aequatio:

$$\sum_{k=\alpha}^{k=\beta} \sum_{h=\gamma_k}^{h=\delta_k} f(h, k) = \sum_{h=\gamma}^{h=\delta} \sum_{k=\alpha_h}^{k=\beta_h} f(h, k),$$

t, quemadmodum ordo summationum possit inverti. Valores autem limi-
γ_k, δ_k; γ, δ, α_h, β_h e natura spatii sunt determinandi.

x. gr. spatium summae $\sum\limits_{k=\alpha}^{k=\beta} \sum\limits_{h=\gamma}^{h=\delta} f(h, k)$ est oblongum, cujus latera axibus
ob eamque rem habetur:

$$\sum_{k=\alpha}^{k=\beta} \sum_{h=\gamma}^{h=\delta} f(h, k) = \sum_{h=\gamma}^{h=\delta} \sum_{k=\alpha}^{k=\beta} f(h, k).$$

patium summae $\sum\limits_{k=0}^{k=n} \sum\limits_{h=0}^{h=k} f(h, k)$ est triangulum; idcirco habetur:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=0}^{h=k} f(h, k) = \sum_{h=0}^{h=n} \sum_{k=h}^{k=n} f(h, k).$$

do obtinentur aequationes:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=0}^{h=n-k} f(h, k) = \sum_{h=0}^{h=n} \sum_{k=0}^{k=n-h} f(h, k).$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=n-k}^{h=n} f(h, k) = \sum_{h=0}^{h=n} \sum_{k=n-h}^{k=n} f(h, k).$$

orro, si proponitur summa $\sum\limits_{k=\alpha}^{k=\beta} \sum\limits_{h=\gamma}^{h=\delta k+\varepsilon} f(h, k)$, ubi $\delta > 0$, spatium esse tra-
cile intelligitur, quo diviso in oblongum et triangulum, summa proposita
est numerus fractus, in hanc formam redigi potest:

$$\sum_{h=\gamma}^{h=\delta\alpha+\varepsilon} \sum_{k=\alpha}^{k=\beta} f(h, k) + \sum_{h=\delta\alpha+\varepsilon}^{h=\delta\beta+\varepsilon} \sum_{k=\frac{h-\varepsilon}{\delta}}^{k=\beta} f(h, k);$$

ε est numerus integer, in hanc:

$$\sum_{h=\gamma}^{h=\delta\alpha+\varepsilon-1} \sum_{k=\alpha}^{k=\beta} f(h, k) + \sum_{h=\delta\alpha+\varepsilon}^{h=\delta\beta+\varepsilon} \sum_{k=\frac{h-\varepsilon}{\delta}}^{k=\beta} f(h, k).$$

imili modo summa $\sum\limits_{k=\alpha}^{k=\beta} \sum\limits_{h=\delta k+\varepsilon}^{h=\gamma} f(h, k)$ transformari potest.

C. DE SUMMIS MULTIPLICIBUS.

Jam in promptu est, quomodo summa triplex, quadruplex, ... n p
finienda. Erit igitur summa $n$plex $\sum_{h_1, h_2, \dots h_n}' f(h_1, h_2, \dots h_n)$ aggregatum omniu
tatum f, quae exsistunt, si substituuntur pro indicibus $h_1, h_2, \dots h_n$ omnes
variationes numerorum integrorum ad classem n, cum repetitione, quae co
quibusdam limitaribus satisfaciant. Proposita summa triplice, spatium op
rationis geometricae facile ad volumen aliquo modo circumscriptum revoca

Cum ordo summationis arbitrarius sit, licebit repraesentare summa
n summis simplicibus secundum singulos deinceps indices $h_1, h_2, \dots h_n$ proc
$\sum_{h_n} \sum_{h_{n-1}} \dots \sum_{h_1} f(h_1, h_2, \dots h_n)$, quas appellabimus a dextra ad laevam, id est
quo computandae sunt, primam, secundam, ... $n$tam. Earum summarum
limites, quos conditiones limitares suppeditant, tribuendi sunt. Ceterum
unamquamque esse membrum generale summae insequentis nec pendere ex
praecedentibus.

Notandum est, summam $m$tam transformari posse ope formularum IV
stituendo $\pm h_m \pm p$ loco indicis h_m, nec quidquam obstare, quominus p
pendeat ex indicibus insequentibus, ut sit: $p = \pm q \pm h_{m+1} \pm h_{m+2} \pm \dots \pm$
(Annotatio 1.)

C. DE SIMPLICISSIMIS THEOREMATIS CIRCA DERIVAT ALTIORES.

Apud omnes fere auctores, qui calculum differentialem tradunt, hae
inveniuntur:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} D^n x^a = a(a-1)\dots(a-n+1)\,x^{a-n} \\ D^n e^x = e^x \\ D^n \ln x = (-1)^{n-1}\,1.2\dots(n-1)\,x^{-n} \\ D^n \sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad D^n[f(x) + \varphi(x) + \dots] = D^n f(x) + D^n \varphi(x) + \dots$$

$$\text{III.}\quad D^n[f(x)\cdot\varphi(x)] = \sum_{k=0}^{k=n} (n)_k\, D^k f(x)\, D^{n-k} \varphi(x)$$

quarum postrema *formula Leibnitii* vocari solet.

Differentiatio functionis compositae $f(y)$, ubi $y = \varphi(x)$, casu simpl
quo $\varphi(x)$ functionem primi gradus $ax + b$ designet, sine negotio perfici po
nim $D_x^n f(ax + b) = a^n D_y^n f(y)$. — Inde facile deducitur relatio:

$$D_x^n f(x) = [D_\xi^n f(x + \xi)]_{(\xi = 0)}\,.$$

D. DE COEFFICIENTIBUS BINOMII.

Coëfficientes binomii cum in theoria derivatarum frequentissime occurrant, n
brevi eorum denotatione opus est, sed etiam relationum, quae inter
dant, meminisse oportet. Repraesentabimus igitur coëfficientem binomia
$\frac{\ldots(a-k+1)}{.2\ldots k}$ nota a_k vel $(a)_k$; uncos non adjiciemus, nisi discernendi ca
e erit. Pro $k=0$ coëfficientem binomialem $=1$, pro negativis autem k il
utabimus. — Facultas $1.2\ldots k$ brevitatis causa charactere $k!$ designetur;
r erit $=1$.

Hae autem sunt relationes, ad quas saepe recurremus:

I. $n_k = n_{n-k}$.

II. $a_k + a_{k+1} = (a+1)_{k+1}$.

III. $(-a)_k = (-1)^k (a+k-1)_k$.

IV. $(-1)_k = (-1)^k$.

V. $(-\frac{1}{2})_k = (-1)^k (2k)_k\, 2^{-2k}$.

VI. $a_n\, n_k = a_k\, (a-k)_{n-k}$.

VII. $\Sigma n_k = 2^n$.

VIII. $\Sigma(-1)^k n_k = 0$, si $n > 0$, $=1$, si $n=0$.

IX. $\Sigma a_k\, b_{n-k} = (a+b)_n$.

X. $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k a_k = (-1)^n (a-1)_n$.

XI. $\sum_{k=0}^{k=n}(a+k)_k = (a+n+1)_n$.

XII. $\Sigma(-1)^k n_k (2k)_m = (-1)^n n_{m-n}\, 2^{2n-m}$.

XIII. $\Sigma(-1)^k n_k (a+k)_m = (-1)^n a_{m-n}$.

XIV. $\sum_{k=0}^{k=n}(a+k-1)_k (1+t)^k = a(a+n)_n\, \Sigma n_k \frac{t^k}{a+k}$.

Ex quibus I—VI ipsa definitione confirmantur; VII, VIII efficiuntur
o $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$; IX intelligitur sumendo $n$tam derivatam aequat
$t)^a (1+t)^b = (1+t)^{a+b}$, si ponitur denique $t=0$; X est casus speciali
e IX, posito $b=-1$; XI sequitur ex X pro $a = -a-1$; XII prodit
ation e $(1-x^2)^n = \Sigma(-1)^k n_k x^{2k}$ ponitur $x = 1-y$, potestatesque ips
parantur; XIII demonstratur sumendo $m$tam derivatam aequationis $t^a(1-$
$-1)^k n_k t^{a+k}$ et ponendo $t=1$; XIV denique efficitur evolvendo $(1+t)^k =$
onitur $(a+k-1)_k\, k_{k-h} = (a+k-1)_{k-h}\,(a+h-1)_h$, inversoque ordine sum
betur formula XI.

PARS I.

DE COMMUTATIONE VARIABILIUM.

CAPUT I.

QUO PROBLEMA EXPONITUR.

§ 1.

1. Denotante z functionem variabilis x, haec proponatur quaestio: exprimere $n$tam derivatam functionis z secundum variabilem x, $D_x^n z$ derivatas ejusdem functionis secundum alteram variabilem y, $D_y z$, D_y^2 $D_y^n z$, intercedente inter variabiles x, y hac aequatione:

$$\chi(x, y) = 0,$$

quae etiam formis:

$$y = \varphi(x) \quad \text{vel} \quad x = \psi(y)$$

repraesentetur.

ter relationem variabiles x, y jungentem licebit interpretari z vel ut functi s x, $F(x)$, vel ut functionem solius y, $f(y)$, vel etiam ut functionem utri bilis, $G(x, y)$, quoniam $G(x, y)$ propter relationem $y = \varphi(x)$ etiam fu s x est.

Identidem differentiando adipiscimur deinceps:

$$D_x z = \frac{dy}{dx} D_y z,$$

$$D_x^2 z = \frac{d^2 y}{dx^2} D_y z + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 D_y^2 z,$$

$$D_x^3 z = \frac{d^3 y}{dx^3} D_y z + 3 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} D_y^2 z + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 D_y^3 z$$

a porro. Sed qua regula eae expressiones procedant, hac via frustra pers

Id quidem jam perspicuum est, $n$tam derivatam, siquidem illa via perg ssario hanc formam induere:

$$D_x^n z = \sum_{k=1}^{k=n} u_k^n D_y^k z,$$

erminus u_k^n tantummodo e relatione variabiles x, y jungente pendeat, nec
sa z, id est, ex indole functionis F vel f vel G.

2. Summa igitur hujus quaestionis illuc pertinet, ut termini u_k^n forma
investigetur. Ex qua investigatione, quocunque modo instituta, necessario
semper termini u_k^n valorem prodire hoc modo intelligitur.

Fingamus altera quadam methodo perventum esse ad: $D_x^n z = \Sigma w_k^n$
t pro qualibet functione z esse debeat:

$$\Sigma u_k^n D_y^k z = \Sigma w_k^n D_y^k z.$$

ero fieri non potest nisi u_k^n et w_k^n inter se congruentibus, nam posito z
tur:

$$\Sigma u_k^n t^k = \Sigma w_k^n t^k$$

quolibet valore ipsius t, ergo debet esse: $u_k^n = w_k^n$, cum u_k^n et w_k^n ex t
eant.

Simili modo etiam hoc theorema, quod paulo latius patet, confirmatur:

Denotantibus z, A_k, B_k functiones variabilis x ad libidinem sume
modo ne pendeant A_k, B_k ex indole functionis z, aequatio:

$$\Sigma A_k D_x^k z = \Sigma B_k D_x^k z$$

pro qualibet functione z non potest valere nisi $A_k = B_k$.

3. Appelletur n *ordo* termini u_k^n, k *index* ejus; ii autem termini u_k^n
sis relationibus ipsarum x, y respondent, hac denotatione si opus est d
ur:

$$u_k^n \{\chi(x, y) = 0\},$$

quod eodem pertinet,

$$u_k^n \{y = \varphi(x)\}, \text{ vel etiam } u_k^n \{x = \psi(y)\}.$$

Qua denotatione terminus u_k^n ut functio unius variabilis omnino vid
itur.

Pro $k = 1$ et $k = n$ valor termini u_k^n illico proferri potest; nam e de
ationum, quas supra explicare coepimus, cognoscitur esse generaliter:

$$u_1^n = \frac{d^n y}{dx^n},$$

$$u_n^n = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n.$$

In formulis posteris ne opus sit limites semper adscribere, ponamus: t
u_k^n evanescere, simulatque index aut minor fiat unitate aut major ordin
n $= 1$ putandum esse apparet.

§ 2.

1. Si in formula $D_x^n z = \Sigma u_k^n D_y^k z$ variabiles x, y inter se commuta
lit:

*) $$D_y^n z = \Sigma v_k^n D_x^k z,$$

tante videlicet v_k^n eam expressionem, in quam variabilibus commutatis abi
sio generalis termini u_k^n. Erit igitur:

*) $$v_1^n = \frac{d^n x}{dy^n},$$

*) $$v_n^n = \left(\frac{dx}{dy}\right)^n.$$

2. Dato quodam termino u_k^n, eum terminum v_k^n, in quo eadem r
$y) = 0$ valet, *reciprocum* illius vocabimus. Item cuivis termino v_k^n respon
inus reciprocus u_k^n.

Binorum reciprocorum alter si datur, alterum commutando x, y statim
posse ex ipsa quidem definitione apparet; nec tamen obliviscendum est, i
im conditione fieri, ut expressio data generalis sit valorque specialis func
ndum eam introiverit.

3. Porro, si datur terminus $u_k^n \{\chi(x, y) = 0\}$, eum terminum u_k^n, in qu
inversa $\chi(y, x) = 0$ intercedit, illius *inversum* appellemus. Sed perspicuu
ini u_k^n reciprocum atque inversum inter se re vera congruere, litteris ta
o differre.

Denique, si a termino quodam u_k^n profecti eum terminum v_k^n fingamus, i
io χ inversa sit, ad novam expressionem non perveniemus, sed litteras
verimus.

Ex. gr. sit $y = e^x$; habebitur:

$$u_1^n \{y = e^x\} = e^x = y,$$

e terminus reciprocus:

$$v_1^n \{y = e^x\} = D^n \ln y = (-1)^{n-1} (n-1)!\, y^{-n};$$

inus inversus autem erit:

$$u_1^n \{y = \ln x\} = (-1)^{n-1} (n-1)!\, x^{-n}.$$

(Annotatio 2.)

CAPUT II.

RELATIONIBUS NONNULLIS GENERALIBUS, QUIBUS TERI u_k^n, v_k^n SATISFACIUNT.

§ 3.

Ex ipsa definitione proprietates quaedam terminorum u_k^n, v_k^n sequuntur, se ad posteras disquisitiones utile est.

Posito deinceps $z = y^t$, $= x^t$, $= e^{ty}$, $= e^{tx}$, e formula principali D_x $D_y^k z$ has relationes ducimus:

$$y^{-t} D_x^n y^t = \Sigma u_k^n t(t-1)\dots(t-k+1)\, y^{-k}.$$

$$t(t-1)\dots(t-n+1)\, x^{t-n} = \Sigma u_k^n D_y^k x^t.$$

$$e^{-ty} D_x^n e^{ty} = \Sigma u_k^n t^k.$$

$$t^n e^{tx} = \Sigma u_k^n D_y^k e^{tx}.$$

Posito porro $z = \cos ty$, $= \sin ty$, fit:

$$D_x^n \cos ty = \cos ty\, \Sigma(-1)^k u_{2k}^n t^{2k} - \sin ty\, \Sigma(-1)^k u_{2k+1}^n t^{2k+1},$$

$$D_x^n \sin ty = \sin ty\, \Sigma(-1)^k u_{2k}^n t^{2k} + \cos ty\, \Sigma(-1)^k u_{2k+1}^n t^{2k+1},$$

uibus concluditur:

$$\Sigma(-1)^k u_{2k}^n t^{2k} = \cos ty\, D_x^n \cos ty + \sin ty\, D_x^n \sin ty.$$

$$\Sigma(-1)^k u_{2k+1}^n t^{2k+1} = \cos ty\, D_x^n \sin ty - \sin ty\, D_x^n \cos ty.$$

§ 4.

1. Loco functionis z, cum prorsus arbitraria sit, etiam valorem $D_x^m z$ re licet. Quo facto exsistit aequatio:

$$D_x^{n+m} z = \sum_h u_h^n D_y^h D_x^m z = \sum_h u_h^n D_y^h \sum_q u_q^m D_y^q z,$$

ope formulae Leibnitii:

$$D_x^{n+m} z = \sum_{h,\,q,\,p} h_p u_h^n D_y^{q+p} z\, D_y^{h-p} u_q^m.$$

si comparamus cum hac:

$$D_x^{n+m} z = \sum_k u_k^{n+m} D_y^k z,$$

ituto in illa $q = k - p$, cum coëfficientes derivatarum ejusdem ordinis , ut § 1 sub 2 docuimus, inter se distare possint, habemus:

$$u_k^{n+m} = \sum_{h,\,p} h_p u_h^n D_y^{h-p} u_{k-p}^m.$$

Ex hac formula, si facimus $m = 1$, qua re summam indice p procede um membrum redigi videmus, sequitur:

$$u_k^{n+1} = \sum_h h_{k-1}\, u_h^n\, D_y^{h-k+1} \frac{dy}{dx},$$

ve substituto $k+1$ pro k:

(12) $$u_{k+1}^{n+1} = \sum_h h_k\, u_h^n\, D_y^{h-k} \frac{dy}{dx}.$$

Sin priusquam $m=1$ ponatur, numeros n et m inter se commutamus, ae indice h procedit, ad unum membrum, altera ad duo redigitur; ita a ationem pervenimus:

$$u_k^{n+1} = (D_y\, u_k^n + u_{k-1}^n) \frac{dy}{dx},$$

ae substituto $k+1$ loco k vel in formam:

(13) $$u_{k+1}^{n+1} = u_k^n \frac{dy}{dx} + D_x\, u_{k+1}^n$$

in hanc:

(14) $$u_{k+1}^{n+1} \frac{dx}{dy} = u_k^n + D_y\, u_{k+1}^n$$

ligi potest. Easdem etiam differentiando (1) aut secundum x, aut secun nonstrare poteramus.

Praeterea comparatis (12) et (13) cognoscitur esse etiam:

15) $$D_x\, u_{k+1}^n = \sum_{h=k+1}^{h=n} h_k\, u_h^n\, D_y^{h-k} \frac{dy}{dx}.$$

Jam revertamur ad f. (10), ut alteram inde viam ineamus; evolvatu $D_x^m z$ ope non formulae (1), ut supra, sed formulae (1*). Hac via nancis

$$D_x^{n+m} z = \sum_h u_h^n \sum_q v_q^h\, D_x^{m+q} z,$$

le ope theorematis § 1 demonstrati colligimus:

16) $$\sum_h u_h^n\, v_q^h = 0, \text{ si } q \lesseqgtr n; \; = 1, \text{ si } q = n.$$

2. Formulae quae praecedunt cum e substitutione facta $z = D_x^m z$ erint, restat ut inquiratur, quid eveniat substituendo $z = D_y^m z$.

Inde autem primum nascitur:

$$D_x^n\, D_y^m z = \sum_h u_h^n\, D_y^{m+h} z;$$

ıde, evoluto $D_y^m z$ secundum f. (1*) sumtaque $n$ta ejus derivata secundum

$$\sum_h u_h^n\, D_y^{m+h} z = \sum_{q,p} n_p\, D_x^{q+p} z\, D_x^{n-p}\, v_q^m,$$

substituto $q-p$ loco q:

$$\sum_h u_h^n\, D_y^{m+h} z = \sum_{q,p} n_p\, D_x^q z\, D_x^{n-p}\, v_{q-p}^m.$$

Hinc duae viae patent, quarum altera est evolvendi $D_x^q z$ ope f. (1), vendi $D_y^{m+h} z$ ope f. (1*); utroque modo derivatae ejusdem ordinis erunt ndae.

Priore via, posito $h = k - m$, pervenimus ad:

) $$u^n_{k-m} = \sum_{q,\,p} n_p\, u^q_k\, D^{n-p}_x\, v^m_{q-p}\,,$$

cognoscitur, summam illam duplicem evanescere quoties $m \geqq k$. Pósito m
mus:

$$u^n_{k-1} = \sum_q n_{q-1}\, u^q_k\, D^{n-q+1}_x \frac{dx}{dy}\,,$$

ubstituto $k+1$ loco k et $h+1$ loco q:

) $$u^n_k = \sum_h n_h\, u^{h+1}_{k+1}\, D^{n-h}_x \frac{dx}{dy}\,.$$

Qua formula comparata cum (14) sequitur etiam:

) $$D_y\, u^n_{k+1} = -\sum_{h=k}^{h=n-1} n_h\, u^{h+1}_{k+1}\, D^{n-h}_x \frac{dx}{dy}\,.$$

Via *posteriore* reperimus relationem:

) $$\sum_h u^n_h\, v^{h+m}_q = \sum_p n_p\, D^{n-p}_x\, v^m_{q-p}\,,$$

formulam (16) ut casum specialem comprehendit. Ex eadem manat, si po
:

) $$\sum_h u^n_h\, v^{h+1}_q = n_{q-1}\, D^{n-q+1}_x \frac{dx}{dy}\,.$$

§ 5.

Ad relationem generalem terminos u^n_k, v^n_k jungentem hac quoque ra
nitur.

Revertamur ad f. (1): $D^n_x z = \sum u^n_k\, D^k_y z$ fingamusque ibi substitutos p
eps numeros *1, 2, ... n*; prodibunt n aequationes, lineares respectu derivat
$D^2_y z, \ldots D^n_y z$, quas tamquam incognitas licebit exprimere per $D_x z$, D^2_x
et id quidem videlicet aequatione hujus generis:

$$D^k_y z = \sum_{h=1}^{h=n} w^k_h\, D^h_x z.$$

cum e f. (1*) sciamus esse:

$$D^k_y z = \sum v^k_h\, D^h_x z,$$

m w^k_h congruere necesse est, ita ut terminum v^k_h per terminos reciproco
um habeamus.

Quae ut perficiantur, ad theoriam *determinantium* recurrere opus est. I
nus igitur hoc determinans:

) $$U^n = \begin{vmatrix} u^1_1, & 0, & 0 & . & 0 \\ u^2_1, & u^2_2, & 0 & . & 0 \\ u^3_1, & u^3_2, & u^3_3 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ u^n_1, & u^n_2, & u^n_3 & . & u^n_n \end{vmatrix};$$

rtiale autem determinans $(n-1)$ti gradus, in quod abit U^n omissis $h$to vers
lumna, nota

(23) $$U^n_{h,k}$$

signetur. (Liceat brevitatis causa series horizontales determinantis vocare
rticales autem *columnas*.)

Valorem determinantis U^n apparet e f. (3) esse:

(24) $$U^n = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

sa autem $D^k_y z$ hac formula exhibetur:

(25) $$D^k_y z = \frac{(-1)^k}{U^n} \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h U^n_{h,k} D^h_x z;$$

go debet esse:

(26) $$v^k_h = \frac{(-1)^{k+h}}{U^n} U^n_{h,k}.$$

Haec relatio docet $U^n_{h,k}$ evanescere pro h superante k; id quod et
a theoria determinantium statim cognoscitur. Porro videmus $v^k_h U^n$ esse
ntem termini u^h_k in evolvendo determinante U^n ob eamque rem secundum
m theorema haberi:

$$\Sigma u^h_k v^k_q = 0, \text{ si } q \gtrless h; = 1, \text{ si } q = h,$$

ae relationes cum superioribus (16) omnino consentiunt.

§ 6.

Omnes formulae hoc capite demonstratae ejusmodi transformationem pat
x pro y et y pro x scribatur, qua commutatione termini u^n_k, v^n_k in reci
erminantia autem U^n, $U^n_{h,k}$ in V^n, $V^n_{h,k}$ abeunt, quae quid significent no
explicare.

Sic unicuique formulae respondet altera, quae brevitatis causa illius re
etur atque citandi causa asterisco adjecto (*) denotetur. — Eodem de
lo etiam in posteris formulis semper utemur.

(Annotatio 3.)

CAPUT III.

DE FORMIS SIMPLICISSIMIS TERMINORUM u^n_k, v^n_k.

§ 7.

1. E formula (6):

$$e^{-ty} D^n_x e^{ty} = \Sigma u^n_k t^k$$

mplo hanc formam termini u^n_k haurimus:

$$u_k^n = \frac{1}{k!}\,[D_t^k\,(e^{-ty}\,D_x^n\,e^{ty})]_{(t=0)}\,,$$

$$u_k^n = \frac{1}{k!}\,[D_t^k\,D_x^n\,e^{t(y-\gamma)}]_{(t=0,\ \gamma=y)}\,,$$

ıtroducta denotatione:

$$Y = \varphi(x+\xi) - \varphi(x)$$

ı ejus reciproca:

*) $$X = \psi(y+\eta) - \psi(y)\,,$$

) $$u_k^n = \frac{1}{k!}\,[D_t^k\,D_\xi^n\,e^{tY}]_{(t=0,\ \xi=0)}\,.$$

Substituendo $t i$ loco t nanciscimur:

$$u_k^n = \frac{1}{k!\,i^k}\,[D_t^k\,D_\xi^n\,(\cos t\,Y + i\sin t\,Y)]_{(t=0,\ \xi=0)}$$

colligitur esse:

) $$\left\{\begin{aligned} u_{2k}^n &= \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,[D_t^{2k}\,D_\xi^n\,\cos t\,Y]_{(t=0,\ \xi=0)} \\ u_{2k+1}^n &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,[D_t^{2k+1}\,D_\xi^n\,\sin t\,Y]_{(t=0,\ \xi=0)} \end{aligned}\right.$$

etiam e formulis (8), (9) effici poterant.

2. Differentiatione secundum variabilem t peracta e formulis (27), (28), expressiones emergunt, quae sunt:

) $$u_k^n = \frac{(-1)^k\,y^k}{k!}\,\Sigma(-1)^h\,k_h\,y^{-h}\,D_x^n\,y^h.$$

) $$u_k^n = \frac{1}{k!}\,[D_x^n\,(y-\gamma)^k]_{(\gamma=y)}\,.$$

) $$u_k^n = \frac{1}{k!}\,[D_\xi^n\,Y^k]_{(\xi=0)}\,.$$

Quarum postrema ultra transformari potest, si hanc denotationem in calc imus:

) $$\Phi = \frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)}{\xi}$$

ejus reciprocam:

*) $$\Psi = \frac{\psi(y+\eta) - \psi(y)}{\eta}\,;$$

ıim:

$$D_\xi^n\,Y^k = D_\xi^n\,(\xi\,\Phi)^k = \Sigma n_h\,D_\xi^h\,\xi^k\,D_\xi^{n-h}\,\Phi^k$$

evanescente ξ:

) $$[D_\xi^n\,Y^k]_{(\xi=0)} = n_k\,k!\,[D_\xi^{n-k}\,\Phi^k]_{(\xi=0)}\,,$$

relatio semper locum habet, dum ne derivatae quantitatum Φ^k evanes bili ξ in infinitum crescant; sed constat id non posse accidere, nisi funct t $\varphi(x)$ ipsa, desinat esse finita, continua, monodroma. Simul intelligitur

(37) $$[D_\xi^n Y^k]_{(\xi=0)} = 0,$$

k superet n. Denique adhibita f. (34) obtinemus:

(38) $$u_k^n = n_k [D_\xi^{n-k} \Phi^k]_{(\xi=0)}.$$

3. Ex omnibus formulis, quas modo demonstravimus, manabunt reci loco u, x, y, ξ, η, φ, Y, Φ substituuntur: v, y, x, η, ξ, ψ, X, Ψ.

§ 8.

1. Hactenus ipsorum tantum u_k^n, v_k^n expressiones conquisivimus, nec rmulis ipsis, quibus commutatio variabilium perficitur, disseruimus. Quae ducendis illis expressionibus in aequationem generalem $D_x^n z = \Sigma u_k^n D_y^k z$ f tinentur, ita ut sit:

(39) $$D_x^n z = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} [D_t^k D_\xi^n e^{tY}]_{(t=0,\ \xi=0)} D_y^k z.$$

(40) $$D_x^n z = \Sigma n_k [D_\xi^{n-k} \Phi^k]_{(\xi=0)} D_y^k z.$$

(41) $$D_x^n z = \Sigma \frac{1}{k!} [D_\xi^n Y^k]_{(\xi=0)} D_y^k z.$$

(42) $$D_x^n z = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k y^k}{k!} D_y^k z \, \Sigma (-1)^h k_h y^{-h} D_x^n y^h.$$

2. Notandum est formulam (42) invertendo ordine summarum trans sse in:

$$D_x^n z = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^h y^{-h}}{h!} D_x^n y^h \sum_{k=h}^{k=n} \frac{(-1)^k y^k}{(k-h)!} D_y^k z,$$

substituto $k+h$ loco k:

(43) $$D_x^n z = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{1}{h!} D_x^n y^h \sum_{k=0}^{k=n-h} \frac{(-1)^k y^k}{k!} D_y^{h+k} z.$$

Apparet hanc formam ad ejusmodi quaestionem aptam esse, ubi ipsi speciales tribuantur, relatio autem variabilium x, y generalis maneat.

(Annotatio 4.)

CAPUT IV.

THEOREMATA GENERALIA CIRCA DERIVATAS POTESTATU

§ 9.

In formulis, quas capite III exposuimus, derivatas potestatum saepe occ emus, in quibus cum singulares nonnullae proprietates insint, hoc capite s eas tractabimus.

1. E f. (43) trahimus substituendo $z = y^a$:

$$D_x^n y^a = y^a \sum_{h=1}^{h=n} y^{-h} D_x^n y^h \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k a_{h+k} (h+k)_h ,$$

ope formularum binomialium VI et X:

$$D_x^n y^a = (-1)^n y^a \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h a_h (a-h-1)_{n-h} y^{-h} D_x^n y^h ,$$

in hanc quoque facile convertimus:

$$D_x^n y^a = (-1)^n a (a-1)_n y^a \sum \frac{(-1)^h n_h}{a-h} y^{-h} D_x^n y^h .$$

Haec formula docet: $n$tam derivatam cujuslibet potestatis functionis $y = \varphi$
ri posse ad $n$tas derivatas potestatum $y, y^2, y^3, \ldots y^n$.

Scribendo $-a$ loco a mutamus f. (44) in hanc:

$$D_x^n y^{-a} = a (a+n)_n y^{-a} \sum \frac{(-1)^h n_h}{a+h} y^{-h} D_x^n y^h .$$

Porro, cum loco $D_x^n y^a$, si $n > 0$, liceat scribere $D_x^n (y^a - 1)$, in f. (44) e
te a emergit logarithmus, ita ut habeatur:

$$D_x^n \ln y = \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^{h+1} \frac{n_h}{h} y^{-h} D_x^n y^h .$$

2. F. (45), si pro a ponitur numerus integer positivus m, est casus spe
mulae generalioris, quam hoc modo obtinemus. Designet $\varepsilon^{(k)}$ coëfficien
atis t^k in evolvenda summa:

$$S = \sum_h (-1)^h q_h \frac{(1-t)^{p+h}}{p+h} .$$

cum liceat hoc modo transformare:

$$S = \sum_h \frac{(-1)^h q_h}{p+h} \sum_k (-1)^k (p+h)_k t^k = \sum_k (-1)^k t^k \sum_h (-1)^h q_h \frac{(p+h)_k}{p+h} ,$$

n intelligitur ope f. bin. XIV esse:

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{1}{p (p+q)_q} ;$$

pro $k > 0$, ope f. bin. XIII:

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k} \sum (-1)^h q_h (p+h-1)_{k-1} = \frac{(-1)^{q+k}}{k} (p-1)_{k-q-1} ,$$

habeatur, substituto k loco $k-q-1$:

$$S = \frac{1}{p (p+q)_q} + \sum (-1)^{k+1} (p-1)_k \frac{t^{q+k+1}}{q+k+1} .$$

ponatur $t = \frac{\varphi(x+\xi)}{\varphi(x)}$, quo facto abit $1-t$ in $-\frac{Y}{y}$ vel in $-\frac{\xi}{y}\Phi$; adj
rea utrimque factore $p(p+q)_q [\varphi(x+\xi)]^{-m}$, nanciscimur:

$$p(p+q)_q [\varphi(x+\xi)]^{-m} \sum_h \frac{q_h \xi^{p+h}}{(p+h) y^{p+h}} \Phi^{p+h}$$
$$= [\varphi(x+\xi)]^{-m} + p(p+q)_q \sum_k \frac{(-1)^{k+1} (p-1)_k [\varphi(x+\xi)]^{q+k+1-}}{(q+k+1) y^{q+k+1}}$$

qua aequatione si sumitur $n$ta derivata secundum ξ, apparet, si $n < p$, l
pter factorem ξ^{p+h} evanescente ξ in nihilum abire. Illa conditione igitur ha

$$0 = D_x^n y^{-m} + p(p+q)_q \Sigma \frac{(-1)^{k+1}(p-1)_k}{q+k+1} y^{-(q+k+1)} D_x^n y^{q+k+1-m}.$$

ique sit $p = n+1+r$, $q = m-1+s$, designantibus r, s numeros integr
os arbitrarios; quibus substitutis provenit:

$$\text{17)} \quad D_x^n y^{-m} = (m+s)(m+n+r+s)_{m+s} \sum_k \frac{(-1)^k (n+r)_k y^{-k-m-s}}{k+m+s} D_x^n y^{k+s}.$$

Quae formula congruit cum f. (45), si numeri arbitrarii r, s ad nihilu
ntur, in illa autem $a = m$ ponitur.

§ 10.

1. Notabilia quaedam theoremata circa derivatas potestatum ex ips
a Leibnitii hauriuntur, ex qua primum sequitur:

$$\text{8)} \quad D^n y^{a+b} = \Sigma n_k D^k y^a D^{n-k} y^b;$$

de, quia $D^n y^{a+b} = (a+b) D^{n-1} [(y^{a-1} Dy) y^b]$, obtinetur:

$$D^n y^{a+b} = (a+b) \Sigma (n-1)_{k-1} D^{k-1} (y^{a-1} Dy) D^{n-k} y^b,$$

e propter relationem $D^{k-1}(y^{a-1} Dy) = \frac{1}{a} D^k y^a$:

$$\text{9)} \quad D^n y^{a+b} = \frac{a+b}{a} \Sigma (n-1)_{k-1} D^k y^a D^{n-k} y^b = \frac{a+b}{an} \Sigma k n_k D^k y^a D^{n-k} y^b$$

litione $n > 0$.

Ope formularum (48) et (49) facile confirmatur aequatio:

$$\text{0)} \quad \sum_k (a+k) n_k D^k y^a D^{n-k} y^b = \frac{a(a+b+n)}{a+b} D^n y^{a+b}.$$

Inde manat, posito $a = m$ atque substituto $n-m$ loco n et $k-m$ loco

$$\text{1)} \quad \Sigma k (n-m)_{k-m} D^{k-m} y^m D^{n-k} y^b = m \frac{b+n}{b+m} D^{n-m} y^{b+m}.$$

s formulae etiam casus specialis $b = -n$ notetur:

$$\text{2)} \quad \Sigma k (n-m)_{k-m} D^{k-m} y^m D^{n-k} y^{-n} = 0, \text{ conditione } m < n.$$

e cum eandem summam esse $= n$, si $m = n$, re ipsa appareat, introduct
ione:

$$\text{3)} \quad S_m^n = \sum_k \frac{k}{n} (n-m)_{n-k} D^{k-m} y^m D^{n-k} y^{-n},$$

tur:

$$\text{4)} \quad S_m^n = 0, \text{ si } 0 \leqq m < n; \; = 1, \text{ si } m = n.$$

2. E f. (54) sequitur etiam: $n_m S_m^n = 0$, si $0 \leqq m < n$, atque $= 1$, si m
e, quia $n_m (n-m)_{n-k} = n_k k_m$, si denique scribitur h loco ipsius n, prodit:

$$\text{5)} \quad \sum_k (h-1)_{k-1} D^{h-k} y^{-h} . k_m D^{k-m} y^m = 0, \text{ si } m \gtrless h; \; = 1, \text{ si } m = h.$$

i m deinceps valores $1, 2, \ldots n$ induit, designante n numerum integrum $>$
a n aequationum oriri videmus, ex quo quantitates $(h-1)_{k-1} D^{h-k} y^{-h}$ tamqu
tas per ceteras $k_m D^{k-m} y^m$ exprimere licet. Introducatur igitur determinans

$$Q^n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad a_{h,k} = h_k D^{h-k} y^k,$$

determinans partiale $Q^n_{h,k}$, in quod abit Q^n, $h$to versu et $k$ta columna omis
cto statim adipiscimur:

$$(h-1)_{k-1} D^{h-k} y^{-h} = (-1)^{h+k} \frac{Q^n_{k,h}}{Q^n},$$

ue apparet coëfficientem $\alpha_{h,k}$ membri $a_{h,k}$ in evolvendo determinante Q^n es

$$\alpha_{h,k} = (k-1)_{h-1} Q^n D^{k-h} y^{-k}.$$

Porro, cum e theoria determinantium constet esse $\sum_k a_{m,k} \alpha_{h,k} = 0$, si $m \gtrless$
$= Q^n$, si $m = h$, haec quoque valebit relatio:

$$\sum_k (k-1)_{h-1} D^{k-h} y^{-k}\ m_k D^{m-k} y^k = 0, \text{ si } m \gtrless h; \ = 1, \text{ si } m = h;$$

otest transformari in hanc:

$$\sum_k \frac{m}{k} (m-h)_{k-h} D^{k-h} y^{-k}\ D^{m-k} y^k = 0, \text{ si } m \gtrless h, \ = 1, \text{ si } m = h.$$

3. Operae pretium est, hanc quoque summam examinare:

$$R_n = \sum_k \frac{a}{a-k} n_k D^k y^{a-k} D^{n-k} y^k,$$

si $\frac{a}{a-k} D^k y^{a-k}$ evolvitur secundum f. (49), inverso ordine summarum abit i

$$\sum_h D^h y^a \sum_k n_k (k-1)_{h-1} D^{k-h} y^{-k} D^{n-k} y^k = \sum_h n_h D^h y^a \sum_k \frac{h}{k} (n-h)_{k-h} D^{k-h} y^{-k} D^{n-k}$$

mmam priorem evanescere pro $h \gtrless n$ et aequari unitati pro $h = n$ dqce
rgo valebit relatio:

$$D^n y^a = \sum \frac{a}{a-k} n_k D^k y^{a-k} D^{n-k} y^k.$$

Altera demonstratio ejusdem formulae haec est. Summa $\sum_k \frac{a}{a-k} n_k D^k y^{a-k}$
$= \sum_m \frac{m}{n} (n-k)_{n-m} D^{m-k} y^k D^{n-m} y^{-n}$, duplice modo transformari potest.
lla semel propter (54) $= \frac{a}{a-n} D^n y^{a-n}$ ob eamque causam, propter f. (49) et
$-1)_{m-1} D^{n-m} y^{-n} D^m y^a$; iterum, inverso ordine summarum, $= \sum_m (n-1)_{m-1} D^{n-m} y^{-}$
ca esse debet:

$$\sum (n-1)_{m-1} D^{n-m} y^{-n} D^m y^a = \sum (n-1)_{m-1} D^{n-m} y^{-n} R_m;$$

in? autem, ponendo deinceps $n = 1, 2, \ldots$, concluditur:

$$R_1 = Dy^a,\ R_2 = D^2 y^a, \ldots \text{ et generaliter } R_m = D^m y^a.$$

4. F. (59) ad varias relationes generaliores aditum praebet, qu
nt ae hoc loco notentur, etsi in posteris disquisitionibus ad eas non recu
F. (48), si $D^k y^a$ evolvitur secundum (59), inverso ordine summaru

$$D^n y^{a+b} = \sum_h \frac{a}{a-h} n_h D^h y^{a-h} \sum_k (n-h)_{k-h} D^{k-h} y^h D^{n-k} y^b,$$

ut summam priorem scimus esse $= D^{n-h} y^{b+h}$, ita ut exsistat:

$$(60)\qquad D^n y^{a+b} = \sum_h \frac{a}{a-h} n_h D^h y^{a-h} D^{n-h} y^{b+h}.$$

E f. (49), si $D^k y^a$ eodem modo evolvitur, inverso ordine summaru
ta e f. (51) prodit:

$$\frac{D^n y^{a+b}}{a+b} = (b+n) \sum_h (n-1)_{h-1} \frac{D^h y^{a-h}}{a-h} \frac{D^{n-h} y^{b+h}}{b+h},$$

siv substituendo $b+n$ loco a, $a-n$ loco b, $n-h$ loco h:

$$(61)\qquad \frac{D^n y^{a+b}}{a+b} = a \sum (n-1)_h \frac{D^h y^{a-h}}{a-h} \frac{D^{n-h} y^{b+h}}{b+h}.$$

Formulae (60) et (61) paulo generaliores fiunt, si loco functionis
y bstituitur y^t; praeterea scribatur $\frac{a}{t}$ loco a et $\frac{b}{t}$ loco b. Quibus factis

$$(62)\qquad D^n y^{a+b} = a \sum_h \frac{n_h}{a-ht} D^h y^{a-ht} D^{n-h} y^{b+ht},$$

$$(63)\qquad \frac{D^n y^{a+b}}{a+b} = a \sum_h (n-1)_h \frac{D^h y^{a-ht}}{a-ht} \frac{D^{n-h} y^{b+ht}}{b+ht},$$

qu um utraque ita transformari potest, ut id membrum, cujus index $h = 0$,
ul tum in laevam transferatur; hoc modo oritur:

$$(64)\qquad \sum_{h=1}^{h=n} n_h \frac{D^h y^{a-ht}}{a-ht} D^{n-h} y^{b+ht} = \frac{1}{a}\left(D^n y^{a+b} - y^a D^n y^b\right).$$

$$(65)\qquad \sum_{h=1}^{h=n-1} (n-1)_h \frac{D^h y^{a-ht}}{a-ht} \frac{D^{n-h} y^{b+ht}}{b+ht} = \frac{1}{a}\left(\frac{D^n y^{a+b}}{a+b} - y^a \frac{D^n y^b}{b}\right).$$

Qu formae ad casum evanescentis a tractandum aptissimae sunt.

Summa autem disquisitionis nostrae hoc theoremate continetur:

Summae $\sum n_h \frac{D^h y^{a-ht}}{a-ht} D^{n-h} y^{b+ht}$ et $\sum (n-1)_h \frac{D^h y^{a-ht}}{a-ht} \frac{D^{n-h} y^{b+ht}}{b+ht}$ non
e quantitate t ob eamque rem ponendo $t = 0$ determinari possu

§ 11.

Theorema quoddam singulare de potestatum derivatis ad eum casum
uc variabiles x, y simul in nihilum abeunt.

Revertamur enim ad f. (40), ponamusque esse: $\varphi(0) = 0$. Haben
va escente x:

$$\left[D_\xi^{n-k}\left(\frac{\varphi(x+\xi)-\varphi(x)}{\xi}\right)^k\right]_{(\xi=0)} = \left[D_\xi^{n-k}\left(\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\right)^k\right]_{(\xi=0)} = \left[D_x^{n-k}\left(\frac{y}{x}\right)^k\right]_{(x=0)}$$

$$[D_x^n z]_{(x=0)} = \Sigma n_k [D_y^k z]_{(x=0)} \left[D_x^{n-k}\left(\frac{y}{x}\right)^k\right]_{(x=0)}.$$

amen constat hanc relationem semper valere, quia verendum est, ne product $_{(x=0)}\left[D_x^{n-k}\left(\frac{y}{x}\right)^k\right]_{(x=0)}$ formam $\frac{0}{0}$ induat. Etenim, hoc est generaliter observ datis quibusdam functionibus $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, si habeatur $P(0)=\alpha$, Q $R(0)=\beta$, tamen non debere concludi: $P(0).R(0)=Q(0).R(0)$, nisi bet a forma $\frac{0}{0}$.

Functio z autem sic determinetur, ut sit $z=\left(\frac{y}{x}\right)^a$; erit igitur pro eva bus x, y:

$$D_x^n\left(\frac{y}{x}\right)^a = \Sigma n_k D_y^k\left(\frac{y}{x}\right)^a D_x^{n-k}\left(\frac{y}{x}\right)^k, \quad x=0,\ y=0;$$

certe valebit ea conditione, ne derivatae $D_y^k\left(\frac{y}{x}\right)^a$, $D_x^{n-k}\left(\frac{y}{x}\right)^k$ evanescenti libus in infinitum crescant. Cui conditioni constat satisfieri, si functio $\frac{y}{x}$ centibus x, y neque $=\infty$, neque $=0$ fiat, derivataeque ejus, et secundu undum y sumtae, valores finitos induant (cf. f. 44); theoria functionum au derivatas non posse in infinitum crescere, quoad functio ipsa et finita et c et monodroma maneat.

Qua re constituta, fingatur e (66) systema n aequationum, ponendo dein 2,... n, ex quo quantitates $D_y^k\left(\frac{y}{x}\right)^a$ tamquam incognitae facile exprimu eras, ope determinantis Q'' (56), ubi substituendum erit $a_{h,k}=h_k\left[D_x^{h-k}\left(\frac{y}{x}\right)^k\right.$ nodo nanciscimur secundum f. (57) et (49):

$$\left.\frac{y}{x}\right)^a\Big]_{(x=0)} = \Sigma(k-1)_{h-1}\left[D_x^h\left(\frac{y}{x}\right)^a\right]_{(x=0)}\left[D_x^{k-h}\left(\frac{y}{x}\right)^{-k}\right]_{(x=0)} = \frac{a}{a-k}\left[D_x^k\left(\frac{y}{x}\right)^{a-k}\right]_{(x}$$

Ad eandem relationem is quoque aditus patet, ut formulam (66) comp um hac:

$$\left[D_x^n\left(\frac{y}{x}\right)^a\right]_{(x=0)} = \Sigma\frac{a}{a-k}n_k\left[D_x^k\left(\frac{y}{x}\right)^{a-k}\right]_{(x=0)}\left[D_x^{n-k}\left(\frac{y}{x}\right)^k\right]_{(x=0)},$$

profluit e f. (59), posito $z=\left(\frac{y}{x}\right)^a$.

Itaque hoc theorema demonstratum est:

Intercedente inter variabiles x, y ejusmodi aequatione, ut ambae si evanescant, valent relationes:

$$\frac{1}{a}\left[D_y^n\left(\frac{y}{x}\right)^a\right]_{(x=0,\ y=0)} = \frac{1}{a-n}\left[D_x^n\left(\frac{y}{x}\right)^{a-n}\right]_{(x=0,\ y=0)},$$

$$\frac{1}{a}\left[D_x^n\left(\frac{y}{x}\right)^a\right]_{(x=0,\ y=0)} = \frac{1}{a+n}\left[D_y^n\left(\frac{y}{x}\right)^{a+n}\right]_{(x=0,\ y=0)},$$

hac conditione, ut functio $\frac{y}{x}$ evanescentibus x, y valorem finitum distantem induat, nec desinat esse continua atque monodroma, s functio variabilis x, sive ut functio variabilis y.

(Annotatio 5.)

CAPUT V.

QUO EXPRESSIONES CAPITE III EXHIBITAE DIVERSIS MOD TRANSFORMANTUR.

§ 12.

1. Habemus secundum (26*):

$$u_k^n = \frac{(-1)^{n+k}}{V^n} V_{k,n}^n$$

tante V^n hoc determinans:

$$V^n = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

membrum generale $a_{h,k} = v_k^h$ e f. (38*) scimus esse:

$$a_{h,k} = h_k \, [D_\eta^{h-k} \, \psi^k]_{(\eta=0)};$$

V^n cum determinante Q^n (56) ita congruit, ut habeatur, ope f. (57):

$$(-1)^{h+k} \, V_{h,k}^n = (k-1)_{h-1} \, [D_\eta^{k-h} \, \psi^{-k}]_{(\eta=0)} \, V^n$$

amque rem:

)

$$u_k^n = (n-1)_{k-1} \, [D_\eta^{n-k} \, \psi^{-n}]_{(\eta=0)}.$$

2. Hujus formulae altera demonstratio sic effici potest. In f. (68):

$$\frac{1}{a}\left[D_\xi^n \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^a\right]_{(\xi=0,\ \eta=0)} = \frac{1}{a+n}\left[D_\eta^n \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{a+n}\right]_{(\xi=0,\ \eta=0)}$$

relationem variabilium ξ, η statuamus:

$$y + \eta = \varphi(x+\xi),$$

conditioni, ut ξ, η simul evanescant, satisfacit. Sequitur ex illa $x + \xi = \psi(y$

mque rem:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)}{\xi} = \frac{\eta}{\psi(y+\eta) - \psi(y)};$$

sit:

)

$$\frac{1}{a}\left[D_\xi^n \left(\frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)}{\xi}\right)^a\right]_{(\xi=0)} = \frac{1}{a+n}\left[D_\eta^n \left(\frac{\eta}{\psi(y+\eta) - \psi(y)}\right)^{a+n}\right]_{(\eta=0)}$$

valebit generaliter, quoad functiones $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ manebunt finitae, contin
dromae.

Casus specialis formulae (70) hic est:

$$) \quad \frac{1}{k}\left[D_\xi^{n-k}\left(\frac{\varphi(x+\xi)-\varphi(x)}{\xi}\right)^k\right]_{(\xi=0)} = \frac{1}{n}\left[D_\eta^{n-k}\left(\frac{\eta}{\psi(y+\eta)-\psi(y)}\right)^n\right]_{(\eta=0)};$$

ut supra:

$$u_k^n = (n-1)_{k-1}\,[D_\eta^{n-k}\ \Psi^{-n}]_{(\eta=0)}.$$

§ 13.

Expressio (69) ope f. (47) facile in hanc convertitur:

$$u_k^n = (n+s)\,(n-1)_{k-1}(2n-k+r+s)_{n+s}\,\Sigma(-1)^h\frac{(n-k+r)_h}{n+h+s}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+h+s}[D_\eta^{n-k}\,\Psi^{h+s}]$$

casus simplicissimus est:

$$) \quad u_k^n = n(n-1)_{k-1}\,(2n-k)_n\ \Sigma(-1)^h\frac{(n-k)_h}{n+h}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+h}[D_\eta^{n-k}\ \Psi^h]_{(\eta=0)}.$$

ituendo:

$$[D_\eta^{n-k}\ \Psi^h]_{(\eta=0)} = \frac{1}{h!\,(n-k+h)_h}[D_\eta^{n-k+h}\ X^h]_{(\eta=0)}$$

emus:

$$) \quad u_k^n = k\,(2n-k)_k\ \Sigma(-1)^h\frac{(2n-2k)_{n-k+h}}{(n+h)\,h!}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+h}[D_\eta^{n-k+h}\ X^h]_{(\eta=0)};$$

ue, evolvendo $D_\eta^{n-k+h}\,X^h$:

$$) \quad u_k^n = k(2n-k)_k\sum_{h,\,m}(-1)^{h+m}\frac{(2n-2k)_{n-k+h}\,h_m}{(n+h)\,h!}\,x^m\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+h}D_y^{n-k+h}\,x^{h-m}.$$

§ 14.

Introducendo expressiones (69), (73), (75) in formulam generalem (1)
nur similes formulas atque § 8:

$$) \quad D_x^n z = \sum_k (n-1)_{k-1}\,[D_\eta^{n-k}\ \Psi^{-n}]_{(\eta=0)}\,D_y^k z.$$

$$) \quad D_x^n z = \sum_{k,\,h}\frac{(-1)^h\,n(n-1)_{k-1}\ (2n-k)_n\,(n-k)_h}{n+h}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+h}[D_\eta^{n-k}\ \Psi^h]_{(\eta=0)}\,D_y^k z.$$

$$) \quad D_x^n z = \sum_{k,\,h,\,m}\frac{(-1)^{h+m}\,k(2n-k)_k\,(2n-2k)_{n-k+h}\,h_m}{(n+h)\,h!}\,x^m\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+h}D_y^{n-k+h}\,x^{h-m}\,D_y^k z$$

Quarum prima propter relationem $D_y^k z = [D_\eta^k f(y+\eta)]_{(\eta=0)} = [D_\eta^{k-1} f'(y+\eta)]$
contrahi potest in hanc:

$$) \quad D_x^n z = \left(D_\eta^{n-1}\left[\left(\frac{\eta}{\psi(y+\eta)-\psi(y)}\right)^n f'(y+\eta)\right]\right)_{(\eta=0)}.$$

§ 15.

Ad transformationem diversi generis expressio generalis (30):

$$u_k^n = \frac{1}{k!}[D_t^k\,D_\xi^n\,e^{tY}]_{(t=0,\ \xi=0)}$$

am praebet. Obtinetur enim e f. (44):

$$D_\xi^n e^{tY} = D_\xi^n (e^Y)^t = t\,(t-1)_n\, \Sigma(-1)^{n+h} \frac{n_h}{t-h}\, e^{Y(t-h)}\, D_\xi^n e^{hY},$$

quantitas $e^{Y(t-h)}$ evanescente ξ in unitatem abit, ita ut exsistat:

30) $$u_k^n = \frac{(-1)^n}{n!\,k!}\, \Sigma(-1)^h n_h \left[D_\xi^n e^{hY}\right]_{(\xi=0)} \left[D_t^k \frac{t\,(t-1)\dots(t-n)}{t-h}\right]_{(t=0)},$$

adhibita denotatione:

31) $$\frac{(t-1)\,(t-2)\dots(t-n)}{t-h} = \sum_{p=0}^{p=n-1} L_{h,p}^n\, t^p,$$

32) $$u_k^n = \frac{(-1)^n}{n!}\, \Sigma(-1)^h n_h\, L_{h,k-1}^n \left[D_\xi^n e^{hY}\right]_{(\xi=0)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\, \Sigma(-1)^h n_h\, L_{h,k-1}^n\, e^{-hy} D_x^n e^{hy}.$$

(Annotatio 6.)

CAPUT VI.

CASUS SPECIALES TERMINORUM u_k^n, v_k^n.

§ 16.

Observatio generalis. Operae pretium est, hanc relationem animadvert

3) $$v_k^n = k\,(2n-k)_k\, \Sigma(-1)^h \frac{(2n-2k)_{n-k+h}}{n+h} \left(\frac{dx}{dy}\right)^{n+h} u_h^{n-k+h},$$

facile obtinetur e f. (74*). Ejus ope enim statim hoc theorema intelligit

Simulatque valor termini u_k^n pro qualibet relatione $\chi(x, y) = 0$ re est, etiam valor termini *inversi* (§ 2) illico proferri potest.

im valor quaesitus non differt a termino reciproco $v_k^n \{\chi(x, y) = 0\}$ nisi l mutatis; is vero, si aliter erui nequeat, certe relatione (83) ad cognitos ı revocari potest. — Itaque, computatis terminis u_k^n pro $y = x^2$, $y = e^x$, $y =$ ı termini u_k^n pro $y = \sqrt{x}$, $y = \ln x$, $y = \arcsin x$, in promptu erunt.

(Annotatio 7.)

§ 17.

De casu $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^a$.

1. $y = \frac{1}{x}$. $\quad \Phi = -\frac{1}{x\,(x+\xi)}$. $\quad u_k^n = n_k \left[D_\xi^{n-k} \Phi^k\right]_{(\xi=0)}$.

4) $$u_k^n \left\{y = \frac{1}{x}\right\} = \frac{(-1)^n\, n!\, (n-1)_{k-1}}{k!\, x^{n+k}}.$$

2. $y = x^2. \quad \Phi = 2x + \xi.$

) $$u_k^n \, \}y = x^2\{ = n_k \, [D_\xi^{n-k} (2x + \xi)^k]_{(\xi=0)} = n_k \, k_{n-k} \, (n-k)! \, (2x)^{2k-n}.$$

$$v_k^n \, \}y = x^2\{ = (n-1)_{k-1} \, [D_\xi^{n-k} \, \Phi^{-n}]_{(\xi=0)} = (n-1)_{k-1} \, D_{2x}^{n-k} \, (2x)^{-n}$$

) $$= (-1)^{n-k} \frac{(2n-k-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} \frac{1}{(2x)^{2n-k}}.$$

*) $$u_k^n \, \}y = \sqrt{x}\{ = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} \frac{1}{(2\sqrt{x})^{2n-k}}.$$

3. $y = x^a.$

$$u_k^n \, \}y = x^a\{ = \frac{1}{k!} (D_\xi^n \, [(x+\xi)^a - x^a]^k)_{(\xi=0)} = \frac{x^{ak-n}}{k!} (D_\tau^n \, [(1+\tau)^a - 1]^k)_{(\tau=0)}$$

) $$= \frac{(-1)^k \, n! \, x^{ak-n}}{k!} \Sigma (-1)^h \, k_h \, (ah)_n.$$

(Annotatio 8.)

§ 18.

De casu $y = e^x$.

Hoc casu in terminis u_k^n, v_k^n tam praeclarae proprietates insunt, ut der singulari digni videantur; designet igitur:

) $$\mathfrak{u}_k^n \text{ terminum } u_k^n \, \}y = e^x\{,$$
$$\mathfrak{v}_k^n \text{ terminum } v_k^n \, \}y = e^x\{.$$

1. Primum $\mathfrak{u}_k^n$ et $\mathfrak{v}_k^n$ ipsi e f. (34) et (83) facile computantur; introd nota:

) $$E_m^h = [D_\xi^m \, (e^\xi - 1)^h]_{(\xi=0)} = \Sigma (-1)^p \, h_p \, (h-p)^m$$

cimur:

) $$\mathfrak{u}_k^n = \frac{1}{k!} y^k \, E_n^k.$$

) $$\mathfrak{v}_k^n = \frac{k\,(2n-k)_k}{y^n} \Sigma (-1)^h \frac{(2n-2k)_{n-k+h}}{(n+h)\,h!} E_{n-k+h}^h.$$

*) $$u_k^n \, \}y = \ln x\{ = \frac{k\,(2n-k)_k}{x^n} \Sigma (-1)^h \frac{(2n-2k)_{n-k+h}}{(n+h)\,h!} E_{n-k+h}^h.$$

2. Deinde e f. (5*) sequitur:

) $$t\,(t+1)\ldots(t+n-1) = (-1)^n \, y^n \, \Sigma (-1)^k \, \mathfrak{v}_k^n \, t^k,$$

apparet, coëfficientem potestatis t^k in evolvendo producto $t\,(t+1)\ldots(t+n$ $= (-1)^{n+k} \, y^n \, \mathfrak{v}_k^n$; quamobrem, si coëfficientes facultatis designantur ut solen

) $$t\,(t+1)\ldots(t+n-1) = \sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n \, t^{n-k},$$

coëfficientes C et terminos $\mathfrak{v}$ hae relationes intercedunt:

) $$\mathfrak{v}_k^n = \frac{(-1)^{n+k}}{y^n} C_{n-k}^n; \qquad C_k^n = (-1)^k \, y^n \, \mathfrak{v}_{n-k}^n.$$

Itaque coëfficientes C et ipsos independente formula expressos habemu

'5) $$C_k^n = (-1)^k (n+k)(n+k-1)_{2k} \Sigma(-1)^h \frac{(2k)_{k+h}}{(n+h)\,h!} E_{k+h}^h.$$

Sed ad numericos valores coëfficientium C computandos formulae recur
ıres sunt; ad quas celeriter e f. (14*) pervenimus; ea enim docet: $y\,\mathfrak{v}_{k+1}^{n+1}$
$)_x \mathfrak{v}_{k+1}^n$ ob eamque rem: $C_{n-k}^{n+1} = C_{n-k}^n + n\,C_{n-k-1}^n$ sive:

6) $$C_k^{n+1} = C_k^n + n\,C_{k-1}^n;$$

relatio, cum non ignoremus esse: $C_n^n = 0$, $C_0^n = 1$, omnes deinceps v
icientium C suppeditat.

3. Terminos $\mathfrak{u}$ aeque ad theoriam facultatum pertinere ex ipsa f. (4)
nam ejus ope habemus:

7) $$\Sigma y^{-k} \mathfrak{u}_k^n\, t(t-1)\ldots(t-k+1) = t^n,$$

evoluto producto $t(t-1)\ldots(t-k+1)$ n aequationes profluunt, quibus
s $y^{-k}\mathfrak{u}_k^n$ satisfacere debent; reperitur hoc modo:

3) $$y^{-k}\mathfrak{u}_k^n = A_k^n,$$

nante A_k^n determinans partiale, in quod abit:

) $$A^n = \begin{vmatrix} C_0^1, & C_1^2, & \ldots & C_{n-1}^n \\ 0 & C_0^2, & \ldots & C_{n-2}^n \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & C_0^n \end{vmatrix}$$

ersu et $k$ta columna sublatis. — Numerici valores quantitatum A_k^n sim
supra formulis recurrentibus obtinentur; sequitur enim e f. (13) propter
:

'0) $$A_{k+1}^{n+1} = A_k^n + (k+1)\,A_{k+1}^n,$$

relatio ad omnes deinceps valores coëfficientium A computandos sufficit,
ıt esse: $A_1^n = 1$, $A_n^n = 1$.

4. Si facultas $t(t+1)\ldots(t+n-1)$ repraesentatur nota $F(t,n)$, erit:

1) $$\mathfrak{v}_k^n = \frac{(-1)^{n+k}}{k!\,y^n}\,[D_t^k F(t,n)]_{(t=0)};$$

ım ostendemus, etiam terminos $\mathfrak{u}$ ut derivatas functionis $F(t,n)$ exhiberi p
odo latior vis ipsius $F(t,n)$ constituatur. Definiamus igitur facultatem F
rmulis:

2) $$\begin{cases} F(t,m+1) = (t+m)\,F(t,m) \\ \qquad F(t,0) = 1, \end{cases}$$

ıante m quemlibet numerum integrum, vel positivum, vel negativum. De
: $m = -k-1$ sequitur:

$$t\,F(t,-k-1) = F(t,-k) + (k+1)\,F(t,-k-1);$$

ıta $n$ta derivata secundum variabilem $\tau = \frac{1}{t}$, erit evanescente τ:

$$(t, -k)]_{(\tau=0)} + (k+1)\,[D_\tau^n F(t, -k-1)]_{(\tau=0)} = (D_\tau^n\,[t\,F(t, -k-1)])_{(\tau=0)}$$
$$= \frac{1}{n+1}\,[D_\tau^{n+1} F(t, -k-1)]_{(\tau\ldots}$$

si brevitatis causa ponitur:

3) $$\frac{1}{n!}\,[D_\tau^n F(t, -k)]_{(\tau=0)} = B_k^n,$$

4) $$B_{k+1}^{n+1} = B_k^n + (k+1)\,B_{k+1}^n.$$

Coëfficientes B igitur eandem conditionem recurrentem implent atque co s A ob eamque rem cum his omnino congruent, si valeant relationes $B_1^n =$ 1; eae autem certe valent; nam cum e definitione ipsius $F(t, n)$ sequatur:

5) $$F(t, -k) = \frac{1}{(t-1)(t-2)\ldots(t-k)},$$

^{n} coëfficiens potestatis t^{-n} in functione $F(t, -k)$ secundum potestates cade t evolvenda. Ergo invenimus:

3) $$\mathfrak{u}_k^n = \frac{1}{n!}\,y^k\left[D_\tau^n F\left(\frac{1}{\tau}, -k\right)\right]_{(\tau=0)},$$

denotationem:

7) $$\frac{1}{(t-1)(t-2)\ldots(t-k)} = \sum_{h=k}^{h=\infty} C_{h-k}^{-k}\,t^{-h}$$

ucimus, $\mathfrak{u}_k^n = y^k\,C_{n-k}^{-k}$, atque:

3) $$C_{n-k}^{-k} = y^{-k}\,\mathfrak{u}_k^n = \frac{1}{k!}\,E_n^k = \frac{1}{k!}\,[D_\xi^n (e^\xi - 1)^k]_{(\xi=0)}.$$

Numerici autem valores coëfficientium C_{n-k}^{-k} petentur e formula recurre $= C_{n-k}^{-k} + (k+1)\,C_{n-k-1}^{-k-1}$, vel:

9) $$C_n^{-k} = C_n^{-k+1} + k\,C_{n-1}^{-k},$$

cum f. (96) omnino congruit.

(Annotatio 9.)

§ 19.

De casu $y = \cos x$, $y = \sin x$.

Manat e f. (34):

$$u_k^n\,\{y = \cos x\} = \frac{1}{k!}\,(D_\xi^n\,[\cos(x+\xi) - \cos x]^k)_{(\xi=0)}$$

0) $$= \frac{(-1)^k\,n_k}{2^{n-k}}\,\Sigma(n-k)_{h-k}\left[D_\xi^{h-k}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^k\right]_{(\xi=0)} D_x^{n-h}\sin^k x;$$

similiter:

1) $$u_k^n\,\{y = \sin x\} = \frac{n_k}{2^{n-k}}\,\Sigma(n-k)_{h-k}\left[D_\xi^{h-k}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^k\right]_{(\xi=0)} D_x^{n-h}\cos^k x.$$

Deinde e f. (32), adhibitis formulis notissimis:

2) $$\begin{cases}\cos^h x = 2^{-h}\,\Sigma h_p \cos(h-2p)\,x,\\ \sin^h x = 2^{-h}\,\Sigma(-1)^p\,h_p \cos\left[(h-2p)\,x - \frac{h\pi}{2}\right],\end{cases}$$

le ad has expressiones pervenitur:

113) $u_k^n \{y = \cos x\} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{h,p} (-1)^h \frac{k_h\, h_p\, (h-2p)^n}{2^h} \cos^{k-h} x \cos \Big[(h-2p)\, x +$

114) $u_k^n \{y = \sin x\} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{h,p} (-1)^{h+p} \frac{k_h\, h_p (h-2p)^n}{2^h} \sin^{k-h} x \cos \Big[(h-2p) x + \frac{(n-}{}$

Ceterum patet, ope f. (32) et (112) etiam expressionem termini $u_k^n \{y =$ vi posse.

§ 20.

De casu $y = \ln y_1$, ubi $y_1 = \varphi_1(x)$.

Ad hunc casum tractandum f. (27) maxime idonea est, quippe quae t pro $y = \ln y_1$:

$$u_k^n = \frac{1}{k!} [D_t^k (y_1^{-t} D_x^n y_1^t)]_{(t=0)},$$

e ope formulae (4):

$$u_k^n = \frac{1}{k!} [D_t^k \sum (u_1)_h^n\, t(t-1) \ldots (t-h+1)\, y_1^{-h}]_{(t=0)},$$

gnante videlicet $(u_1)_h^n = u_h^n \{y_1 = \varphi_1(x)\}$. Ergo habemus secundum f. (93)

15) $$u_k^n = \sum (-1)^{k+h} C_{h-k}^h\, y_1^{-h} (u_1)_h^n,$$

relatio docet, terminos $u_k^n \{y = \ln \varphi_1(x)\}$ revocari posse ad terminos $(u_1)_h^n \{y_1 = \varphi$

(Annotatio 10.)

CAPUT VII.

QUO METHODUS GENERALIS TERMINOS u_k^n, v_k^n EXHIBEND OSTENDITUR.

§ 21.

Formae terminorum u_k^n, v_k^n capite III exhibitae sunt casus simplic essionum quarundam generaliorum, ad quas hac methodo pervenimus. Cur s u_k^n in formula $D_x^n z = \sum u_k^n D_y^k z$ ex indole functionis z non pendeat, int o loco ipsius z functiones speciales $z_1, z_2, \ldots z_n$, obtinebimus n aequatione s valores incognitorum $u_1^n, u_2^n \ldots u_n^n$ ope determinantium hauriemus. Itaqu minans introducatur:

16) $$\underset{y}{\varDelta}(z_1, z_2, \ldots z_n) = \begin{vmatrix} D_y z_1, & D_y^2 z_1, & \ldots & D_y^n z_1 \\ D_y z_2, & D_y^2 z_2, & \ldots & D_y^n z_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ D_y z_n, & D_y^2 z_n, & \ldots & D_y^n z_n \end{vmatrix} = \underset{y}{\varDelta^n};$$

autem designet id determinans partiale, in quod abit $\underset{y}{\varDelta^n}$ sublatis $h$to ver olumna. Quibus positis, statim haec expressio generalis termini u_k^n profer

$$u_k^n = \frac{(-1)^k}{\underset{y}{\Delta^n}} \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h \underset{y}{\Delta_{h,k}^n} D_x^n z_h \,.$$)

Quae, cum functiones z_h ad libidinem sumere liceat, modo ne determin nihilum redigant, magnam varietatem formarum comprehendit. Ceter determinantium docet, $\underset{y}{\Delta^n}$ non posse evanescere, nisi pro quibusdam val onstantium $c^{(h)}$ summa: $\sum_{h=1}^{h=n} c^{(h)} z_h$ valorem constantem induat (cf. Froben vol. 77, pag. 245).

In determinante $\underset{y}{\Delta^n}$ tam multae atque tam praeclarae proprietates insunt, ridem iis investigandis analystae studuerint. Ex quibus ad commutatior lium hoc potissimum theorema pertinet:

$$\underset{x}{\Delta^n} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \underset{y}{\Delta^n} \,,$$)

nultiplicando $\underset{y}{\Delta^n}$ cum U^n (22) atque ope f. (1) facile confirmatur.

(Annotatio 11.)

§ 22.

De casu $z_h = e^{a_h y}$.

$$\underset{y}{\Delta^n} = a_1 a_2 \ldots a_n e^{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) y} P(a_1, a_2, \ldots a_n) \,.$$)

$$P(a_1, a_2, \ldots a_n) = \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1, & a_2, & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1, & a_n, & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} ,$$)

leterminans aequale esse functioni alternanti:

$$\begin{aligned} P(a_1, a_2 \ldots a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) & \ldots (a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2) & \ldots (a_n - a_2) \\ \cdot \quad & \ldots \quad \cdot \\ \cdot \quad & \ldots (a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$)

num est. Partialis autem determinantis $P_{h,k}^n$ hoc modo valorem obtinebin

$$T(t) = (t - a_1)(t - a_2) \ldots (t - a_n),$$)

$$\frac{T(t)}{t - a_h} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \lambda_{h,k}^n t^k,$$)

inans $P_{h,k}^n$ sic transformetur, ut ad ultimam columnam ceterae addan deinceps factoribus $\lambda_{h,0}^n, \lambda_{h,1}^n, \ldots \lambda_{h,k-2}^n, \lambda_{h,k}^n, \ldots \lambda_{h,n-1}^n$; quo facto mem columnae hanc formam induunt:

$$\frac{T(a)}{a - a_h} - \lambda_{h,k-1}^n a^{k-1} = - \lambda_{h,k-1}^n a^{k-1};$$

ide, si ultima columna in locum $k$tae transfertur, obtinemus:

124) $$P^{n}_{h,k} = (-1)^{n-k} \lambda^{n}_{h,k-1} P(a_1, a_2, \dots a_{h-1}, a_{h+1} \dots a_n).$$

ue, cum sit:

125) $$\Delta^{n}_{h,k} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_h} \frac{e^{(a_1 + \dots + a_n) y}}{e^{a_h y}} P^{n}_{h,k},$$

ciscimur e formula generali:

$$u^{n}_{k} = (-1)^{n} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^{h} \lambda^{n}_{h,k-1}}{a_h e^{a_h y}} \frac{P(a_1, \dots a_{h-1}, a_{h+1} \dots a_n)}{P(a_1, \dots a_n)} D^{n}_{x} e^{a_h y}.$$

Sed propter (121) est:

$$\frac{P(a_1, \dots a_{h-1}, a_{h+1} \dots a_n)}{P(a_1 \dots a_n)} = \frac{1}{(a_h - a_1) \dots (a_h - a_{h-1}) (a_{h+1} - a_h) \dots (a_n - a_h)}$$
$$= \frac{(-1)^{n-h}}{T'(a_h)};$$

:

26) $$u^{n}_{k} = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\lambda^{n}_{h,k-1}}{a_h T'(a_h)} \frac{D^{n}_{x} e^{a_h y}}{e^{a_h y}}.$$

Coëfficientes $\lambda^{n}_{h,k-1}$ facile revocantur ad coëfficientes $\mathfrak{C}$ in evolutione:

27) $$T(t) = \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^{m} t^{n-m} \mathfrak{C}^{n}(a_m);$$

nim:

28) $$\lambda^{n}_{h,k} = \frac{1}{k!} \left[D^{k}_{t} \frac{T(t)}{t - a_h} \right]_{(t=0)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(a_h)^{k+1}} \sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{m} (a_h)^{m} \mathfrak{C}^{n}(a_{n-m}),$$

ia $\sum_{m=0}^{m=n} (-1)^{m} (a_h)^{n-m} \mathfrak{C}^{n}(a_m) = 0$, erit etiam:

29) $$\lambda^{n}_{h,k} = (a_h)^{n-k-1} \sum_{m=0}^{m=n-k-1} (-1)^{m+1} (a_h)^{-m} \mathfrak{C}^{n}(a_m).$$

Denique cum facile confirmetur esse: $\mathfrak{C}^{n}(a_{n-m}) = a_1 \dots a_n \mathfrak{C}^{n}\left(\frac{1}{a_m}\right)$, hal

:

30) $$\lambda^{n}_{h,k} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n}{(a_h)^{k+1}} \sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{m} (a_h)^{m} \mathfrak{C}^{n}\left(\frac{1}{a_m}\right).$$

Casu simplicissimo $a_h = h$, quo $\lambda^{n}_{h,k}$ abit in $L^{n}_{h,k}$ (81), revenimus ad f.

(Annotatio 12.)

§ 23.

De casu $z_h = y^{a_h}$.

1. Erit:

1) $$\Delta^{n} = \begin{vmatrix} a_1 y^{a_1 - 1}, & a_1 (a_1 - 1) y^{a_1 - 2}, & \dots & a_1 (a_1 - 1) \dots (a_1 - n + 1) y^{a_1 - n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n y^{a_n - 1}, & a_n (a_n - 1) y^{a_n - 2}, & \dots & a_n (a_n - 1) \dots (a_n - n + 1) y^{a_n - n} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{y^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}{y^{\frac{n(n+1)}{2}}} A^{n}.$$

$$2) \qquad A^n = \begin{vmatrix} a_1, & a_1(a_1-1), & \ldots & a_1(a_1-1)\ldots(a_1-n+1) \\ . & . & \ldots & . \\ a_n, & a_n(a_n-1), & \ldots & a_n(a_n-1)\ldots(a_n-n+1) \end{vmatrix}.$$

autem designet determinans partiale, in quod abit A^n sublatis $h$to versu e
na. Erit igitur:

$$3) \qquad \frac{A^n_{h,\,k}}{A^n} = y^{k-a_h}\frac{A^n_{h,\,k}}{A^n},$$

quaestio ad eruenda determinantia A^n, $A^n_{h,\,k}$ revocata sit.

2. Evolvendis productis $a_h(a_h-1)\ldots(a_h-k+1)$ facile cognoscitur,
psius A^n eundem esse atque valorem determinantis:

$$4) \qquad B^n = \begin{vmatrix} a_1, & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ . & . & \ldots & . \\ a_n, & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1, a_2 \ldots a_n\, P(a_1, a_2 \ldots a_n).$$

em determinantis $A^n_{h,\,k}$ autem hac via assequemur. Primum apparet, si pr
nae ejus, coëfficientibus quibus opus est affectae, ad posteriores adda
s determinantis $A^n_{h,\,k}$ in hanc formam redigi posse (cf. f. 93):

$$a^2, \ldots a^{k-1}, \sum_{r=0}^{r=1}(-1)^r C_r^{k+1} a^{k-r+1}, \sum_{r=0}^{r=2}(-1)^r C_r^{k+2} a^{k-r+2}, \ldots\ldots \sum_{r=0}^{r=n-k}(-1)^r C_r^n a^{n-}$$

facto, ejusmodi transformatio instituatur, ut ad ultimam columnam adda
$k+1$)ta, ... ($n-2$)ta, coëfficientibus quibusdam affectae; deinde ad paenult
ntur similiter: $k$ta, ($k+1$)ta, ... ($n-3$)ta, et ita porro; denique videlice
1)tam: $k$ta. Ex quibus $n-k-1$ operationibus ($n-k-m+1$)ta repraesen
formula: $\sum_{p=1}^{p=m} C_{m-p}^{-k-p} \sum_{r=0}^{r=p}(-1)^r C_r^{k+p} a^{k+p-r}$. Valor hujus summae duplicis, p
loco r ordineque summarum inverso facile reperitur:

$$= \sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r a^{k+r} \sum_{p=1}^{p=m}(-1)^p C_{m-p}^{-k-p} C_{p-r}^{k+p},$$

adhibitis formulis (94) et (108): $= \sum_{r=0}^{r=m} a^{k+r} \sum_{p=1}^{p=m} \mathfrak{u}_{p+k}^{m+k} \mathfrak{v}_{r+k}^{p+k}$; sed valorem sum
is e f. (16) non ignoramus esse $=1$, si $r=m$; $=0$, si $0<r<m$; $= -\mathfrak{u}_k^{\cdot}$
C_m^{-k}, si $r=0$; ergo versus determinantis $A^n_{h,\,k}$ hanc formam induunt:

$$a, a^2, \ldots a^{k-1}, a^{k+1} - C_1^{-k} a^k, a^{k+2} - C_2^{-k} a^k, \ldots\ldots a^n - C_{n-k}^{-k} a^k.$$

discerpatur determinans $A^n_{h,\,k}$ secundum columnas partiales in hoc aggreg
minantium:

$$35) \qquad A^n_{h,\,k} = \sum_{r=0}^{r=n-k}(-1)^r C_r^{-k} B^n_{h,\,k+r};$$

o deinde:

$$B^n_{h,\,k+r} = \frac{a_1 \ldots a_n}{a_h} P^n_{h,\,k+r} = (-1)^{n-k-r} \frac{a_1 \ldots a_n}{a_h} \lambda^n_{h,\,k+r-1} P(a_1 \ldots a_{h-1}, a_{h+1} \ldots a_n),$$

scimur:

136) $$\frac{A^{n}_{h,k}}{A^{n}} = \frac{(-1)^{k+h}}{a_h\, T'(a_h)} N, \quad \text{ubi: } N = \sum_{r=0}^{r=n-k} C_r^{-k} \lambda^{n}_{h,k+r-1}.$$

Summa N quid significet, cognoscitur ex evolutionibus:

$$\frac{T(t)}{t-a_h} = \sum_{p=0}^{p=n-1} \lambda^{n}_{h,p}\, t^p \quad \text{et} \quad \frac{1}{(t-1)(t-2)\dots(t-k)} = \sum_{q=k}^{q=\infty} C^{-k}_{q-k}\, t^{-q};$$

igitur N coëfficiens potestatis $t^{-(n-k)}$ in quotiente: $\dfrac{T(t)}{t^{n-k-1}(t-a_h)(t-1)(t-2)}$
undum potestates cadentes ipsius t evolvendo, sive coëfficiens potestatis
tiente: $\dfrac{(1-a_1\tau)(1-a_2\tau)\dots(1-a_n\tau)}{(1-a_h\tau).(1-\tau)(1-2\tau)\dots(1-k\tau)}$ secundum potestates crescentes i
lvendo: ita ut sit:

137) $$\frac{A^{n}_{h,k}}{A^{n}} = \frac{(-1)^{k+h}}{a_h\, T'(a_h)} \frac{1}{(n-k)!} \left[D^{n-k}_{\tau} \frac{(1-a_1\tau)(1-a_2\tau)\dots(1-a_n\tau)}{(1-a_h\tau).(1-\tau)(1-2\tau)\dots(1-k\tau)} \right]_{(\tau=0)}.$$

Sed coëfficiens N etiam in formam habiliorem redigi potest, quam hoc
eriemus. Primum facile confirmatur esse:

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)\dots(t-k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=0}^{p=k} (-1)^p k_p \frac{1}{1-\frac{p}{t}};$$

de habetur:

$$\frac{1}{1-\frac{p}{t}} = \sum_{q=0}^{q=\infty} p^q t^{-q} \quad \text{atque} \quad \frac{T(t)}{t-a_h} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \lambda^{n}_{h,r}\, t^r,$$

us introductis nascitur aequatio:

$$\frac{T(t)}{(t-a_h)(t-1)(t-2)\dots(t-k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{q=0}^{q=\infty} (-1)^p k_p\, p^q \lambda^{n}_{h,r}\, t^{r-q}.$$

item est coëfficiens potestatis t^{-1} ob eamque rem invenitur ponendo $q=$
ut sit:

38) $$N = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=0}^{p=k} (-1)^p p\, k_p \sum_{r=0}^{r=n-1} \lambda^{n}_{h,r}\, p^r = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p=0}^{p=k} (-1)^p p\, k_p \frac{T(p)}{p-a_h}.$$

39) $$\frac{A^{n}_{h,k}}{A^{n}} = \frac{(-1)^h}{a_h (k-1)!\, T'(a_h)} \Sigma (-1)^p (k-1)_{p-1} \frac{T(p)}{p-a_h}.$$

3. Haec denique est formula finalis, qua exhibetur u^{n}_{k}:

40) $$u^{n}_{k} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{y^{k-a_h}}{a_h\, T'(a_h)} D^{n}_{x} y^{a_h} \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p (k-1)_{p-1} \frac{T(p)}{p-a_h},$$

$$\text{ubi:} \quad T(t) = (t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n).$$

Casu simplicissimo $a_h = h$ e f. (140) revenimus ad f. (32); sed is
sine ope formulae (140) facile peragitur.

(Annotatio 13.)

PARS II.

DE DERIVATIS ALTIORIBUS.

CAPUT VIII.

DE FUNCTIONUM COMPOSITIONE.

§ 24.

nutatio variabilium, quam parte superiore tractavimus, tamquam praepar e instrumentum ad ipsam theoriam derivatarum altiorum, in qua haec quae lis proponitur:

> exhibere independente expressione $n$tam derivatam functionis z quol modo e functionibus simplicibus $(a + bx)^{\alpha}$, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, arc si arc tan x compositae.

amus tamen ab integralibus, seriebus infinitis, fractionibus continuis.

Sunt duae rationes, quibus functiones compositae nascantur, quarum una functio aliqua pro variabili nova functio substituatur, altera, ut duae plur nes additione aut multiplicatione conjungantur; — est enim notandum, on iones, quibus duae functiones connectantur, aut ad additionem, aut ad m onem revocari posse, cum habeatur $y^z = e^{z \ln y}$ et ${}^z\!\log y = \ln y\,(\ln z)^{-1}$. Illa um prior appelletur compositio *per substitutionem*, posterior compositio *ationem*; ex. gr. functio $\ln \sin x$ composita est per substitutionem, $\ln x + s$ vel $\ln x \,.\, \sin x$ per combinationem.

Expressio functionis compositae z variabilem x aut semel aut saepius c dit, de qua re hoc est pro certo habendum: ut saepius occurrat x, non e nisi combinatione; contra, si semel tantum adsit x, functionem z per s utiones posse construi.

Denotet $\mathfrak{S}(\eta)$ functionem ipsius η, in qua η semel tantum occurrat, $\mathfrak{C}(\xi', \xi'',$ functionem, quae ex qualibet combinatione functionum $\xi', \xi'' \ldots$ prodierit,

$\mathfrak{C}$ sit functio integra functionum $\xi', \xi'', \ldots$; eandem brevitatis causa scri
ξ).

Proponatur functio composita variabilis x: $z = \mathfrak{S}(\eta)$, denotante η
n ipsius x. Quod si habetur $\eta = \mathfrak{S}_1(\eta_1)$, erit: $z = \mathfrak{S}[\mathfrak{S}_1(\eta_1)] = \mathfrak{S}_2(\eta_1$
ndo eadem via intelligimus, functionem $z = \mathfrak{S}(\eta)$ semper redigi posse in f
$= \mathfrak{S}_k(\eta_k)$, ubi η_k sit aut $= x$, aut functio per combinationem composita.

Eodem fere modo id quoque intelligitur, functionem $z = \mathfrak{C}(\xi', \xi'', \ldots)$
nsformari posse in $z = \mathfrak{C}_1(\xi_1', \xi_1'', \ldots)$, ubi $\xi_1', \xi_1'' \ldots$ aut sint $= x$, aut su
nibus ortae, ita ut habeatur $\xi_1 = \mathfrak{S}_1(\eta_1)$.

Quibus rebus cognitis, quasi schema generale cujuslibet functionis com
iberi potest. Primum enim cuilibet functioni compositae z hanc formam t
t: $z = \mathfrak{C}_1(\xi_1)$, ubi functiones ξ_1 substitutionibus ortae sint; deinde h
$= \mathfrak{S}_1(\eta_1)$; $\eta_1 = \mathfrak{C}_2(\xi_2)$; $\xi_2 = \mathfrak{S}_2(\eta_2)$, et ita porro, unde patet, hoc esse
nerale ipsius z:

$$z = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{C}_k \mathfrak{S}_k(x).$$

CAPUT IX

DE FUNCTIONUM COMPOSITARUM DERIVATIS ALTIORIBU

§ 25.

1. De casu $z = \mathfrak{C}(\xi)$.

Derivata $D_x^n \mathfrak{C}(\xi', \xi'', \ldots)$, cum $\mathfrak{C}$ sit functio integra functionum ξ',
per revocari potest ad derivatas ipsarum $\xi', \xi'', \ldots$

2. De casu $z = \mathfrak{S}(x)$.

Functio $\mathfrak{S}(x)$ hoc modo discerpi potest: $\mathfrak{S}(x) = f_1(x_1)$, $x_1 =$
$= f_3(x_3), \ldots x_{k-1} = f_k(x)$, designantibus $f_1, f_2, \ldots f_k$ functiones simplices.
mutatione variabilium saepius adhibita, oritur series aequationum, quibus
ır: $D_x^n \mathfrak{S}(x)$ per $D_{x_{k-1}}^h \mathfrak{S}(x)$, $D_{x_{k-1}}^h \mathfrak{S}(x)$ per $D_{x_{k-2}}^r \mathfrak{S}(x), \ldots D_{x_2}^p \mathfrak{S}(x$
$\mathfrak{S}(x)$, ita ut denique derivatam $D_x^n \mathfrak{S}(x)$ per $D_{x_1}^q \mathfrak{S}(x) = D_{x_1}^q f_1(x_1)$ expr
ıamus. Quam rem semper sine difficultate peragi posse apparet, cum
abiles mutandas relationes simplicissimae intercedant (cf. cap. VI).

3. De casu generali.

Jam aggrediamur ad derivatam $D_x^n \mathfrak{C}_1 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{C}_k \mathfrak{S}_k(x)$, quam
vemus, si alternis vicibus iis utemur, quae sub 1. et 2. explicavimus.

Primum enim licet revocare $D_x^n \mathfrak{C}_1$ ad $D_x^h \mathfrak{S}_1$, deinde $D_x^h \mathfrak{S}_1$ ope f. (4
vatas $\frac{d^r \mathfrak{S}_1}{(d\mathfrak{C}_2)^r}$ et $D_x^h (\mathfrak{C}_2)^r$, quarum priorem exhiberi posse sub 2. vidimus; D_x

quia $\mathfrak{G}_2$ est functio integra quantitatum $\mathfrak{S}_2$, pertinet ad derivatas $D_x^p\,\mathfrak{S}_2$, et res ulteriore explicatione.

§ 26.

Saepe evenit, ut derivatae ejusdem functionis non modo diversis form entari queant, verum etiam adeo inter se distantibus, ut maximi nonnunqu egotii, identitatem illarum directe demonstrare.

Quod quare fiat, facile intelligitur. Neque enim una tantum ratio functio endi habetur, sed saepe plures in promptu sunt, nec necesse est eam sol i, quam generalem § 24 docuimus.

Accedit etiam, quod licet loco ipsius $D_x^n z$ substituere: $D_x^{n-1} z'$, $D_x^{n-2} z''$, $^{n+1} z_1$, $D_x^{n+2} z_2$, ..., quo facto res ad discerpendas functiones:

$$z' = D_x z,\quad z'' = D_x^2 z,\ \ldots \qquad z_1 = \int z\,dx,\quad z_2 = \int z_1\,dx\ \ldots$$

a est.

(Annotatio 14.)

PARS III.

EXEMPLA.

I. *De derivata* $\Delta^n(\alpha, \beta, \mu) = D^n[(x-\alpha)(x-\beta)]^\mu$.

§ 27.

Formulae generales. Proposita functione $z = [(x-\alpha)(x-\beta)]^\mu$ hae p
discerpendi:

I. $z = (x-\alpha)^\mu . (x-\beta)^\mu$; ergo:

1) $$\Delta^n(\alpha, \beta, \mu) = \frac{n!\,(x-\beta)^n}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^{n-\mu}} \Sigma\, \mu_k\, \mu_{n-k} \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^k.$$

II. $z = \left[y - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]^\mu$, ubi $y = \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$; ergo sec. f. (85):

2) $$\Delta^n(\alpha, \beta, \mu) = \frac{2^n\, n!\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^{n-\mu}} \Sigma\, \mu_{n-k}\,(n-k)_k \left[\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{4\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}\right]^k.$$

III. $z = y^\mu$, ubi $y = \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$. Adhibeatur f. (44); e
deinde:

) $$y^k = \Sigma(-1)^{k-h} k_h \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^{2(k-h)} \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{2h}$$

erentiando reperiemus:

$$\Delta^n(\alpha, \beta, \mu) = (-1)^n \mu(\mu-1)_n\, n! \sum_{h,k} (-1)^h \frac{n_k\, k_h\,(2h)_n}{\mu-k} \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^{2(k-h)} \frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{2h-n}}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^{k-\mu}}$$

IV. Si μ est numerus integer positivus, $= m$, licet evolvere $[(x-\alpha)(x-$
um f. (143); quo facto adipiscimur:

) $$\Delta^n(\alpha, \beta, m) = \frac{(-1)^m\, n!\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^{2m}}{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n} \Sigma(-1)^k\, m_k\,(2k)_n \left(\frac{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)^{2k}.$$

Sed licet evolvere $[(x-\alpha)(x-\beta)]^m$ etiam secundum potestates ipsius $(x$
$-\beta)$, ponendo videlicet $x-\alpha=x_1$ atque $[(x-\alpha)(x-\beta)]^m = x_1^m (x_1+\alpha-$
profluit:

$$\Delta^n(\alpha,\beta,m) = \frac{n!(\alpha-\beta)^m}{(x-\alpha)^{n-m}} \Sigma\, m_k (m+k)_n \left(\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)^k . \tag{6)}$$

V. Denique, si μ est numerus integer negativus, $=-m$, habemus pri
onibus partialibus adhibitis:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^m(x-\beta)^m} = \sum_{k=0}^{k=m-1} A_k (x-\alpha)^{-m+k} + \sum_{k=0}^{k=m-1} B_k (x-\beta)^{-m+k},$$

$$\text{ubi } A_k = (-1)^k (m+k-1)_k (\alpha-\beta)^{-m-k},$$
$$B_k = (-1)^k (m+k-1)_k (\beta-\alpha)^{-m-k};$$

e:

$$\Delta^n(\alpha,\beta,-m) = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha-\beta)^m} \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(m+k-1)_k (n+m-k-1)_n}{(\alpha-\beta)^k} \left[\frac{(-1)^k}{(x-\alpha)^{m+n-k}} + \frac{(-1)}{(x-\beta)^{m+}}\right.$$

§ 28.

De casu $\mu=-1$. Ponendo praeterea $\alpha=+i$, $\beta=-i$, $n=n-1$,
nur derivatam $D^n \operatorname{arc\,tan} x = D^{n-1}(1+x^2)^{-1}$, et eam quidem diversis f
itam, prout aut f. (141), aut (142), aut (147) adhibemus.

$$D^n \operatorname{arc\,tan} x = (-1)^{n+1}(n-1)!\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n \Sigma (-1)^k \frac{n_{2k+1}}{x^{2k+1}}, \tag{48)}$$

$$D^n \operatorname{arc\,tan} x = \frac{(n-1)!}{(2x)^{n+1}} \Sigma (-1)^k k_{n-k-1} \left(\frac{4x^2}{1+x^2}\right)^{k+1}, \tag{49)}$$

$$D^n \operatorname{arc\,tan} x = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{x}\right). \tag{50)}$$

(Annotatio 15.)

§ 29.

De casu $\mu=-\frac{1}{2}$.

1. Formulae generales.

Casus $\mu=-\frac{1}{2}$ cum magnam varietatem formularum specialium compl
dignus videtur, quem accuratius pertractemus. Primum formulae (141),
editant:

$$\Delta^n(\alpha,\beta,-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^n n!(x-\beta)^n}{2^{2n}[(x-\alpha)(x-\beta)]^{n+\frac{1}{2}}} \Sigma (2k)_k (2n-2k)_{n-k} \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^k . \tag{51)}$$

$$\Delta^n(\alpha,\beta,-\tfrac{1}{2}) = \frac{n!}{2^n\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} \Sigma (-1)^k n_k (2k)_n \left[\frac{\left(x-\frac{\alpha+}{2}\right.}{(x-\alpha)(x-}\right. \tag{52)}$$

Sed formula (152) comparata cum f. (145), singularis quaedam relati
it; e f. (145) enim, ponendo $m=n$, $\alpha=+1$, $\beta=-1$, $x=x_1$, trabimu

53) $$D_{x_1}^n (x_1^2-1)^n = \frac{(-1)^n n!}{x_1^n} \Sigma(-1)^k n_k (2k)_n x_1^{2k};$$

re apparet valere relationem notabilem:

54) $$\Delta^n(\alpha,\beta,-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^n}{2^n[(x-\alpha)(x-\beta)]^{\frac{n+1}{2}}} D_{x_1}^n (x_1^2-1)^n,$$

$$\text{ubi } x_1 = \frac{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}.$$

Itaque derivatam quaesitam $\Delta^n(\alpha,\beta,-\frac{1}{2})$ videmus revocatam ad $D_{x_1}^n (x_1^2$ - … cum liceat ultra transformare ope f. (141), (142), (146), perveniemu… nas secundum potestates quantitatum $\frac{x_1-1}{x_1+1}$, $\frac{x_1^2-1}{4x_1^2}$, $\frac{x_1-1}{2}$ vel $\frac{x_1+1}{2}$ p… s. Substituto denique valore ipsius x_1 hae formulae finales prodibunt:

$$\Delta^n(\alpha,\beta,-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^n n!\left[x-\frac{\alpha+\beta}{2}+\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\right]^n}{2^n[(x-\alpha)(x-\beta)]^{n+\frac{1}{2}}} \Sigma(n_k)^2 \left(\frac{x-\frac{\alpha+\beta}{2}-\sqrt{(x-\alpha)(x-\ldots}}{x-\frac{\alpha+\beta}{2}+\sqrt{(x-\alpha)(x-\ldots}}\right.$$

$$= \frac{(-1)^n n!\left[x-\frac{\alpha+\beta}{2}+\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\right]^n}{2^n[(x-\alpha)(x-\beta)]^{n+\frac{1}{2}}} \Sigma(n_k)^2 \left(\frac{x-\frac{\alpha+\beta}{2}-\sqrt{(x-\alpha)(x-\ldots}}{\frac{\alpha-\beta}{2}}\right.$$

$$\Delta^n(\alpha,\beta,-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^n n!\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^{n+\frac{1}{2}}} \Sigma n_{2k} (2k)_k \left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)^{2k}.$$

$$\Delta^n(\alpha,\beta,-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^n n!}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^{\frac{n+1}{2}}} \Sigma n_k (n+k)_n \left(\frac{x-\frac{\alpha+\beta}{2}-\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}{2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}\right)^k$$

$$= \frac{n!}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^{\frac{n+1}{2}}} \Sigma(-1)^k n_k (n+k)_n \left(\frac{x-\frac{\alpha+\beta}{2}+\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}{2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}\right)^k.$$

2. $D^n \arcsin x$. Cum habeatur $D^n \arcsin x = D^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = i^{-1} D^{n-1}(x^2-1$… …ulis sub 1. erit substituendum: $\alpha=+1$, $\beta=-1$, $n=n-1$; quibus po… …rmulae deinceps proveniunt:

…) $$D^n \arcsin x = \frac{(n-1)!(1+x)^{n-1}}{2^{2(n-1)}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}} \Sigma(-1)^k (2k)_k (2n-2k-2)_{n-k-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k.$$

…) $$D^n \arcsin x = \frac{(n-1)!}{(2x)^{n-1}\sqrt{1-x^2}} \Sigma(2k)_k k_{n-k-1} \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^k.$$

…) $$D^n \arcsin x = \frac{(n-1)!\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}}{2^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}} \Sigma[(n-1)_k]^2 \left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^k,$$

…sito $x=\cos\tau$ parteque imaginaria rejecta:

$$) \quad D^n \arcsin x = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}(\sin\tau)^{2n-1}} \Sigma [(n-1)_k]^2 \cos(n-2k-1)\tau .$$

$$2) \quad D^n \arcsin x = \frac{(n-1)!\, x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}} \Sigma (n-1)_{2k} (2k)_k \left(\frac{1}{2x}\right)^{2k} .$$

$$3) \quad D^n \arcsin x = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2-1)^{\frac{n}{2}}} \Sigma (n-1)_k \, (n+k-1)_k \left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^k ,$$

osito $x = \cos\tau$:

$$D^n \arcsin x = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}(\sin\tau)^{2n-1}} [\Sigma(-1)^k (n-1)_{2k} (2n-2k-2)_{n-1} (2\sin\tau)^{2k} \cos(n-2k-$$
$$+ \Sigma(-1)^k (n-1)_{2k+1} (2n-2k-3)_{n-1} (2\sin\tau)^{2k+1} \sin(n-2k-2$$

(Annotatio 16.)

3. *De functionibus sphaericis (Kugelfunctionen).*

Functionem sphaericam $P^{(n)}(t)$ constat definiri ut coëfficientem potestati
olutione:

$$5) \qquad (1-2tx+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} x^n P^{(n)}(t).$$

nus igitur:

$$6) \qquad P^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} [D_x^n (1-2tx+x^2)^{-\frac{1}{2}}]_{(x=0)} ,$$

ue nostris adhibitis erit:

$$\alpha = t+\sqrt{t^2-1}, \quad \beta = t-\sqrt{t^2-1}, \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = t, \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{t^2-1}, \quad \alpha\beta = 1.$$

s introductis manat e f. (154):

$$7) \qquad P^{(n)}(t) = \frac{D_t^n (t^2-1)^n}{2^n n!} .$$

Jam e formulis (151) — (157) hae deinceps expressiones functionum sp
m hauriuntur:

$$8) \qquad P^{(n)}(t) = \frac{1}{2^{2n}} \Sigma (2k)_k (2n-2k)_{n-k} (t+\sqrt{t^2-1})^{n-2k} ,$$

rigonometrice, posito $t = \cos\tau$:

$$9) \qquad P^{(n)}(\cos\tau) = \frac{1}{2^{2n}} \Sigma (2k)_k (2n-2k)_{n-k} \cos(n-2k)\tau .$$

$$0) \qquad P^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n} \Sigma (-1)^k n_k (2k)_n t^{2k-n} .$$

$$1) \qquad P^{(n)}(t) = \left(\frac{t-1}{2}\right)^n \Sigma (n_k)^2 \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^k ,$$

trigonometrice:

$$2) \qquad P^{(n)}(\cos\tau) = (-1)^n \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2n} \Sigma (-1)^k (n_k)^2 \left(\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right)^{2k} .$$

$$3) \qquad P^{(n)}(t) = t^n \Sigma n_{2k} (2k)_k \left(\frac{t^2-1}{4t^2}\right)^k ,$$

trigonometrice:

74) $$P^{(n)}(\cos\tau) = (\cos\tau)^n \,\Sigma(-1)^k\, n_{2k}\,(2k)_k \left(\frac{\tan\tau}{2}\right)^{2k}.$$

75) $$P^{(n)}(t) = (-1)^n \,\Sigma(-1)^k\, n_k\,(n+k)_n \left(\frac{1+t}{2}\right)^k = \Sigma(-1)^k\, n_k\,(n+k)_n \left(\frac{1-t}{2}\right.$$

trigonometrice:

) $$P^n(\cos\tau) = (-1)^n \,\Sigma(-1)^k n_k (n+k)_n \left(\cos\frac{\tau}{2}\right)^{2k} = \Sigma(-1)^k\, n_k\,(n+k)_n \left(\sin\right.$$

§ 30.

1. *De casu* $\mu = n$, $n = n \pm m$.

Ostendemus hoc exemplo, quomodo etiam proprietates quaedam not ionum sphaericarum e formulis generalibus, quas supra dedimus, facile ntur. F. (142) suppeditat:

$$D^{n+m}(t^2-1)^n = \frac{(n+m)!\,(2t)^{n+m}}{(t^2-1)^m} \,\Sigma\, n_{n+m-k}\,(n+m-k)_k \left(\frac{t^2-1}{4t^2}\right)^k,$$

sito $-m$ loco m:

$$D^{n-m}(t^2-1)^n = (n-m)!\,(2t)^{n-m}(t^2-1)^m \,\Sigma\, n_{n-m-k}\,(n-m-k)_k \left(\frac{t^2-1}{4t^2}\right)^k.$$

rodit ex illa, substituto $k+m$ loco k:

$$D^{n+m}(t^2-1)^n = (n+m)!\,(2t)^{n-m} \,\Sigma n_k\,(n-k)_{m+k} \left(\frac{t^2-1}{4t^2}\right)^k;$$

propter relationem $n_k\,(n-k)_{m+k} = n_{n-m-k}\,(n-m-k)_k$ perspicuum est, as omnino congruere ob eamque rem haberi:

$$\frac{(t^2-1)^m D^{n+m}(t^2-1)^n}{(n+m)!} = \frac{D^{n-m}(t^2-1)^n}{(n-m)!}.$$

Denique, sumta *m*ta derivata secundum t formulaeque (167) ratione ha ur:

3) $$D^m\left[(t^2-1)^m D^m P^{(n)}(t)\right] = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P^{(n)}(t)$$

casu simplicissimo $m = 1$:

)) $$D\left[(t^2-1)\,D\,P^{(n)}(t)\right] = n(n+1)\,P^{(n)}(t).$$

(Annotatio 17.)

2. *De casu* $\mu = n + \frac{1}{2}$.

Posito: $\mu = n + \frac{1}{2}$, $\alpha = +1$, $\beta = -1$, emergit formula nota, quam pri ill. Jacobi (Crelle, vol. 15, pag. 1). Fluit enim e f. (142):

$$D^n(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{n!\,(2n+1)_n}{2^n}\, x^n \sqrt{x^2-1}\,\Sigma(n+1)_{2k+1}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^k,$$

ıbstituto $x = \cos\tau$:

$$D^n(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n\, n!\,(2n+1)_n}{2^n}\,(\cos\tau)^{n+1}\,\Sigma(-1)^k\,(n+1)_{2k+1}\,(\tan\tau)^{2k+1};$$

mmam $\Sigma(-1)^k (n+1)_{2k+1} (\tan \tau)^{2k+1}$ apparet esse factorem ipsius i in e potestate $(1+i \tan \tau)^{n+1} = e^{(n+1) i \tau} (\cos \tau)^{-(n+1)}$, ob eamque rem aequalem ni $\sin [(n+1)\tau] (\cos \tau)^{-(n+1)}$, unde concluditur:

$$) \qquad D^n (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n n! (2n+1)_n}{2^n} \sin [(n+1) \arc \cos x].$$

II. *De derivatis* $D^n \sec x$, $D^n \tan x$.

§ 31.

Derivatae functionum $\sec x$ et $\tan x$ variis formis exhiberi possunt. Prin evocare $\sec x$ et $\tan x$ ad functiones exponentiales; proposita enim functi c x, hae patent viae discerpendi: $z = 2(e^{ix} + e^{-ix})^{-1}$, $z = 2e^{ix}(1+2e^{i}$ $^{x}+i)^{-1} + (e^{ix}-i)^{-1}$, $z = D_y \ln (1+y^2)$, $y = e^{ix}$; proposita functione $z = t$ $= i[2(1+e^{2ix})^{-1} - 1]$. De his expressionibus satis habemus postremam volvere.

$$D^n \tan x = 2i D_x^n (1+e^{2ix})^{-1} = (2i)^{n+1} D_\tau^n (1+e^\tau)^{-1}$$

$$= (2i)^{n+1} (n+1) \sum_k n_k k^n e^{k\tau} \sum_h \frac{(-1)^h (n-k)_{h-k}}{h+1} (1+e^\tau)^{-(h+1)}$$

onendum $\tau = 2ix$. Summa prior si substituendo $n-h$ loco h et formula li XIV pro $a = -n-1$, $n = n-k$, $t = -1-e^\tau$, adhibenda transform :

$$D^n \tan x = \frac{(2i)^{n+1}}{(1+e^\tau)^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^n \sum_{h=0}^{h=n-k} (n+1)_h e^{(h+k)\tau}$$

$$= \frac{i}{(\cos x)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=n} e^{ix(n-2h-1) + \frac{ni\pi}{2}} \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k (n+1)_{k+h+1} k^n$$

$$1) \qquad = \frac{(-1)^n}{(\cos x)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=n} \sin \left[(2h-n+1) x + \frac{n\pi}{2}\right] \sum_{k=0}^{k=n\ h} (-1)^k (n+1)_{k+h+1} k^n;$$

co summae prioris etiam scribi potest:

$$(-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{k=h+1} (-1)^k (n+1)_{h-k+1} k^n.$$

§ 32.

Relationes: $D^n \sec x = D^n (\cos x)^{-1}$ et $D^n \tan x = D^{n-1} (\cos x)^{-2}$ docent q m etiam ad derivatam $D^n (\cos x)^\mu$ evolvendam revocari posse. Si μ est nu teger positivus $= m$, ope f. (112) facile obtinemus:

$$D^{2n+1} (\cos x)^m = \frac{(-1)^n}{2^{m-1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{m}{2}} m_h (m-2h)^{2n+1} \sin (m-2h) x,$$

$$D^{2n}(\cos x)^m = \frac{(-1)^n}{2^{m-1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{m}{2}} m_h (m-2h)^{2n} \cos(m-2h)x;$$

um posterior, si formulam ex analysi algebraica notam:

(82) $$\cos px = \tfrac{1}{2} \sum_k \frac{(-1)^k p(p-k)_k}{p-k} (2\cos x)^{p-2k}$$

bemus et ordinem summarum invertimus, hanc transformationem subit:

(83) $$D^{2n}(\cos x)^m = (-1)^n \sum_{k=0}^{k=\frac{m}{2}} \frac{(\cos x)^{m-2k}}{4^k} \frac{1}{m-2k} S^n_{m,k};$$

(84) $$D^{2n+1}(\cos x)^m = (-1)^{n+1} \sin x \sum_{k=0}^{k=\frac{m}{2}} \frac{(\cos x)^{m-2k-1}}{4^k} S^n_{m,k};$$

(85) $$S^n_{\mu,k} = \sum_{h=0}^{h=k} \mu_h (2k-\mu)_{k-h} (\mu-2h)^{2n+1}.$$

bri generalis summae $S^n_{m,k}$ id est proprium, ut valorem contrarium indua h substituitur $m-h$; hinc facile concluditur $S^n_{m,}$ evanescere, si $2k-m \geq$

Proposita potestate arbitraria $(\cos x)^\mu$, primum e f. (44) obtinemus:

$$D_x^{2n+1}(\cos x)^\mu = -\mu(\mu-1)_{2n+1} \sum_m \frac{(-1)^m (2n+1)_m}{\mu-m} (\cos x)^{\mu-m} D_x^{2n+1}(\cos x)^m,$$

ope f. (184):

$$D_x^{2n+1}(\cos x)^\mu = (-1)^n \mu(\mu-1)_{2n+1} \sin x \sum_m \frac{(-1)^m (2n+1)_m}{\mu-m} \sum_k \frac{(\cos x)^{\mu-2k-1}}{4^k} S^n_{m,}$$

$$= (-1)^n \mu(\mu-1)_{2n+1} \sin x \sum_k \frac{(\cos x)^{\mu-2k-1}}{4^k} \sum_m \frac{(-1)^m (2n+1)_m}{\mu-m} S^n_{m}$$

em summae prioris facile cognoscimus e relatione:

(86) $$S^n_{\mu,k} = \frac{1}{k!} \left[D_t^k D_\xi^{2n+1} (1+t)^{2k} \left(\frac{e^\xi + te^{-\xi}}{1+t} \right)^\mu \right]_{(\xi=0,\, t=0)};$$

ur enim propter f. (44):

$$\left[D_\xi^{2n+1} \left(\frac{e^\xi + te^{-\xi}}{1+t} \right)^\mu \right]_{(\xi=0)} = -\mu(\mu-1)_{2n+1} \sum \frac{(-1)^m (2n+1)_m}{\mu-m} \left[D_\xi^{2n+1} \left(\frac{e^\xi + te^{-\xi}}{1+t} \right)^m \right]_{(\xi=}$$

$$-\mu(\mu-1)_{2n+1} \sum \frac{(-1)^m (2n+1)_m}{\mu-m} S^n_{m,k} = S^n_{\mu,k},$$

(87) $$D_x^{2n+1}(\cos x)^\mu = (-1)^{n+1} \sin x \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\cos x)^{\mu-2k-1}}{4^k} S^n_{\mu,k},$$

(88) $$D_x^{2n}(\cos x)^\mu = (-1)^n \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\cos x)^{\mu-2k}}{(\mu-2k)\,4^k} S^n_{\mu,k}.$$

Ex his formulis, posito: $\mu = -1$, $\mu = -2$, qua re $S^n_{\mu,k}$ abit in:

$$S^n_{-1,k} = \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^{h+1} (2k+1)_{k-h} (2h+1)^{2n+1},$$

$$S_{-2,\,k}^{\,n} = 2^{2n+1} \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^{h+1} (2k+2)_{k-h} (h+1)^{2n+2},$$

tae functionum $\sec x$ et $\tan x$ statim profluunt, quae etiam in has formas ediguntur:

9) $$D^{2n} \sec x = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\sec x)^{2k+1}}{2k+1} \left[D_\tau^{2n+1} (\sin \tau)^{2k+1}\right]_{(\tau=0)},$$

0) $$D^{2n} \tan x = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(\sec x)^{2k}}{2k} \left[D_\tau^{2n} (\sin \tau)^{2k}\right]_{(\tau=0)}.$$

(Annotatio 18.)

ANNOTATIONES.

Ann. 1. (ad Praem. B.). — In definienda summa multiplice Hoppeum
secutus sum, cum ille summam multiplicem non definiat nisi certo o
nationis constituto, nostra autem definitio ex ordine aliquo non pendea
iderationem geometricam adhibui atque notionem *spatii* introduxi, quo c
utando ordine summarum disserere liceret.

Ann. 2. (ad cap. I.). — Hoc capite quaestio fundamentalis sensu latior
a est. Demonstrationem § 1 sub 2 allatam apud priores non reperi, neq
nos *reciprocos* et *inversos*, quos introduxi, animum illi intendisse videntur.

Ann. 3. (ad cap. II.). — Formulas hoc capite traditas ipse inveni. —
ocus est commemorandi formulas Hoppeanas:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(-1)^k u_{2k}^n = D_x^n \cos(y-\gamma) \\ \Sigma(-1)^k u_{2k+1}^n = D_x^n \sin(y-\gamma)\end{array}\right\} \gamma = y,$$

as ille incidit, dum in aliam rem inquirit quasque propter simplicitatem n
sse dicit, etsi ad investigandos terminos u_k^n non sint idoneae (Hoppe,
36). Eas vero, quas supra dedi, ad hanc rem peridoneas esse capite
li; ceterum formulas Hoppeanas esse casus speciales nostrarum (8) et (9)
facile intelligitur.

Ann. 4. (ad cap. III.). — Hoc capite expressiones principales terminc
tradidi, in quarum demonstratione cum admodum a prioribus discesse
de hac re disserere liceat.

Formulas (27), (28), (30), (31), in quas ego e relatione (6) incidi, a
um et Schloemilchium omnino non reperio commemoratas; atqui ipsa
nnium gravissima mihi videtur atque dignissima, cui nomen fundamentali
quia non solum ipsa simplice argumentatione eaque accurata innititur,
ceterae facillime inde profluunt; quin etiam eandem ad transformationem
, quam Hoppeus non sine negotio effecerit, peridoneam esse § 15 den

Priores auctores diversis methodis fundamenta hujus theoriae jacere co
Omnium formularum prima inventa est (32) ab Hoppeo atque ita demonstr
rma generali: $D_x^n z = \Sigma u_k^n D_y^k z$, substituendo $z = y$, $= y^2$, ... $= y^n$, n aeq
ducat, quibus deinceps inversis relationem: $k!\, y^{-k} u_k^n = \sum_{m=1}^{m=k} (-1)^{k+m} k_m\, y^{-m} D$
andam esse docet, quam ita confirmat, ut hac expressione termini u_k^n in
generalem introducta identitatem exsistere ostendat.

Schloemilchius formulam (32) quidem Hoppeo deberi, contractiorem au
Ubboni Meyero attribuendam esse judicat, qua in re cum eo non plane
Nam si non ipsam quidem (34) Hoppeus tradiderit, at contrahi posse s
aud ignoravit; reperitur enim apud eum (pag. 39) haec formula:

$$u_k^n = \frac{1}{k!} y^k \left[D_x^n \left(\frac{y}{\gamma} - 1 \right)^k \right]_{(\gamma = y)},$$

cum nostris (33) et (34) prope congruere manifestum est.

Ubbo Meyer autem, de quo dixi; paulo post Hoppeum, nec conscius,
, Hoppeanae commentationis, pulchram demonstrationem formulae (34) at
les dérivées d'une fonction de fonction," Grunert, Archiv der Math. und Ph
, 1847, pag. 96), quae his paucissimis continetur: summam $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} [D_\xi^n Y^k]_{(\xi=0)}$
patio in infinitum extenso mutationem non subeat (cf. f. 37), sic exhi
$\left[D_\xi^n \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} Y^k D_y^k f(y) \right]_{(\xi=0)}$; hanc autem summam cum functione $f(y-$
lum potestates ipsius Y ope theorematis Tayloriani evoluta omnino congru
aberi:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} [D_\xi^n Y^k]_{(\xi=0)} D_y^k z = [D_\xi^n f(y+Y)]_{(\xi=0)} = \left(D_\xi^n f[\varphi(x+\xi)] \right)_{(\xi=0)} = D_x^n z.$$

Cui argumentationi, quamvis simplicissimae, id tamen obstare Schloemilc
t, quod in theoremate Tayloriano nitatur; id enim non modo non utique va
etiam in systemate analyseos theoriam derivatarum praecedere non del
ipse novam demonstrationem formulae (34) proposuit, quae Hoppeanam
superat. Neque enim substituit in forma generali $z = y^h$, sicut Hoppe, ve
, atque loco $D_x^n y^n$ scribi posse: $[D_\xi^n (y+Y)^n]_{(\xi=0)} = \Sigma n_k\, y^{n-k} [D_\xi^n Y^k]_{(\xi=0)}$ os
einde ex aequatione:

$$\Sigma n_k\, y^{n-k} [D_\xi^n Y^k]_{(\xi=0)} = \Sigma n_k\, k!\, y^{n-k} u_k^n$$

randis potestatibus ipsius y valorem termini u_k^n concludit. — Sed id n
andum esse quam conclusum existimo, quia etiam quantitates u_k^n et $[D_\xi^n Y^k]$
ilem y comprehendunt; idcirco, ut in argumentatione illa rigor insit, conc
in $n+1$ quae dicitur adjungenda videtur, quod fieri posse Schloemilchi
ignificat.

Ann. 5. (ad cap. IV.). — E formulis hoc capite traditis (44)—(47) debe
eo (l. c. pag. 56, 57, 158—162); ceteras (48)—(68) ipse inveni. — Th

vatarum fons est permultarum relationum inter coëfficientes binomiales ntium, quae haud ita facile aliter demonstrari possunt; imprimis autem a formulae (62) et (63) pertinent, quarum hoc proprium est, ut in singulis summarum ordines derivatarum exponentesque potestatum simul mutentur posito $y=e^x$ et $y=x$ obtinemus e f. (64):

$$\sum_{h=1}^{h=n} n_h\,(a-th)^{h-1}\,(b+th)^{n-h}=\frac{(a+b)^n-b^n}{a},$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{1}{h}\,(a-th-1)_{h-1}\,(b+th)_{n-h}=\frac{(a+b)_n-b_n}{a},$$

relationes varios casus speciales continent.

Ann. 6. (ad cap. V.). — Formulae § 14. exhibitae, vel potius earum ıe, debentur Schloemilchio, qui principalem (76*) ejusmodi demonstravit, mate aequationum:

$$F'(x)=[D_\xi\, Y]_{(0)}\, f'(y)$$

$$F''(x)=[D_\xi^2\, Y]_{(0)}\, f'(y)+\frac{1}{2!}[D_\xi^2\, Y^2]_{(0)}\, f''(y)$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$F^{(n)}(x)=[D_\xi^n\, Y]_{(0)}\, f'(y)+\frac{1}{2!}[D_\xi^n\, Y^2]_{(0)}\, f''(y)+\ldots+\frac{1}{n!}[D_\xi^n\, Y^n]_{(0)}\, f^{(}$$

ıtas $f'(y)$, $f''(y)$, ... $f^{(n-1)}(y)$ eliminet; ostendit enim, si aequationes eps factoribus: $(n-1)_0\ [D_\xi^{n-1}\, \Phi^{-n}]_{(0)}$, $(n-1)_1\ [D_\xi^{n-2}\, \Phi^{-n}]_{(0)}$, ... $(n-1)_{n-1}\ [\Phi$ ae, addantur, prodire aequationem:

$$\Sigma (n-1)_{k-1}\, [D_\xi^{n-k}\, \Phi^{-n}]_{(0)}\, F^{(k)}(x)=\Sigma\, \frac{a^{(k)}}{k!}\, f^{(k)}(y),$$

$a^{(k)}=\Sigma\,(n-1)_{h-1}\,[D_\xi^h\, Y^k]_{(0)}\,[D_\xi^{n-h}\, \Phi^{-n}]_{(0)}=k!\,(n-1)_{k-1}\,[D_\xi^{n-k}\,(\Phi^{-n+k-1}\, Y$

, propter $Y=\xi\,\Phi$ et $Y'=\xi\,\Phi'+\Phi$, $\frac{a^{(n-k)}}{(n-k)!}$ evanescere pro $k>0$ et aec pro $k=0$. Inde statim profluit f. (76*); eandem Schloemilchius etiam ne ex n in $n+1$ facta confirmavit. — Demonstrationes, quas ipse § 12 a oemilchiana eo potissimum differunt, ut formulam (69) ad theoremata quae ıliora de potestatum derivatis revocent. —

Formula (82) debetur Hoppeo, sed longe aliter eam demonstravit, de ann. 12.

Ann. 7. (ad § 16.). — Haec res a prioribus non commemoratur, ut pa erspecta videatur. Neque enim Schloemilchius, si id animadvertisset, pos casus $y=x^2$, $y=e^x$ tractavit, ad casus $y=\sqrt{x}$, $y=\ln x$ peragendos, ad illos revocare potuit, novum calculum eumque latiorem iniisset.

Ann. 8. (ad § 17.). — Formulae (84), (85), (87) debentur Hoppeo; for 6*) primus tradidit Schloemilchius (Crelle, vol. 32, pag. 1.)

Ann. 9. (ad § 18.). — Neglecta ea re, quam § 16 observavi, investig
i $u_k^n \}y = \ln x\{$ et coëfficientium C_k^n non vacat difficultatibus. Itaque pos
Hoppeus frustra conatus est coëfficientes C_k^n directe evolvere, atque et
), num id fieri posset, dubitavit (pag. 102), Schloemilchio denique contigit
as (91*) et (95) reperiret (Crelle, vol. 44, pag. 344), sed cum non ut s
ex illa, verum illam ex hac deduceret, rem non sine ambagibus quibusdam
adduxit.

Ann. 10. (ad § 20.). — Casum $y = \ln \varphi_1(x)$ etiam Hoppeus tractavit (pag.
sed relationem simplicem (115) apud eum non reperi.

Ann. 11. (ad § 21.). — Ad hanc disquisitionem generaliter instituendam
entandi ratione adductus sum, qua Hoppeus et formulam (32) et f. (126)
avit, quippe quas ille effecerit tribuendo functioni z n valores diversos: z
y^n, et: $z = e^{a_1 y}, e^{a_2 y}, \ldots e^{a_n y}$. — De proprietatibus determinantis $\underset{x}{\Delta^n}$ cf. M
Crelle 39, pag. 91; Hesse, Crelle 54, pag. 249—50; Christoffel, Crelle
98; Frobenius, Crelle 77, pag. 245.

Ann. 12. (ad § 22.). — Formulae (126)—(130) debentur Hoppeo, quas ta
um theoria determinantium se abstineret, non sine longinquo algorithmo ass
t. Eo autem potissimum ad hanc disquisitionem Hoppeus adductus est, q
gebat, formulam suam $u_k^n = \frac{(-1)^k}{k!} y^k \Sigma (-1)^h k_h\, y^{-h} D_x^n y^h$ ad casum $y =$
endum non esse idoneam aliamque expressionem ipsius u_k^n esse introducend

Ann. 13. (ad § 23.). — Disquisitio hoc paragrapho instituta potissimu
lis partialibus determinantis Δ^n vertitur. Quod quidem ipsum generalior
m generis praeclare jam nonnulli tractaverunt, sicut Stern (Crelle, vol
85); nec tamen de partialibus ejus aliquem disseruisse comperi.

Ann. 14. (ad Partem II.). — De functionum compositarum differentia
aliter disseruit Hoppeus, a quo tamen in argumentandi ratione paulum
s sum.

Quae § 26 exposui, quamvis in promptu sint, tamen a prioribus non
servata videntur. Nam Hoppeus quidem in fine libelli omnes formulas
tas functionum $\arcsin x$, $\arctan x$, $\sec x$, $\tan x$, contulit, quae usque a
s innotuissent, a diversis analystis diversisque methodis inventae; nec
omnes ad theoriam generalem retulit, sed alias alio modo confirmat, inte
conclusione ex n in $n+1$ adhibita. Quod cum cognovissem, hanc
tionem proposui, ut omnes formas ejusdem derivatae ex eodem fonte haur
illas omnes ad diversas functionem propositam discerpendi rationes refe
rem parte III. perfeci.

Ann. 15. (ad § 28.). — F. (148), (149), (150) ab Hoppeo commemora
uibus ipse invenit (149); (150) autem inventa est a Grunerto confirma
oppeo per conclusionem ex n in $n+1$; (148) debetur Pfaffio (Localfo

r höhere Differentiale, cf. Hindenburg, Sammlung comb. Abh.). Hoppeus
insformatione f. (150) effecit.

Ann. 16. (ad § 29, 2.). — De formulis hujus paragraphi Hoppeu
itum commemorat, (159) et (162). Quarum prior ex ipsius theoria profluit;
didit Euler, sine demonstratione (instit. calc. diff. pars I, pag. 171). H
n conclusione ex n in $n+1$ facta confirmat (sed eandem etiam e sua
cere potuit, evolvendo $\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^k = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^k$ formulaque binomiali XII adhi
Formulas (160), (161), (163), (164) ipse inveni.

Ann. 17. (ad § 29, 3, § 30, 1.). — Omnes has formulas tradidit
andbuch der Kugelfunctionen, Berlin 1861); auctores autem sunt: formula
ler, inst. calc. integr. vol. 1, sect. I, cap. VI; — f. (169) Laplace, mém. de
de phys. 1782, pag. 142; — f. (167) Ivory, Philosoph. transactions, 18
idem invenit Jacobi, Crelle vol. 2, pag. 223, quo loco ille etiam formulam
endit; — f. (172), (176) Dirichlet, Crelle vol. 17, pag. 39, 40. — Formulam
lique esse aequationem differentialem functionum sphaericarum notum est.

Ann. 18. (ad §§ 31, 32.). — Auctores sunt formulae (181) Pfaffius (H
g, Sammlung comb. Abh.) et Scherk (Crelle vol. 4, pag. 103); casus sp
nularum (187), (188) pro $\mu = -1$ et $\mu = -2$ invenit Gudermann, Theo
ential- und cyclisch hyperbolischen Functionen (Crelle, vol. 6); formula
7), (188) Hoppeus calculo longinquo (l. c. pag. 168—177) demonstravit.

TYPIS A. W. SCHADE.

Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LII. Band. 1. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Stetigkeit und Differentialquotient.

Von

Ernst Steinitz in Charlottenburg.

Dass es stetige Functionen giebt, welche an keiner Stelle e Differentialquotienten besitzen, wurde von Weierstrass zuerst n gewiesen. Den von ihm angegebenen Beispielen haben andere Aut eine Reihe weiterer hinzugefügt. Im Folgenden sollen einige a meine Betrachtungen über Stetigkeit und Differentiirbarkeit von F tionen angestellt werden, aus denen sich die Existenz stetiger n differentiirbarer Functionen naturgemäss ergiebt, sodass das Gewöhn des Falles in einer deutlichen und, wie ich hoffe, für Unterrichtszw geeigneten Weise hervorgehoben wird. Es wird sich dabei stets um (endliche) reelle, eindeutige Functionen einer reellen Veränderli handeln.

§ 1.

Es seien p und q zwei reelle Zahlen, $q > p$, es sei A der Be aller Zahlen zwischen p und q (mit Einschluss der Grenzen) und eine in diesem Bereiche definirte stetige (reelle, eindeutige) Func $f(x)$ ist alsdann auch gleichmässig stetig. Ist

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

eine Fundamentalreihe von Zahlen in A, so gehört ihr Grenzwe ebenfalls dem Bereiche A an, und aus der Stetigkeit von $f(x)$ f dass die zugehörigen Functionswerthe

$$f(a_0),\ f(a_1),\ f(a_2), \ldots$$

eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerth $f(a)$ bilden.

Hieraus können wir einen wichtigen Schluss ziehen. Ist I in A enthaltener Zahlbereich, (sodass also jede Zahl von B auch enthalten ist) und so beschaffen, dass jede Zahl von A als Grenzv einer Fundamentalreihe aus Zahlen von B darstellbar ist, so dass die stetige Function $f(x)$ durch die Werthe, welche sie an Stellen des Bereiches B annimmt, für den ganzen Bereich A bestimmt ist. Ist also $\varphi(x)$ eine für den Bereich B definirte Func

:ann es sicherlich nicht mehr als eine Function $f(x)$ geben, deren igkeitsbereich A ist, welche daselbst überall der Stetigkeits-ngung genügt und an den Stellen von B mit der Function $\varphi(x)$ einstimmt.

Natürlich wird aber nicht zu jeder für den Bereich B definirten ction $\varphi(x)$ eine Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit iren. Denn wenn eine solche vorhanden ist, so ergiebt sich, dass) folgende Eigenschaft besitzt: Ist $\delta > 0$ eine beliebig kleine se, so kann man $\varepsilon > 0$ so bestimmen, dass für irgend zwei en x_1 und x_2 des Bereiches B, deren Differenz $< \varepsilon$ ist, die Differenz zugehörigen Functionswerthe $\varphi(x_1)$ und $\varphi(x_2)$ $< \delta$ ausfällt. Dass rerseits, wenn $\varphi(x)$ dieser Bedingung genügt, auch eine Func-$f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit existirt, ist leicht nach-isen. Ist nämlich a irgend eine Stelle von A, so ergiebt sich ler über $\varphi(x)$ gemachten Voraussetzung, dass jeder Fundamental-aus Stellen von B

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$$

ı Grenzwerth a ist, eine Fundamentalreihe

$$\varphi(b_0),\ \varphi(b_1),\ \varphi(b_2),\ \ldots$$

richt und dass alle diese Fundamentalreihen denselben Grenzwerth n. Indem man diesen Grenzwerth mit $f(a)$ bezeichnet, gelangt zu einer im ganzen Gebiete A eindeutig definirten Function $f(x)$, der man leicht erkennt, dass sie stetig ist und an den Stellen B mit der Function $\varphi(x)$ übereinstimmt.

Ich will von einer für irgend einen Bereich definirten Function sagen, sie sei innerhalb dieses Bereiches stetig, wenn für irgend Stellen x_1, x_2 des Bereiches, sobald ihre Differenz nur hinlänglich ist, die Differenz $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ unter einer vorgegebenen Grösse . Dabei kommt nicht in Betracht, ob der Gültigkeitsbereich $\varphi(x)$ selbst stetig ist oder nicht. Dann kann das soeben erhaltene tat so ausgesprochen werden:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz im Bereiche A stetigen Function $f(x)$, welche an allen Stellen ereiches B mit einer für denselben definirten Function $\varphi(x)$ überein-it, ist die Stetigkeit der Function $\varphi(x)$ innerhalb B.

§ 2.

Um eine bestimmtere Vorstellung vor Augen zu haben, wählen ls Bereich A die Zahlen zwischen 0 und 1 mit Einschluss der en. Es sei ferner m eine ganze positive Zahl > 1 und B der riff der rationalen Brüche von A, deren Nenner eine Potenz

von m ist. Da jede Zahl zwischen 0 und 1 als Grenzwerth einer solchen Brüchen gebildeten Fundamentalreihe darstellbar ist, so fi die in § 1 angestellten Ueberlegungen Anwendung, und wir ha um die sämmtlichen im Bereiche A stetigen Functionen $f(x)$ zu halten, nur die im Bereiche B stetigen Functionen $\varphi(x)$ zu bil deren jeder eine bestimmte Function $f(x)$ entspricht. Die Zahlen B constituiren im Gegensatz zu denen von A eine abzählbare Me und hierauf beruht es, dass die Einführung des Bereiches B an S von A thatsächlich den Ueberblick über die Gesammtheit der stet Functionen erleichtert.

Wir wollen uns auf solche Functionen beschränken, welch der Stelle $x = 0$ verschwinden, aus welchen alle andern durch Add einer Constanten abgeleitet werden können. $\varphi(x)$ sei eine dera im Bereiche B definirte Function, welche zunächst nicht steti sein braucht. Die Zahlen von B können wir in der Weise anord dass wir das Intervall $0 \ldots 1$ zuerst in m, dann in m^2, m^3 gl Theile theilen u. s. w., und die erhaltenen Theilpunkte in ihrer n lichen Aufeinanderfolge notiren, wie es das folgende Schema zeig

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & & & & & & & 1 \\ 0 & & & \frac{1}{m} & & & \frac{2}{m} & \ldots & 1 \\ 0 & \frac{1}{m^2} & \frac{2}{m^2} \ldots & \frac{1}{m} & \frac{m+1}{m^2} & \ldots & \frac{2}{m} & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Setzen wir

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \Delta_{0,0},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) - \varphi(0) = \Delta_{1,0},\ \varphi\left(\frac{2}{m}\right) - \varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \Delta_{1,1}, \cdots \varphi(1) - \varphi\left(\frac{m-1}{m}\right) = \Delta$$

allgemein

$$(1) \qquad \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right) = \Delta_{k,l} \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, \ldots \infty \\ l = 0, 1, \ldots m^{k-} \end{array}\right.$$

so sind nicht nur alle Differenzen $\Delta_{k,l}$ durch die Function $\varphi(x)$, so es ist auch umgekehrt, da $\varphi(0) = 0$ vorausgesetzt wurde, die Fur $\varphi(x)$ durch die Differenzen $\Delta_{k,l}$ vollkommen bestimmt. Aus (1)

$$(2) \qquad \Delta_{k,l} = \Delta_{k+1,lm} + \Delta_{k+1,lm+1} + \cdots + \Delta_{k+1,lm+m-1}.$$

Will man daher eine für den Bereich B gültige Function $\varphi(x)$ i Weise construiren, dass man ihre Werthdifferenzen $\Delta_{k,l}$ vorsch so hat man folgendermassen zu verfahren: Man wählt $\Delta_{0,0}$ be theilt $\Delta_{0,0}$ auf irgend eine Weise in m Theile $\Delta_{1,0}\,\Delta_{1,1}, \ldots \Delta$ sodass $\Delta_{1,0} + \cdots + \Delta_{1,m-1} = \Delta_{0,0}$ ist, theilt jede nun erhalten ferenz Δ wieder in m Theile und fährt damit in infinitum fort es durch (2) vorgeschrieben ist. Alsdann ist durch die Bedi

) $= 0$ und die vermöge (2) mit einander vereinbaren Gleichungen (1) Function $\varphi(x)$ im Bereiche B definirt. Natürlich muss, wenn ı der angegebenen Methode die Construction einer Function $\varphi(x)$ hgeführt werden soll, irgend eine Vorschrift angegeben werden, ı welcher die Theilung der Grössen Δ zu vollziehen ist.

Die so erhaltene Function $\varphi(x)$ wird im Allgemeinen nicht stetig ; ist sie aber stetig, so gelangen wir durch sie weiter zu einer den ganzen Bereich A gültigen und daselbst stetigen Function $f(x)$, in § 1 gezeigt wurde.

§ 3.

Die Differenzen Δ müssen, um zu einer im Bereiche B gültigen tion $\varphi(x)$ zu führen, den Bedingungen § 2, (2) gemäss gewählt Es entsteht nun die Frage: Welche weiteren Bedingungen kommen ı, wenn die Function $\varphi(x)$ stetig ausfallen soll?

Wird mit α_k $(0 = 0, 1, \cdots \infty)$ der grösste der absoluten Be- von

$$\Delta_{k,0}, \Delta_{k,1}, \ldots, \Delta_{k,m^k-1}$$

chnet, so stellt α_k einen Zuwachs der Function $\varphi(x)$ dar, welcher ı Zuwachs der Variabelen um $\frac{1}{m^k}$ entspricht, und da $\lim\limits_{k=\infty} \frac{1}{m^k} = 0$ so ergiebt sich als eine nothwendige Bedingung für die Stetigkeit $\varphi(x)$, dass auch

$$\lim_{k=\infty} \alpha_k = 0$$

muss. Dass dieselbe aber nicht hinreichend ist, lässt sich leicht eispielen nachweisen. Es hat nun zwar keinerlei Schwierigkeiten, Bedingung der Stetigkeit von $\varphi(x)$ in Bedingungen für die Dif- zen Δ umzusetzen, aber diese gestalten sich nicht übersichtlich. will mich deshalb darauf beschränken, eine sehr allgemeine Be- ng anzugeben, unter welcher man sicher zu einer stetigen Func- geführt wird. Ich behaupte:

Wenn die Reihe der im Vorhergehenden definirten Grössen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

e wir als die „Maximaldifferenzen" bezeichnen können, nicht nur Bedingung (1) sondern der weitergehenden Bedingung genügt, hre Summe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$$

rgirt, so ist die durch die Gleichungen § 2, (1) definirte Function stetig.

m diese Behauptung zu beweisen, setzen wir unter Annahme onvergenz der Summe (2)

(3) $$\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k = \mu_i \qquad (i=0, 1, \ldots),$$

dann ist

(4) $$\lim_{i=\infty} \mu_i = 0.$$

Sind $\frac{p}{m^k}$, $\frac{q}{m^k}$ irgend zwei Zahlen in B, so ergiebt sich aus Definition der Grössen α

(5) $$\left|\varphi\left(\frac{q}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{p}{m^k}\right)\right| \leqq |q-p| \cdot \alpha_k,$$

wo die Striche andeuten, dass der absolute Betrag der eingeschloss Grösse zu nehmen ist. Ist x eine zwischen $\frac{l}{m^k}$ und $\frac{l+1}{m^k}$ gelegene von B,

(6) $$\frac{l}{m^k} \leqq x \leqq \frac{l+1}{m^k},$$

so hat x die Form

(7) $$x = \frac{s}{m^{k+r}} \qquad (r \geqq 0),$$

und man kann, wenn $x < \frac{l+1}{m^k}$ ist,

(8) $$x = \frac{l}{m^k} + \frac{c_1}{m^{k+1}} + \frac{c_2}{m^{k+2}} + \cdots + \frac{c_r}{m^{k+r}}$$

und wenn $\frac{l}{m^k} < x$ ist

(9) $$\frac{l+1}{m^k} - \left(\frac{c_1'}{m^{k+1}} + \frac{c_2'}{m^{k+2}} + \cdots + \frac{c_r'}{m^{k+r}}\right)$$

setzen, so dass die Coefficienten c, c' ganze, den Bedingungen

(10) $$0 \leqq c \leqq m-1, \qquad 0 \leqq c' \leqq m-1$$

genügende Zahlen sind. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{l}{m^k} = x_0, \quad \frac{l+1}{m^k} = x_0'$$

$$\frac{l}{m^k} + \frac{c_1}{m^{k+1}} + \cdots + \frac{c_h}{m^{k+h}} = x_h, \quad \frac{l+1}{m^k} - \left(\frac{c_1'}{m^{k+1}} + \cdots + \frac{c_h'}{m^{k+h}}\right)$$

$$(h = 1, \ldots r),$$

sodass $x_r = x = x_r'$ wird, so folgt aus

$$x_{h-1} = \frac{l m^h + c_1 m^{h-1} + \cdots + c_{h-1} m}{m^{k+h}}, \qquad x_h = \frac{l m^h + c_1 m^{h-1} + \cdots + c_{h-1} m}{m^{k+h}}$$

$$x_{h-1}' = \frac{(l+1) m^h - (c_1' m^{h-1} + \cdots + c_{h-1}' m)}{m^{k+h}}, \quad x_h' = \frac{(l+1) m^h - (c_1' m^{h-1} + \cdots +}{m^{k+h}}$$

r Berücksichtigung von (5) und (10)

$$|\varphi(x_h) - \varphi(x_{h-1})| \leqq c_h \alpha_{k+h} \leqq (m-1)\alpha_{k+h},$$
$$|\varphi(x_h') - \varphi(x_{h-1}')| \leqq c_h' \alpha_{k+h} \leqq (m-1)\alpha_{k+h}$$

in nach (3)

$$(x) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\Bigg| = |\varphi(x_r) - \varphi(x_0)| \leqq (m-1)\mu_{k+1} \leqq (m-1)\mu_k,$$

$$(x) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right)\Bigg| = |\varphi(x_r') - \varphi(x_0')| \leqq (m-1)\mu_{k+1} \leqq (m-1)\mu_k.$$

Ungleichungen

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| \leqq (m-1)\mu_k, \quad \left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right)\right| \leqq (m-1)\mu_k$$

n aber auch, wenn $x = \frac{l}{m^k}$ oder $= \frac{l+1}{m^k}$ ist.

Es seien nun x_1 und $x_2 \geqq x_1$ zwei Zahlen in B, deren Differenz ; ist. Bestimmt man die ganze Zahl l so, dass

$$\frac{l}{m^k} \leqq x_1 \leqq \frac{l+1}{m^k}$$

somit nach (11)

$$\left|\varphi(x_1) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right)\right| \leqq (m-1)\mu_k$$

so liegt x_2 entweder zwischen $\frac{l}{m^k}$ und $\frac{l+1}{m^k}$ oder zwischen $\frac{l+1}{m^k}$ $\frac{+2}{m^k}$. In beiden Fällen ist

$$\left|\varphi(x_2) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right)\right| \leqq (m-1)\mu_k,$$

'olglich hat man

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqq 2(m-1)\mu_k.$$

Iach (4) ist aber $\lim_{k=\infty} 2(m-1)\mu_k = 0$, und damit ist die Stetigkeit (x) erwiesen.

ie Convergenz der Summe (2) stellt eine hinreichende aber nicht endige Bedingung für die Stetigkeit von $\varphi(x)$ dar. Wenn wir auf alle möglichen Arten Systeme von Grössen $\Delta_{k,l}$ herstellen, en denen dle Relationen § 2, (2) bestehen und für welche die e $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ convergirt, so liefert zwar jedes derartige System eine Function, aber die Gesammtheit der so erhaltenen Functionen nur einen Theil aller stetigen Functionen dar.

§ 4.

Die angegebene Methode zur Herstellung stetiger Functionen m[illegible] an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Wir wählen für $\Delta_{0,0}$ irgend eine von 0 verschiedene Zahl, the[illegible] $\Delta_{0,0}$ auf irgend eine Weise in m Theile $\Delta_{1,0}, \ldots \Delta_{1,m-1}$, nur [illegible] vorausgesetzt, dass auch diese sämmtlichen von 0 verschieden [illegible] Wir wollen nun für die weitere Theilung folgende Vorschrift ge[illegible] Die m Theile, in welche irgend ein Δ zerlegt wird, sollen in [illegible] selben Verhältniss zu einander stehen wie die m Theile $\Delta_{1,0}, \ldots \Delta_{1,}$[illegible] in welche $\Delta_{0,0}$ zerfiel. Durch diese Vorschrift ist das ganze Sy[illegible] der Differenzen Δ bestimmt. Hat man $\Delta_{k,l}$, so folgt aus

$$\Delta_{1,0} + \cdots + \Delta_{1,m-1} = \Delta_{00},$$
$$\Delta_{k+1,lm} + \cdots + \Delta_{k+1,lm+m-1} = \Delta_{k,l},$$
$$\Delta_{k+1,lm} : \Delta_{k+1,lm+1} : \cdots : \Delta_{k+1,lm+m-1} = \Delta_{1,0} : \Delta_{1,1} : \cdots : \Delta_{1,m-1}$$

dass

$$\Delta_{k+1,lm} = \frac{\Delta_{k,l}}{\Delta_{0,0}} \Delta_{1,0}, \quad \Delta_{k+1,lm+1} = \frac{\Delta_{k,l}}{\Delta_{0,0}} \Delta_{1,1} \cdots$$

wird. Die angegebene Methode der Theilung der Δ möge „periodi[illegible] Theilungsverfahren“ heissen. Setzt man zur Abkürzung

$$\Delta_{1,0} = \delta_1, \ \Delta_{1,1} = \delta_2, \ldots \Delta_{1,m-1} = \delta_m,$$

so ist bei einem periodischen Theilungsverfahren durch $\delta_1, , \ldots$ [illegible] eine im Bereiche B gültige Function $\varphi(x)$ bestimmt, welche de[illegible] dingung $\varphi(0) = 0$ und den Gleichungen § 2, (1) genügt. Wi[illegible] zeichnen diese Function mit

$$\varphi(x;\ \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m).$$

Ist sie stetig, so entspricht ihr eine im ganzen Bereiche A gü[illegible] stetige Function, für die wir das Zeichen

$$f(x;\ \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m)$$

einführen. Um zu erkennen, wann die Function $\varphi(x; \delta_1, \ldots \delta_m)$ [illegible] wird, hat man die Maximaldifferenzen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ in Betracht zu zi[illegible] Man sieht sofort, dass dieselben in unserem Falle eine geomet[illegible] Reihe bilden. Die Bedingung $\lim\limits_{k=\infty} \alpha_k = 0$ und die Bedingung [illegible] Convergenz der Summe $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots$ fallen also hier in eine z[illegible] men; sie sind erfüllt, wenn $\alpha_1 < \alpha_0$ ist. Wir können das so gewo[illegible] Resultat folgendermassen aussprechen:

Damit ein periodisches Theilungsverfahren zu einer stetigen [illegible] tion führe, ist nothwendig und hinreichend, dass die m Theil[illegible] welche $\Delta_{0,0}$ zerlegt wird, dem absoluten Betrage nach sämmtlich k[illegible] sind als $\Delta_{0,0}$ selbst.

Für $m = 2, 3, 4$ stellen

$$f(x;\ 1, 2),\ f(x;\ 3, 3, -2),\ f(x;\ 1, 1, 1, -1)$$

einem periodischen Theilungsverfahren gebildete stetige Functionen denn in allen drei Fällen hat man

$$|\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m| > \delta_i \qquad (i=1,2,\ldots m).$$

eibt man $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$ für $f(x;\ 1, 2)$, $\varphi(x;\ 1, 2)$, so ergiebt sich

$$(0) = \varphi_1(0) = 0,\ f_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \varphi_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1,\ f_1(1) = \varphi_1(1) = 3,$$

$$f_1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \varphi_1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3},\ f_1\left(\tfrac{3}{4}\right) = \varphi_1\left(\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{5}{3},$$

Für $f_1\left(\frac{1}{3}\right)$ erhält man wegen

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$$

Werth

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \cdots$$

$$f_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{7}.$$

Die Berechnung der Function $f(x;\ \delta_1, \ldots \delta_m)$ für bestimmte he von x gestaltet sich hiernach sehr einfach. Sind die Zahlen .. δ_m rational, so erkennt man leicht, dass die Function für nales x stets einen rationalen Werth annimmt.

§ 5.

Es sei $f(x)$ wie zu Anfang eine für den Bereich A definirte stetige tion. Jedem Intervalle $x_1 \ldots x_2$, welches einen Theil des Inter- 0 ... 1 darstellt, entspricht ein bestimmter Differenzenquotient

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

zu erkennen, ob die Function $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ einen entialquotienten besitzt, hat man für ein die Stelle x_0 enthaltendes vall $x_1 \ldots x_2$ den Differenzenquotienten zu bilden und das Inter- $_1 \ldots x_2$ auf die Stelle x_0 zusammenzuziehen. Wenn bei jeder Art, elcher diese Zusammenziehung erfolgen kann, der Differenzen- ent sich einem und demselben endlichen Grenzwerth nähert, so ieser Grenzwerth der Differentialquotient von $f(x)$ an der Stelle x_0. Andernfalls existirt an dieser Stelle kein endlicher Differential- ent. Kann man z. B. das Intervall $x_1 \ldots x_2$ in der Weise zusam- iehen, dass der absolute Betrag von $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ über alle Grenzen st, so ist an der betrachteten Stelle kein endlicher Differential- ent vorhanden. Der Differentialquotient kann nun noch einen

bestimmten unendlich grossen Werth $+\infty$ oder $-\infty$ haben, d. l
kann der Differenzenquotient bei jeder Art der Zusammenziehung
Intervalles über alle positiven Zahlen hinaus wachsen oder unter
negativen herabsinken, worauf jedoch zunächst nicht eingegan
werden soll. Wir wollen das die Stelle x_0 einschliessende Inte
in folgender Weise verkleinern. Zu der Veränderlichen k, welche
stimmt ist, die ganzen positiven Zahlen zu durchlaufen, ermitteln
die ganze Zahl l_k so, dass x_0 zwischen $\frac{l_k}{m^k}$ und $\frac{l_k+1}{m^k}$ mit Einscl
der unteren und (wenn $x_0 \neq 1$ ist) Ausschluss der oben Grenze l
Wird wieder mit $\varphi(x)$ die im Bereiche B definirte, daselbst mit
übereinstimmende Function bezeichnet und haben die $\Delta_{k,l}$ ihre frü
Bedeutung, so wird für $x_1 = \frac{l_k}{m^k}$, $x_2 = \frac{l_k+1}{m^k}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = m^k \Delta_{k,l_k}.$$

Ist $\lim\limits_{k=\infty} m^k |\Delta_{k,l_k}| = \infty$, so ist an der Stelle x_0 kein endlicher Diffe
tialquotient vorhanden. Bezeichnet β_k die kleinste der absolut gen
menen Differenzen $|\Delta_{k,0}|$, $|\Delta_{k,1}| \ldots |\Delta_{k,m^k-1}|$, so stellt $m^k \beta_k$
kleinsten der zugehörigen Differenzenquotienten dar. Ist daher

$$\lim_{k=\infty} m^k \beta_k = \infty,$$

so hat $f(x)$ an keiner Stelle einen endlichen Differentialquotienten

§ 6.

Aus dem letzten Resultat ergiebt sich ein einfaches Verfahren
stetige Functionen ohne (endlichen) Differentialquotienten zu constru
Wir stellen ein System von Differenzen $\Delta_{k,l}$ her, indem wir ein
fahren angeben, nach welchem die Theilung der Δ auszuführen ist (
Um sicher zu einer stetigen Function zu gelangen, wählen wir
solches Verfahren, dass die sich ergebenden (absoluten) Maxi
differenzen

(1) $$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

eine convergente Summe liefern (§ 3). Dann wird auch die in
betrachtete Reihe der Minimaldifferenzen

(2) $$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

eine convergente Summe haben. Dasselbe gilt in jedem Falle
der Reihe

(3) $$1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \ldots.$$

Wenn es nun gelingt die Convergenz der zweiten Summe so lang

gestalten im Vergleich zur Convergenz der dritten, dass die aus sprechenden Gliedern von (2) und (3) gebildeten Quotienten

$$\beta_1,\ m\beta_1,\ m^2\beta_2,\ldots,$$

he die Reihe der minimalen Differenzenquotienten bilden, über alle zen wachsen, so wird die so gewonnene stetige Function an keiner e differentiirbar sein (§ 5).

Dass man dies auf mannigfache Weise erreichen kann, ist sehr t zu sehen. Die einfachsten Beispiele hierfür erhalten wir unter endung eines periodischen Theilungsverfahrens (§ 4). Alsdann ich wird die Reihe (4), ebenso wie die andern, eine geometrische. Bedingung $\lim\limits_{k=\infty} m^k\beta_k = \infty$ ist erfüllt, wenn $m\beta_1 > \beta_0$, wenn also die kleinste der Differenzen $|\Delta_{1,0}| \ldots |\Delta_{1,m-1}|$, grösser als $= \frac{1}{m}|\Delta_{0,0}|$ ist. Man erhält somit, indem man dieses Ergebniss lem in § 4 gewonnenen zusammenfasst, folgende Vorschrift: Man nach einem periodischen Theilungsverfahren ein System von renzen Δ so her, dass die m Theile, in welche $\Delta_{0,0}$ zerfällt, dem uten Betrage nach kleiner als $\Delta_{0,0}$ aber grösser als $\frac{1}{m}\Delta_{0,0}$ sind. führt dieses System zu einer stetigen durchweg nicht differentiir- Function.

Eine solche Theilung ist stets möglich, wenn $m > 2$ ist. Die tionen

$$(x;\ 3, -2, 3),\quad f(x;\ 1, 1, 1, -1),\quad f(x;\ 4, 4, -5, -5, 4, 4)$$

Beispiele hierfür.

§ 7.

Bisher ist die Frage nach dem etwaigen Vorhandensein eines nmten unendlichgrossen Differentialquotienten unerörtert geblieben. 1 die in § 6 angegebene Methode ist es nicht ausgeschlossen, dass ewissen Stellen ein unendlich grosser Differentialquotient auftritt. ird sich jetzt darum handeln, dies zu vermeiden. Beschränkt man wie es hier geschehen soll, darauf, Functionen nach einem perio- en Theilungsverfahren herzustellen, so braucht man den am sse von § 6 angegebenen Vorschriften nur noch eine weitere (für 5 ausführbare) hinzuzufügen, um auch das Zustandekommen un- h grosser Differentialquotienten unmöglich zu machen. Realisirt sich diese Vorschrift bei der zuletzt angegebenen Function 4, 4, -5, -5, 4, 4) und möge an der Hand dieses Beispiels ert werden. — Hier haben wir

$$m = 6, \qquad\qquad \Delta_{0,0} = 6,$$

$$= 4,\ \Delta_{1,1} = 4,\ \Delta_{1,2} = -5,\ \Delta_{1,3} = -5,\ \Delta_{1,4} = 4,\ \Delta_{1,5} = 4.$$

Wir betrachten neben den Differenzen $\Delta_{1,l}$ die Summen, welche v
benachbarten dieser Differenzen gebildet werden, also die Summen

$$\Delta_{1,0}+\Delta_{1,1},\ \Delta_{1,1}+\Delta_{1,2},\ldots\Delta_{1,m-2}+\Delta_{1,m-1},\quad \Delta_{1,0}+\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2},\ldots$$
$$\Delta_{1,m-3}+\Delta_{1,m-2}+\Delta_{1,m-1},\ldots\Delta_{1,0}+\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}+\cdots+\Delta_{1,m-1}.$$

Jeder Differenz $\Delta_{1,l}$ ordnen wir eine dieser Summen, die wir mit Δ
bezeichnen, zu, und zwar so, dass unter den Summanden von Δ
auch $\Delta_{1,l}$ vorkommt. Bei dem vorliegenden Beispiel kann man n
$\Delta'_{1,l}$ $(l=0,1,\ldots m-1)$ so bestimmen, dass $\Delta'_{1,l}$ und $\Delta_{1,l}$ entgeg
gesetztes Vorzeichen haben — indem man z. B.

$$\begin{array}{lll} & \Delta'_{1,0}=\Delta_{1,0}+\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}+\Delta_{1,3}, & \Delta'_{1,1}=\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}, \\ (1) & \Delta'_{1,2}=\Delta_{1,0}+\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}, & \Delta'_{1,3}=\Delta_{1,3}+\Delta_{1,4}+\Delta_{1,5}, \\ & \Delta'_{1,4}=\Delta_{1,3}+\Delta_{1,4}, & \Delta'_{1,5}=\Delta_{1,2}+\Delta_{1,3}+\Delta_{1,4}+\Delta \end{array}$$

setzt, sodass

$$\Delta'_{1,0}=-2,\quad \Delta'_{1,1}=-1,\quad \Delta'_{1,2}=3,\quad \Delta'_{1,3}=3,\quad \Delta'_{1,4}=-1,\quad \Delta'_{1,5}=-$$

wird. Jedesmal, wenn ein solcher Fall vorliegt (und ausserdem
schon im vorigen Paragraphen angegebenen Bedingungen erfüllt sin
hat man es, wie nun gezeigt werden soll, mit einer Function zu th
die an keiner Stelle einen endlichen oder auch unendlich grossen D
ferentialquotienten besitzt.

Es stellt $\Delta_{1,l}$ einen Functionszuwachs dar, welcher einen Zuwa
der Variabelen um $\frac{\varepsilon_l}{m}$ entspricht, wenn ε_l die Anzahl der Summan
bezeichnet, aus denen $\Delta'_{1,l}$ sich zusammensetzt. Der entspreche
Differenzenquotient ist

$$\frac{1}{\varepsilon_l}\,m\,.\,\Delta'_{1,l}=\mathfrak{D}_l.m\Delta_{1,l},$$

wo $\mathfrak{D}_l$ für $\frac{1}{\varepsilon_l}\cdot\frac{\Delta'_{1,l}}{\Delta_{1,l}}$ gesetzt ist. $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots \mathfrak{D}_{m-1}$ sind nach den Vor
gehenden negative Zahlen. Die Differenz $\Delta_{k,l}$ zerfällt in die Sum

$$\Delta_{k,l}=\Delta_{k+1,lm}+\cdots+\Delta_{k+1,lm+m-1}.$$

Wir verstehen unter

$$\Delta'_{k+1,lm},\ \Delta'_{k+1,lm+1},\ \ldots\ \Delta'_{k+1,lm+m-1}$$

diejenigen Grössen, welche man erhält, indem man in den Gleichungen
$\Delta_{1,s}$, $\Delta'_{1,s}$ $(s=0,\ldots m-1)$ durch $\Delta_{k+1,lm+s}$, $\Delta'_{k+1,lm+s}$ ersetzt. Dann

$$\frac{\Delta'_{k+1,lm+s}}{\Delta_{k+1,lm+s}}=\frac{\Delta'_{1,s}}{\Delta_{1,s}},$$

jedes $\Delta_{k,l}$, jedes $\Delta'_{k,l}$ stellt einen Functionszuwachs dar, und die e
sprechenden Differenzenquotienten sind

$$m^k\Delta_{k,l},\quad \mathfrak{D}_l.m^k\Delta_{k,l}.$$

ei ist $\mathfrak{D}_l$ gleich derjenigen der Zahlen $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots \mathfrak{D}_{m-1}$ deren
x $\equiv l \pmod{m}$ ist.

Bedeutet x_0 eine beliebige Stelle des Bereiches A und wird die
e Zahl l_k so bestimmt, dass $\frac{l_k}{m^k} \leqq x_0 < \frac{l_{k+1}}{m^k}$ ist, so entspricht nicht
Δ_{k,l_k} sondern auch Δ'_{k,l_k} einem Intervalle, welches die Stelle x_0
hliesst. Die zugehörigen Differenzenquotienten sind

$$m^k \Delta_{k,l_k}, \quad \mathfrak{D}_{l_k} m^k \Delta_{k,l_k}.$$

Nach § 6 wächst der erste und daher auch der zweite mit k dem
uten Werthe nach über alle Grenzen. Beide Quotienten haben
r beständig entgegengesetztes Vorzeichen. Daher ist an der Stelle
eder ein endlicher noch ein bestimmter unendlich grosser Differential-
ent vorhanden. Man kann vielmehr innerhalb jedes noch so
en die Stelle x_0 im Innern enthaltenden Intervalles $x_1' \ldots x_2'$ ein
es ebensolches Intervall $x_1 \ldots x_2$ bestimmen, für welches der
renzenquotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ einen beliebig gegebenen Werth an-
nt. Das Letztere folgt aus dem Vorhergehenden, wenn man
ksichtigt, dass der Differenzenquotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, abgesehen von
en Stellen, an denen $x_1 = x_2$ wird, eine stetige Function der
ibelen x_1, x_2 darstellt.

Über die Beziehungen

der

iprokantentheorie zur allgemeine

der Differentialinvarianten

Abhandlung

zum Jahresbericht des städtischen Realgymnasiums zu Chemnitz für Ostern 1895

von

Oberlehrer **Oskar Alexander Stöckert.**

Chemnitz.

Über die Beziehungen der Reciprokantentheorie zu Theorie der Differentialinvarianten.

Seit dem Jahre 1885 haben Sylvester und mehrere andere englische
Mathematiker eine Reihe von Untersuchungen über Funktionen veröffentlicht, welc
„Reciprokanten“ bezeichnet haben. Die Definition, welche Sylvester für diese Fu
In general a Reciprocant may be defined to be a Funktion F of such a kind
contains $F(y', y'' \ldots)$ as Faktor[2])
isst bereits erkennen, dass diese Funktionen mit den schon längst bekannten Differen
Zusammenhang stehen müssen.

Auf diesen Umstand ist in den Untersuchungen über die Reciprokan
ingewiesen und noch viel weniger ist von demselben irgendwelcher Gebrauch gemac
ber die Differentialinvarianten durch ihre Beziehungen zur Theorie der Differentialgl
. Lie schon im Jahre 1870 hingewiesen hat, in neuerer Zeit mehr und m
Mathematiker in Anspruch genommen. Da Lie bereits in den Jahren 1883 und 188
heorie der Differentialinvarianten veröffentlicht hat[3]), so soll in der vorliegenden Ar
n welchen Beziehungen die Theorie der Reciprokanten zur allgem
ifferentialinvarianten steht.

Dieser allgemeinen Theorie Lies gehen eine grosse Anzahl Untersuchungen übe
raus. Schon der bekannte Physiker Ampère hat im Jahre 1806 erkannt, dass
rümmungsradius einer Kurve bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten:

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y + dy\, d^2x}$$

i orthogonalen Transformationen invariant bleibt. Dies führte ihn zu der Aufgabe, all
$(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y \ldots)$ zu bestimmen, welche bei orthogonalen Transformatione
ese Aufgabe löste er vollständig.

Gauss hat, nachdem er das Bogenelement als eine quadratische Form
u und dv:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

rgestellt und das Krümmungsmass K als Funktion der Grössen e, f, g und deren A
eiter Ordnung ausgedrückt hatte, gezeigt, dass diese Funktion beim Übergang
geändert bleibt[4]).

---

[1]) Anmerkung: Es ist:

$$x' = \frac{dx}{dy}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dy^2} \ldots\ldots,$$

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots$$

[2]) Anmerkung: Vergl. American Journal of Mathematics ...

Es sei hier ferner daran erinnert, dass Differentialinvarianten vielfach bei Lagrange, Cauch Jacobi, Lamé, Cayley, Beltrami, Lipschütz, Christoffel, Schwarz und wohl noch vielen ander Mathematikern vorkommen.

Im Jahre 1870 machte nun Lie, wie schon bemerkt, darauf aufmerksam, dass die Integrationsmethod welche die älteren Mathematiker in der Theorie der Differentialgleichungen entwickelt haben, sich nur a solche Differentialgleichungen erstrecken, welche eine bekannte Schar von Transformationen gestatten. Fern zeigte er, dass darin, dass eine Differentialgleichung eine Schar von Transformationen gestattet, zuglei der Beweis enthalten ist, dass die Transformationen eine Gruppe bilden.

Hiervon ausgehend entwickelte er dann in den Jahren 1872—1874 eine allgemeine Integrationstheo von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die eine beliebige kontinuierliche Gruppe von Transformation gestatten [1]).

Nachdem er inzwischen in den Jahren 1873 und 1874 auch eine allgemeine Theorie der kontinuierlich Gruppen begründet hatte [2]), konnte er nunmehr den Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen „Grupp und „Differentialinvariante“ weiter verfolgen und es gelang ihm, die Aufmerksamkeit der Mathematik besonders auf denselben zu lenken. Auf die Arbeiten, welche sich an Lies Untersuchungen angeschloss haben, kann hier nicht eingegangen werden.

Es sei aber bemerkt, dass sich darauf auch Halphen, wahrscheinlich ohne Lies Arbeiten näher kennen, mit Differentialinvarianten und deren Anwendung auf die Theorie der linearen Differentialgleichung beschäftigt hat [3]).

Sodann veröffentlichte Lie, wie auch schon erwähnt, in den Jahren 1883 und 1884 eine allgemei Theorie der Differentialinvarianten aller kontinuierlichen Gruppen, welche durch Differentialgleichung definiert sind [4]).

Im Jahre 1885 beginnt nun Sylvester, der ebenso wie seine Mitarbeiter diese Arbeiten Li offenbar gar nicht kannte, seine oben erwähnten Untersuchungen über Reciprokanten zu veröffentliche Zuerst erschien im „Messenger of Mathematics“, Jahrgang 1885—1886, eine Arbeit über den Differenti ausdruck

$$\frac{2\,y'\,y''' - 3\,y''^2}{2\,y'^2}.$$

Weitere Untersuchungen folgten dann in den „Comptes rendus“ vom Jahre 1886 und in ein ausführlichen Arbeit in den Jahrgängen 1886, 1887 und 1888 des zu Baltimore erscheinenden „Americ Journal of Mathematics“.

An diese Arbeiten schliessen sich folgende englische und amerikanische Mathematiker hauptsächli an: E. B. Elliot, C. Leudesdorf, Captain Mac Mahon, L. J. Rogers u. a. m. Ihre Arbeiten si sämtlich in den „Proceedings of the London Mathematical Society“, Jahrgang 1886 und 1887 veröffentlic

Obwohl diese Untersuchungen von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehen, als die Untersuchung Lies, ergiebt sich neben manchen neuen Resultaten, welche mit Hilfe der allgemeinen Theorie d Differentialinvarianten grosse Verallgemeinerungen zulassen, folgende enge Beziehung zu Lies allgemein Theorie:

1. Die wichtigsten Reciprokanten Sylvesters, die reinen, die projektiven und die orthogonale stimmen mit den Differentialinvarianten der allgemeinen linearen, der allgemeinen projektiven und d Gruppe von Transformationen

$$x' = y \,.\, \sin\alpha - x \,.\, \cos\alpha + a$$
$$y' = y \,.\, \cos\alpha + x \,.\, \sin\alpha + b$$

überein, welche im folgenden kurz als die orthogonale Gruppe bezeichnet werden soll.

---

[1]) Anmerkung: Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 1870—74; Mathematisc Annalen, Bd. V, XI.

[2]) Anmerkung: Göttinger Nachrichten, Dezember 1874.

[3]) Anmerkung: Thèse sur les invariants différentiels 1878; Journal de l'école pol. 1880; Mémoire s la réduction des équat. diff. lin. aux formes intégrables 1880—1883.

[4]) Anmerkung: Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 1882, 1883; Arch for Mathematics, 1882, 1883; Mathematische Annalen, Bd. XXIV, 1884.

2. Die grundlegenden Sätze und Formeln, die für diese Reciprokanten entwickelt worden sind, rgeben sich auch aus Lies allgemeiner Theorie und gelten demnach nicht nur für diese Funktionen, ondern für Differentialinvarianten beliebiger kontinuierlicher Transformationsgruppen.

3. Die Untersuchungen über die drei besonderen Arten von Reciprokanten werden nach derselben Iethode angestellt, welche die Theorie der Differentialinvarianten für Differentialinvarianten beliebiger ontinuierlicher Transformationsgruppen verwendet. Nur wird der Gruppenbegriff nicht eingeführt, so dass er Zusammenhang zwischen den Transformationsgruppen und den Differentialinvarianten, auf den Lie erade besonders hingewiesen hat, in diesen Arbeiten zwar wiedergefunden werden kann, aber nicht enutzt wird.

Diese Ergebnisse sollen im folgenden entwickelt und begründet werden. Es dürfte jedoch mpfehlenswert sein, eine kurze Ableitung der Hauptsätze und Formeln der Theorie der Differentialinvarianten orauszuschicken, um die folgenden Erörterungen nicht durch Angaben über diese Theorie aufhalten u müssen.

I. Kapitel.

Über Differentialinvarianten[1]).

§ 1. Die Gruppe[2]).

Für jede Schar von ∞^r Transformationen in den n Veränderlichen

$$x_1 \,.\,.\, x_n:$$

$$y'_k = f_k(x_1 \,.\,.\, x_n, \quad a_1 \,.\,.\, a_r), \quad k = 1 \,.\,.\, n,$$

e eine kontinuierliche Gruppe mit r Parametern oder kurz eine r-gliedrige Gruppe bilden, deren ansformationen sich paarweise invers zuordnen, gilt der Satz, dass in dieser Gruppe die identische ansformation und r unabhängige infinitesimale Transformationen enthalten sind, die man symbolisch wie gt bezeichnen kann:

$$X_i f = \sum_{k=1}^{k=n} \xi_{ik}(x_1 \,.\,.\, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad i = 1 \,.\,.\, n,$$

bei die ξ_{ik} die Inkremente der x_k bedeuten[3]).

So enthält die sechsgliedrige allgemeine lineare Gruppe in zwei Veränderlichen x, y:

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2$$

sechs infinitesimalen Transformationen

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_4 f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_6 f = y\frac{\partial f}{\partial x},$$

lche man auch schreiben kann, indem man in zwei Veränderlichen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

zt:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = xq,$$
$$X_4 f = yq, \quad X_5 f = xp, \quad X_6 f = yp.$$

[1]) Anmerkung: Alle die Untersuchungen Lies, welche in der Einleitung erwähnt sind, finden sich auch dem 1888 erschienenen Werke: Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt Unter twirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet von Sophus Lie, Professor der Geometrie an der iversität Leipzig. Auf dieses soll im ersten Kapitel stets verwiesen werden.

[2]) Anmerkung: Vergl. Theorie der Transformationsgruppen, Kapitel 1, 3 und 4.

[3]) Anmerkung: Kapitel 4, § 19.

Aus diesen r unabhängigen infinitesimalen Transformationen, die in der r-gliedrigen Grupp enthalten sind, kann man die ∞^r endlichen Transformationen der Gruppe erzeugen, indem man d infinitesimalen Transformationen unendlich oft nacheinander ausführt[1]). Man kann also mit Hilfe d infinitesimalen Transformationen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür aufstellen, dass d Schar von endlichen Transformationen, zu welcher die infinitesimalen Transformationen gehören, ei endliche kontinuierliche Gruppe bildet.

Es gilt der Satz:

Die Transformationen $X_1 f\ X_2 f \ldots X_r f$ erzeugen eine r-gliedrige Gruppe dann und nur dan wenn Relationen von der Form

$$(X_i\ X_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks}\, X_s f, \quad i, k = 1 \ldots r,$$

bestehen[2]).

Diese Gruppe bezeichnet man kurz als die Gruppe $X_1 f, \ldots X_r f$.

In der That ist für die allgemeine lineare Gruppe:

$$\begin{aligned}
&(X_1\ X_2) = 0, \quad (X_1\ X_3) = X_2, \quad (X_1\ X_4) = 0,\\
&(X_1\ X_5) = X_1, \quad (X_1\ X_6) = 0, \quad (X_2\ X_3) = 0,\\
&(X_2\ X_4) = X_2, \quad (X_2\ X_5) = 0, \quad (X_2\ X_6) = X_1,\\
&(X_3\ X_4) = X_2, \quad (X_3\ X_5) = -X_3 \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Da ferner die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ lautet:

$$\sum_{k=1}^{k=r} \lambda_k X_k f,$$

wobei die λ_k Konstante bedeuten, so folgt aus obigem Satze unmittelbar, dass in der Gruppe

$$X_1 f \ldots X_r f$$

auch alle Transformationen

$$(X_i X_k) = X_i (X_k (f)) - X_k (X_i (f)), \quad k, i = 1 \ldots r,$$

enthalten sind[3]).

---

§ 2. Invarianten von Gruppen[4]).

Führt man auf irgend eine Funktion $\omega (x_1 \ldots x_n)$ eine Transformation aus, so wird sie ir allgemeinen in eine neue Funktion $\omega' (x_1' \ldots x'_n)$ übergehen. Es kann aber der Fall eintreten, dass di neue Funktion mit der ursprünglichen identisch ist:

$$\omega (x_1 \ldots x_n) = \omega (x'_1 \ldots x'_n).$$

Dann bezeichnet man ω als eine Invariante der Transformation.

Betrachtet man eine Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$, so kann auch eine Funktion $\omega (x_1 \ldots x_n)$ existieren welche gegenüber jeder Transformation der Gruppe Invariante ist, die man also als Invariante der Grupp bezeichnen wird.

Wann eine Funktion Invariante einer Gruppe ist, beantwortet folgender Satz:

Eine Funktion ω ist dann und nur dann Invariante einer Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$, wenn folgend Relationen identisch bestehen:

$$X_1\, \omega = 0, \quad X_2\, \omega = 0, \quad \ldots X_r\, \omega = 0,$$

d. h. wenn ω Lösung des vollständigen Systems von linearen, partiellen Differentialgleichungen ist:

$$X_1 f = 0 \ldots X_r f = 0$$[5]).

Da nun alle Invarianten der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ Lösungen dieses vollständigen Systems sind so ergiebt sich weiter:

Jede Funktion von Invarianten einer Gruppe ist wiederum Invariante derselben[6]).

Neben diesen invarianten Funktionen giebt es noch eine zweite Art von invarianten Gebilden nämlich die invarianten Gleichungen, bezüglich Gleichungssysteme, die man auch relative Invarianten nennt

---

1) Anmerkung: Kapitel 3, § 13.

2) Anmerkung: Kapitel 9, §§ 39, 41 und 45.

3) Anmerkung: Kapitel 9, § 39.

4) Anmerkung: Kapitel 6, §§ 13 und 14.

5) Anmerkung: Kapitel 13, § 58.

6) Anmerkung: Kapilel 13, § 58.

Ein Gleichungssystem $\omega_1(x_1 \ldots x_n) = 0$, $\omega_2(x_1 \ldots x_n) = 0 \ldots \omega_q(x_1 \ldots x_n) = 0$ heisst dann ıvariant bei einer Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$, wenn es bei jeder Transformation der Gruppe in ein Gleichungs-ystem übergeht, welches mit dem ursprünglichen äquivalent ist.

Als notwendiges Kriterium hierfür ergiebt sich, dass die Ausdrücke

$$X_k \omega_1, \quad X_k \omega_2 \ldots \ldots X_k \omega_q, \quad k = 1 \ldots \ldots r,$$

ermöge der Gleichungen des Systems verschwinden müssen.

Besteht das System nur aus einer Gleichung, so ist dieses Kriterium hinreichend, wenn nicht le Grössen

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n}$$

verschwinden.

Besteht das System aus zwei Gleichungen $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, so ist das Kriterium hinreichend, enn nicht alle Funktionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} \ldots\ldots$$

rschwinden.

Besteht das System aus q Gleichungen

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0 \ldots \omega_q = 0,$$

wird das Kriterium hinreichend, wenn nicht alle q-reihigen Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_q} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \omega_q}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_q}{\partial x_q} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{q-1}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{q+1}} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{q-1}} & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{q+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \omega_q}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_q}{\partial x_{q-1}} & \frac{\partial \omega_q}{\partial x_{q+1}} \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

schwinden.

Dies erreicht man aber stets, wenn man die Gleichungen des Systems nach einer Veränderlichen löst:

$$\begin{aligned} x_1 - f_1(x_2 \ldots x_n) &= 0 \\ x_1 - f_2(x_2 \ldots x_n) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_1 - f_q(x_2 \ldots x_n) &= 0 \end{aligned}$$ [1].

---

§ 3. Erweiterung einzelner Transformationen[2].

Denkt man sich jetzt, wiederum in den n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, eine einzelne Transformation

$$y_k = f_k(x_1 \ldots x_n), \quad k = 1 \ldots n;$$

gelegt und nimmt an, dass zwischen den x_k eine Anzahl Relationen, etwa $n-q$, bestehen, so ergiebt gegebene Transformation auch $n-q$ Relationen zwischen den y_k.

Nun ist klar, dass man vermöge der $n-q$ Relationen $n-q$ von den x_k als Funktionen der gen q darstellen kann; es giebt also eine bestimmte Anzahl Differentialquotienten $p_1\, p_2 \ldots$ der en $n-q$ Grössen x_k nach den übrigen q. Durch diese Relationen kann man auch $n-q$ Grössen y_k als ktionen der übrigen y_k darstellen; es giebt also auch eine bestimmte Anzahl Differentialquotienten $p'_2 \ldots$ Da nun aber die Relationen zwischen den y_k vermöge der gegebenen Transformation durch Relationen zwischen den x_k bestimmt sind, so müssen auch zwischen den Differentialquotienten $p'_1\, p'_2 \ldots$

[1]) Anmerkung: Kapitel 14.

[2]) Anmerkung: Kapitel 25.

und $p_1\, p_2$ .. Relationen bestehen. Diese Relationen sind von der Beschaffenheit, dass sich die Differentialquotient… von erster bis mter Ordnung p'_k .. als Funktionen der x_k und der Differentialquotienten von erster b… mter Ordnung p_k .. und umgekehrt die p_k .. als Funktionen der y_k und p'_k .. ausdrücken lassen.

Damit sind aber Relationen gefunden, welche zeigen, wie sich bei der gegebenen Transformation d… Differentialquotienten transformieren.

Fügt man diese Relationen der Transformation

$$y_k = f_k(x_1 \, . \, . \, x_n), \quad k = 1 \, . \, . \, n,$$

hinzu, so hat man damit eine Transformation gefunden, die neben der Überführung der Veränderlich… x_k in die Veränderlichen y_k zugleich die Überführung der Differentialquotienten der x_k in die entsprechend… Differentialquotienten der y_k leistet Eine solche Transformation nennt man eine erweiterte Transformatio… Die Erweiterung kann sich auf die ersten Ableitungen allein oder auch zugleich auf die zweiten, dritten u. s. … Ableitungen erstrecken und man hat dementsprechend eine einmal, eine zweimal, eine dreimal u. s. … erweiterte Transformation[1]).

Dass die Relationen in der That die angegebene Beschaffenheit haben, dass man also eine gegebe… Transformation erweitern kann, wird dadurch bewiesen, dass man diese Relationen wirklich berechnen kan… Weil diese Berechnung einen allgemeinen Satz über die Erweiterung ergiebt, so sei sie hier in dr… Veränderlichen für die erste Erweiterung angedeutet:

Gegeben sei die Transformation

$$x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z),$$

.. der die Veränderliche z von x und y abhängig ist:

$$z = \varphi(x, y).$$

..nn sind die Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \; \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

definiert durch die Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Die Relation $z = \varphi(x, y)$ möge bei der gegebenen Transformation übergehen in

$$z' = \varphi'(x', y').$$

Dann sind die Ableitungen

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = p', \quad \frac{\partial z'}{\partial y'} = q'$$

definiert durch die Gleichung:

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0.$$

Trägt man hier die Werte von z', x', y' ein und berücksichtigt dabei die Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

so bekommt man:

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial x} - p'\frac{\partial X}{\partial x} - q'\frac{\partial Y}{\partial x} + p\left(\frac{\partial Z}{\partial z} - p'\frac{\partial X}{\partial z} - q'\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\right\} dx$$
$$+ \left\{\frac{\partial Z}{\partial y} - p'\frac{\partial X}{\partial y} - q'\frac{\partial Y}{\partial y} + q\left(\frac{\partial Z}{\partial z} - p'\frac{\partial X}{\partial z} - q'\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\right\} dy = 0.$$

Hieraus folgen die beiden Gleichungen

$$p'\left(\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial z}\right) + q'\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p\frac{\partial Y}{\partial z}\right) = \frac{\partial Z}{\partial x} + p\frac{\partial Z}{\partial z},$$
$$p'\left(\frac{\partial X}{\partial y} + q\frac{\partial X}{\partial z}\right) + q'\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + q\frac{\partial Y}{\partial z}\right) = \frac{\partial Z}{\partial z} + q\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Aus diesen können p' und q' eindeutig bestimmt werden als Funktionen von x, y, z, p, q.

[1]) Anmerkung: Kapitel 25, Einleitung.

Gleichzeitig zeigt die ursprüngliche Gleichung, dass es möglich ist, eine Grösse $\varrho\,(x,y,z)$ so zu estimmen, dass

$$dZ - p' dX - q' dY = \varrho\,(dz - p\,dx - q\,dy)$$

dx, dy, dz identisch besteht. Das sagt aus, dass die erweiterte Transformation

$$x' = X(x,y,z), \quad y' = Y(x,y,z), \quad z' = Z(x,y,z), \quad p = \Pi\,(x,y,z,p,q), \quad q = K\,(x,y,z,p,q)$$

ie Pfaffsche Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

ıvariant lässt; man erhält also den Satz:

Um eine gegebene Transformation einmal zu erweitern, hat man nur die Forderung analytisch zu ɔrmulieren, dass die erweiterte Transformation die Pfaffsche Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

ıvariant lässt.

Will man zweimal erweitern, so zieht man noch die Gleichungen

$$dp - r\,dx - s\,dy = 0,$$
$$dq - s\,dx - t\,dy = 0,$$

elche die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

finieren, hinzu und kommt zu vollständig entsprechenden Resultaten.

Dass hierbei eine doppelte Bestimmung der Grösse s eintritt, ist unwesentlich, da beide estimmungen denselben Wert für s liefern.

Allgemein gewinnt man demnach den Satz:

Um eine gegebene Transformation i-mal zu erweitern, hat man nur die Forderung analytisch zu rmulieren, dass die Pfaff'schen Differentialgleichungen, welche die ersten bis i-ten Ableitungen definieren, i der erweiterten Transformation invariant bleiben[1]).

§ 4. Erweiterung von Gruppen[2]).

Kehrt man zu der r-gliedrigen Gruppe von Transformationen

$$x'_k = f_k(x_1 \,.\,.\, x_n, \quad a_1 \,.\,.\, a_r), \quad k = 1 \,.\,.\, n,$$

ück, so kann man sich denken, dass nach den obigen Regeln jede einzelne Transformation der Gruppe eitert worden ist und zwar zunächst nur einmal. Dann erhält man eine Schar von ∞^r erweiterten nsformationen

$$x'_k = f_k(x_1 \,.\,.\, x_n, \quad a_1 \,.\,.\, a_r), \quad k = 1 \,.\,.\, n,$$
$$p'_i = \varphi_i\,(x_1 \,.\,.\, x_n, \quad p_1 \,.\,.\, p_q, \quad a_1 \,.\,.\, a_r), \quad i = 1 \,.\,.\, q,$$

che man auch als ∞^r Transformationen in den $n + q$ Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$, $p_1 \,.\,.\, p_q$ ansehen kann. diesen gilt dann der wichtige Satz:

Erweitert man sämtliche Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe in n Veränderlichen, so et die Gesamtheit der erweiterten Transformationen ebenfalls eine r-gliedrige Gruppe. Treten hierbei bleitungen auf, so besteht die neue Gruppe aus Transformationen in $n + q$ Veränderlichen.

Setzt man $n = 3$, und nimmt an, dass die Transformationen

$$x' = X(x,y,z,a_1 \,.\,.\, a_r), \quad y' = Y(x,y,z,a_1 \,.\,.\, a_r), \quad z' = Z(x,y,z,a_1 \,.\,.\, a_r)$$

r-gliedrige Gruppe bilden, so bilden also auch die Transformationen

$$x' = X(x,y,z,a_1 \,.\,.\, a_r), \quad y' = Y(x,y,z,a_1 \,.\,.\, a_r), \quad z' = Z(x,y,z,a_1 \,.\,.\, a_r)$$
$$p' = \Pi\,(x,y,z, p,q,a_1 \,.\,.\, a_r), \quad q' = K\,(x,y,z,p,q,a_1 \,.\,.\, a_r)$$

r-gliedrige Gruppe.

Betrachtet man in der That ausser der ebengenannten noch die Transformation

$$x'' = X\,(x',y',z',b_1 \,.\,.\, b_r), \quad \ldots\, p'' = \Pi\,(x',y',z',p',q',b_1 \,.\,.\, b_r),$$

st nach Voraussetzung

$$x'' = X\,(x,y,z,c_1 \,.\,.\, c_r), \quad y'' = Y\,(x,y,z,c_1 \,.\,.\, c_r),$$
$$z'' = Z\,(x,y,z,c_1 \,.\,.\, c_r),$$

i die c nur Funktionen von a und b sind.

---

[1]) Anmerkung: Kapitel 25, § 129.

[2]) Anmerkung: Kapitel 25.

Aus den Gleichungen

$$d z' - p' d x' - q' d y' = \varrho (d z - p d x - q d y)$$
$$d z'' - p'' d x'' - q'' d y'' = \varrho' (d z' - p' d x' - q' d y')$$

folgt aber:

$$d z'' - p'' d x'' - q'' d y'' = \varrho \cdot \varrho' (d z - p d x - q d y).$$

Diese Gleichung zeigt, dass p'' und q'' ebenso von x, y, z, p, q und den c abhängen, wie p' und q' x, y, z, p, q und den a. Hiermit ist der Beweis erbracht. Man kann also zu jeder Gruppe

„erweiterte Gruppen"

bestimmen. Dass es nicht nur eine solche giebt, ist darin begründet, dass man die Relationen zwis den Veränderlichen durchaus beliebig wählen kann.

Die erweiterte r-gliedrige Gruppe hat mit der ursprünglichen auch die Eigenschaft gemein, sie ebenfalls von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt ist.

Beschränkt man sich auch hier auf den Fall $n = 3$, so haben die infinitesimalen Transformati der ursprünglichen Gruppe die Symbole:

$$X_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z}, \quad k = 1 \,.\,. \, r.$$

Die infinitesimalen Transformationen der einmal erweiterten Gruppe wird man dann symbo schreiben müssen:

$$X_k^{(1)} f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} + \pi_k \frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa_k \frac{\partial f}{\partial q}, \quad k = 1 \,.\,. \, r,$$

wobei π_k und $\varkappa_k$ die Inkremente von p und q bedeuten.

Diese Transformationen sind nur dann Transformationen der erweiterten Gruppe, wenn jede ihnen die Pfaffsche Gleichung

$$d z - p d x - q d y = 0$$

invariant lässt. Ist diese Forderung hinreichend, um π und $\varkappa$ eindeutig zu bestimmen, dann sind d dieselbe die erweiterten infinitesimalen Transformationen gefunden, ihr Vorhandensein ist also bewiesen

Diese Forderung findet ihren analytischen Ausdruck in der Gleichung:

$$d \zeta - p d \xi - q d \eta - \pi d x - \varkappa d y = \varrho (d z - p d x - q d y).$$

Hieraus folgt:

$$\varrho = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - p \frac{\partial \xi}{\partial z} - q \frac{\partial \eta}{\partial z},$$
$$\pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - p \frac{\partial \xi}{\partial x} - q \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varrho \cdot p,$$
$$\varkappa = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - p \frac{\partial \xi}{\partial y} - q \frac{\partial \eta}{\partial y} + \varrho \cdot q.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man für π und $\varkappa$

$$\pi = \frac{d \zeta}{d x} - p \frac{d \xi}{d x} - q \frac{d \eta}{d x},$$
$$\varkappa = \frac{d \zeta}{d y} - p \frac{d \xi}{d y} - q \frac{d \eta}{d y},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d \varphi}{d x},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d \varphi}{d y}.$$

Hiermit ist die Existenz der infinitesimalen Transformationen der erweiterten Gruppe erwiesen dass man nunmehr von der erweiterten Gruppe

$$X_1^{(1)} f, \quad X_2^{(1)} f, \quad .\,. \, X_r^{(1)} f$$

reden kann.

Ganz ebenso gestaltet sich die Beweisführung für eine mehrfach erweiterte Gruppe. Man kann o allgemein zu einer r-gliedrigen Gruppe

$$X_1 f \ldots X_r f$$

e bestimmte Anzahl beliebig weit erweiterter Gruppen

$$X_1^{(j)} f, \quad X_2^{(j)} f, \quad \ldots X_r^{(j)} f$$

bilden.

Für diese neuen Gruppen gelten auch die Relationen

$$\left(X_i^{(j)} X_k^{(j)}\right) = \Sigma_s c'_{iks} X_s^{(j)} f, \quad i, k = 1 \ldots r,$$

l es ist

$$\left(X_i^{(j)} X_k^{(j)}\right) = X_i^{(j)}\left(X_k^{(j)}(f)\right) - X_k^{(j)}\left(X_i^{(j)}(f)\right)$$

nfalls eine erweiterte Transformation der Gruppe.

Da nun

$$\left(X_i^{(j)} X_k^{(j)}\right)$$

die Form

$$X_i X_k f - X_k X_i f + \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \beta \frac{\partial f}{\partial q}$$

, so ergiebt sich zugleich, dass die Transformation

$$\left(X_i^{(j)} X_k^{(j)}\right)$$

erweiterte zur Transformation

$$(X_i X_k)$$

ist, also:

$$\left(X_i^{(j)} X_k^{(j)}\right) = \left(X_i X_k\right)^{(j)} = \Sigma_s c_{iks} X_s^{(j)} f.$$

Hieraus folgt weiter, dass $c'_{iks} = c_{iks}$ ist, dass also beide Gruppen gleich zusammengesetzt sind[1]). Alle diese Sätze bestätigen sich an dem oben angeführten Beispiel der allgemeinen linearen ppe. Fasst man hier y als Funktion von x auf, bezeichnet die Ableitungen von y nach x mit $y_1\, y_2 \ldots$ erweitert die infinitesimalen Transformationen derselben nach den angegebenen Regeln, so bekommt die erweiterte Gruppe:

$$X_1^{(j)} f = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$X_2^{(j)} f = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_3^{(j)} f = x \frac{\partial f}{\partial y} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

$$X_4^{(j)} f = y \frac{\partial f}{\partial y} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} - \ldots,$$

$$X_5^{(j)} f = x \frac{\partial f}{\partial x} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - 2\, y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - 3\, y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} - \ldots,$$

$$X_6^{(j)} f = y \frac{\partial f}{\partial x} - y^2{}_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - 3\, y_1\, y_3 \frac{\partial f}{\partial y_2} - (4\, y_1\, y_3 - 3\, y_2{}^2) \frac{\partial f}{\partial y_3} - \ldots$$

Und nun ergiebt sich thatsächlich:

$$\left(X_1^{(j)} X_2^{(j)}\right) = 0$$
$$\left(X_1^{(j)} X_3^{(j)}\right) = X_2^{(j)} f$$
$$\left(X_1^{(j)} X_4^{(j)}\right) = 0$$
$$\left(X_1^{(j)} X_5^{(j)}\right) = X_1^{(j)} f$$
$$\left(X_1^{(j)} X_6^{(j)}\right) = 0$$
$$\left(X_2^{(j)} X_3^{(j)}\right) = 0$$
$$\left(X_2^{(j)} X_4^{(j)}\right) = X_2^{(j)} f$$
$$\left(X_2^{(j)} X_5^{(j)}\right) = 0$$
$$\left(X_2^{(j)} X_6^{(j)}\right) = X_1^{(j)} f$$
$$\left(X_3^{(j)} X_4^{(j)}\right) = X_2^{(j)} f$$
$$\left(X_3^{(j)} X_5^{(j)}\right) = - X_3^{(j)} f.$$

. . . .

[1]) Anmerkung: Kapitel 17 und 25, § 129

§ 5. Invarianten erweiterter Gruppen[1]).

Betrachtet man nunmehr die erweiterte Gruppe

$$X_1^{(j)} f \,.\,.\, X_r^{(j)} f,$$

beschränkt sich aber auf den Fall von zwei Veränderlichen x, y und bezeichnet die Inkremente Ableitungen $y_1, y_2 \,.\,.$ mit $\eta^{(1)}, \eta^{(2)} \,.\,.,$ so kann man die im § 2 angeführten Sätze auch auf diese Gru anwenden, indem man sie als eine Gruppe in $n+j$ Veränderlichen ansieht.

Dann gilt nach dem obigen der Satz:

Eine Funktion $\varphi(x, y, y_1 \,.\,.\, y_j)$ ist dann und nur dann Invariante der Gruppe, wenn sie e Lösung des vollständigen Systems

$$X_k^{(j)} f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_{k}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{k}^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y_2} + \,.\,.\, \eta_{k}^{(j)} \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0, \quad k = 1 \,.\,.\, r,$$

(Dass diese Gleichungen ein vollständiges System bilden, folgt ohne weiteres aus den Relatio

$$\left(X_i^{(j)} X_k^{(j)}\right) = \Sigma c_{iks} X_s^{(j)} f).$$

Diese Invarianten der erweiterten Gruppen, welche neben den Veränderlichen auch deren Ableitun enthalten, sind selbstverständlich auch Invarianten der ursprünglichen Gruppe. Denn die Erweiterung best nur darin, dass die Transformation der Differentialquotienten durch die ursprüngliche Gruppe berücksich wird. Man bezeichnet deshalb diese Invarianten der erweiterten Gruppe als die Differentialinvariant der ursprünglichen Gruppe[2]).

Man findet die Differentialinvarianten einer Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$, indem man das vollständ System integriert, welches entsteht, wenn man die erweiterten infinitesimalen Transformationen gleich 0 se

Daraus geht hervor, dass es sicher stets solche Differentialinvarianten giebt, für die

$$j + 2 > r$$

ist, und zwar giebt es mindestens

$$j + 2 - r.$$

Setzt man nun eine solche Differentialinvariante, welche fernerhin als absolute Differentialinvaria bezeichnet werden soll, gleich einer Konstanten, so muss die Differentialgleichung, die so gewon wird, auch invariant bleiben. Eine r-gliedrige Gruppe von Punkttransformationen der Ebene also sicher invariante Differentialgleichungen von $(r-1)$ter und höherer Ordnung. (Denn j muss mindest gleich $r-1$ sein.)

Giebt es nun noch weitere invariante Differentialgleichungen?

Um diese Frage zu beantworten, wendet man die oben angegebenen Sätze über invaria Gleichungen auf die erweiterte Gruppe an. Denn nur durch sie ist es überhaupt noch möglich, invaria Gleichungen der erweiterten Gruppe zu gewinnen.

Wenn die erweiterte Gruppe nun wirklich Gleichungen von $(r-2)$ter oder niederer Ordnu etwa eine Gleichung

$$W(x, y, y_1 \,.\,.\, y_{r-2}) = 0,$$

invariant lässt, so müssen die Gleichungen

$$X_k^{(r-2)} W = 0, \quad k = 1 \,.\,.\, r,$$

vermöge $W = 0$ identisch bestehen.

Folgt nun aus $W = 0$

$$y_{r-2} = \varphi(x, y, y_1 \,.\,.\, y_{r-3})$$

und bezeichnet man die Substitution der Funktion φ für y_{r-2} durch $[\,]$, so müssen folgende Gleichung Identitäten sein:

$$\left[X_k^{(r-2)} W\right] = \xi_k \left[\frac{\partial W}{\partial x}\right] + \eta_k \left[\frac{\partial W}{\partial y}\right] + \eta^{(1)} \left[\frac{\partial W}{\partial y_1}\right] + \,.\,.\, \left[\eta_k^{(r-2)}\right] \left[\frac{\partial W}{\partial y_{r-2}}\right] \equiv 0, \quad k = 1 \,.\,.\, r.$$

---

[1]) Anmerkung: Kapitel 25.

[2]) Anmerkung: Kapitel 25, §§ 130 und 131.

Diese Identitäten können nur bestehen, wenn entweder alle [ ] verschwinden oder wenn die terminante

$$\left|\begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \cdot\,\cdot & [\eta_1^{(r-2)}] \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} & \cdot\,\cdot & [\eta_2^{(r-2)}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \eta_r^{(1)} & \eta_r^{(2)} & \cdot\,\cdot & [\eta_r^{(r-2)}] \end{matrix}\right|$$

ntisch verschwindet. Das erstere kann man vermeiden, wenn man $W = 0$ nach irgend einer änderlichen auflöst. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass die genannte Determinante identisch schwindet. Dass heisst aber, dass die Determinante

$$\left|\begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \cdot\,\cdot & \eta_1^{(r-2)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \cdot\,\cdot & \eta_2^{(r-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \eta_r^{(1)} & \cdot\,\cdot & \eta_r^{(r-2)} \end{matrix}\right|$$

nöge der Gleichung $y^{(r-2)} = \varphi(x\, y\, y_1 \,.\,.\, y_{r-3})$ verschwindet. Daraus geht hervor, dass diese Gleichung st erhalten wird, wenn man die Determinante gleich 0 setzt. Man findet also alle invarianten erentialgleichungen der Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ von niederer als $(r-1)$ ter Ordnung, wenn man die erminante, welche aus den $(r-2)$ mal erweiterten Transformationen derselben gebildet wird, gleich 0 setzt. se Invarianten werden im folgenden relative Differentialinvarianten oder insbesondere invariante erentialgleichungen genannt[2]).

Dies sind nach den früheren Auseinandersetzungen über invariante Gleichungen einer Gruppe die en einzigen Möglichkeiten, solche zu bestimmen; man hat somit alle invarianten Differentialgleichungen Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ gefunden.

Diese Untersuchung soll nunmehr noch auf das obige Beispiel, die allgemeine lineare Gruppe, wendet werden. Für dieselbe ist $r = 6$. Man findet also alle invarianten Differentialgleichungen von er und höherer Ordnung durch Integration eines vollständigen Systems, alle von niederer als fünfter ung durch Determinantenbildung. Beginnt man mit den letzteren, so muss man viermal erweitern, bekommt folgendes System:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0.$$

$$y\frac{\partial f}{\partial y} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} - y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0.$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - 2\,y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 3\,y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} - 4\,y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0.$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - y_1{}^2\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3\,y_1\,y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - (4\,y_1\,y_3 + 3\,y_2{}^2)\frac{\partial f}{\partial y_3} - (5\,y_1\,y_4 - 10\,y_2\,y_3)\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich die Determinante

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x & 0 & -y_1 & -2\,y_2 & -3\,y_3 & -4\,y_4 \\ y & 0 & -y_1{}^2 & -3\,y_1\,y_2 & -4\,y_1\,y_3 - 3\,y_2{}^2 & -5\,y_1\,y_4 + 10\,y_2\,y_3 \end{matrix}\right| = 2\,y_2{}^2(5\,y_3{}^2 - 3\,y_2\,y_4).$$

Es giebt demnach 2 invariante Differentialgleichungen von niederer als fünfter Ordnung:

$$y_2 = 0, \quad 5\,y_3{}^2 - 3\,y_2\,y_4 = 0.$$

Es bleibt noch die Integration des vollständigen Systems übrig, welches durch die fünfmal oder als fünfmal erweiterten Transformationen gebildet wird.

---

[1]) Anmerkung: Kapitel 25, § 132.

Dasselbe kann man ohne Schwierigkeiten auf folgende drei Gleichungen reducieren:

$$y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} + y_6 \frac{\partial f}{\partial y_6} = 0.$$

$$y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 2\, y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 3\, y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} + 4\, y_6 \frac{\partial f}{\partial y_6} = 0.$$

$$3 y_2{}^2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 10\, y_2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + (15\, y_2 y_4 + 10\, y^2{}_3) \frac{\partial f}{\partial y_5} + (21\, y_2 y_5 + 35\, y_3\, y_4) \frac{\partial f}{\partial y_6} = 0.$$

Führt man die Lösungen der letzten Gleichung:

$$\sigma_2 = 3\, y_2\, y_4 - 5\, y_3{}^2$$

$$\sigma_3 = 3\, y_2{}^2 y_5 - 15\, y_2 y_3\, y_4 + \frac{40}{3} y_3{}^3$$

$$\sigma_4 = 3\, y_2{}^3 y_6 - 21\, y_2{}^2 y_3\, y_5 + 35\, y_2 y^2{}_3\, y_4 - \frac{35}{3}\, y_3{}^4$$

in die vorletzte Gleichung als neue Veränderliche ein, so erhält man:

$$2\, \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} + 3\, \sigma_3 \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} + 4\, \sigma_4 \frac{\partial f}{\partial \sigma_4} = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung: $\dfrac{\sigma_3}{\sigma_2{}^{\frac{3}{2}}}, \quad \dfrac{\sigma_4}{\sigma_2{}^2}$

befriedigen auch die erste Gleichung. Man hat also die beiden invarianten Differentialgleichungen

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2{}^{\frac{3}{2}}} = a, \quad \frac{\sigma_4}{\sigma_2{}^2} = b$$

gewon[n]

Hiermit mögen diese allgemeinen Bemerkungen über die Theorie der Diffentialinvarianten abgeschlos[sen] werden. Es sollen nur noch einige Sätze, welche sich den obigen Auseinandersetzungen nicht einfü[gen] liessen, auf die aber im folgenden zurückgegriffen werden muss, hier angeführt werden.

---

§ 6. Einzelne bemerkenswerte Sätze über Differentialinvarianten.

1. Eine Differentialgleichung (relative Differentialinvariante) $f(x, y, y_1, y_2 \ldots y_\varrho) = 0$ bleibe einer endlichen Transformation $y' = Y(x,y), \quad x' = X(x,y)$ invariant und sei nach der höchsten Ableitung y_ϱ auflösbar. Führt man die Transformation auf aufgelöste Gleichung $y_\varrho - \varphi(x, y, y_1 \cdot\cdot y_{\varrho-1})$ aus, dann tritt auf der linken Seite der Gleichung ein Faktor von der Form:

$$\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial y} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X}{\partial y}\right)^{\varrho+1}} = \frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^{\varrho+1}}$$

hinzu.

Zum Beweise muss zunächst $y'_1, y'_2 \ldots$ berechnet werden. Es ist:

$$y'_1 = \frac{d Y}{d X} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y}{\partial y}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X}{\partial y}} = \frac{Y_x + y_1 Y_y}{X_x + y_1 X_y}.$$

$$y'_2 = \frac{d y'_1}{d x'} = \frac{d y'_1}{d X} = \frac{\dfrac{\partial y'_1}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial y'_1}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial y'_1}{\partial x}}{X_x + y_1 X_y}.$$

$$y'_3 = \frac{d y'_2}{d x'} = \frac{d y'_2}{d X} = \frac{\dfrac{\partial y'_2}{\partial y_2} y_3 + \dfrac{\partial y'_2}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial y'_2}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial y'_2}{\partial x}}{X_x + y_1 X_y}$$

. . . .

$$y'_\varrho = \frac{d y'_{\varrho-1}}{d x'} = \frac{d y'_{\varrho-1}}{d X} = \frac{\dfrac{\partial y'_{\varrho-1}}{\partial y_{\varrho-1}} y_\varrho + \dfrac{\partial y'_{\varrho-1}}{\partial y_{\varrho-2}} y_{\varrho-1} + \ldots + \dfrac{\partial y'_{\varrho-1}}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial y'_{\varrho-1}}{\partial x}}{X_x + y_1 X_y}.$$

Man sieht, dass in allen diesen Ausdrücken die höchste Ableitung linear vorkommt. Man kann ɛselben also abgekürzt schreiben:

$$y'_2 = \frac{\frac{\partial y'_1}{\partial y_1}}{X_x + y_1 X_y} y_2 + \psi_2 (x, y, y_1)$$

$$y'_3 = \frac{\frac{\partial y'_2}{\partial y_2}}{X_x + y_1 X_y} y_3 + \psi_3 (x, y, y_1, y_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y'_\varrho = \frac{\frac{\partial y'_{\varrho-1}}{\partial y_{\varrho-1}}}{X_x + y_1 X_y} y_\varrho + \psi_\varrho (x, y, y_1 \cdot\cdot y_{\varrho-1}).$$

Berechnet man die Zähler dieser Ausdrücke, so erhält man:

$$y'_2 = \frac{\frac{\partial y'_1}{\partial y_1}}{X_x + y_1 X_y} y_2 + \psi_2 = \frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^3} y_2 + \psi_2$$

$$y'_3 = \frac{\frac{\partial y'_2}{\partial y_2}}{X_x + y_1 X_y} y_3 + \psi_3 = \frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^4} y_3 + \psi_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y'_\varrho = \frac{\frac{\partial y'_{\varrho-1}}{\partial y_{\varrho-1}}}{X_x + y_1 X_y} y_\varrho + \psi_\varrho = \frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^{\varrho+1}} y_\varrho + \psi_\varrho.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$y'_\varrho - \varphi (x', y', y'_1 \cdot\cdot\cdot y'_{\varrho-1}) = 0$$

so ergiebt sich:

$$\frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^{\varrho+1}} y_\varrho - \psi (x, y, y_1 \cdot\cdot\cdot y_{\varrho-1}) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung muss durch die Gleichung

$$y_\varrho - \varphi = 0$$

tisch verschwinden, da die ursprüngliche Gleichung bei der gegebenen Transformation invariant sein Es ist also:

$$\frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^{\varrho+1}} \cdot \varphi - \psi \equiv 0, \text{ oder } \psi = \frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^{\varrho+1}} \cdot \varphi.$$

nimmt die ursprüngliche Gleichung $y_\varrho - \varphi = 0$ durch die gegebene Transformation

$$x' = X (x, y)$$
$$y' = Y (x, y)$$

Form an:

$$\frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^{\varrho+1}} (y_\varrho - \varphi) = 0, \qquad \varrho \geqq 2.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Genau in derselben Weise kann man den Faktor berechnen, wenn die Gleichung $f = 0$ die tesimale Transformation

$$\delta x = \xi \delta t$$
$$\delta y = \eta \delta t$$

gestattet[1]).

[1]) Anmerkung: Diese Berechnung soll hier durchgeführt werden, da keine Ableitung dieser allgemeinen el für infinitesimale Transformationen an einem anderen Orte bekannt ist, das Resultat derselben im folgenden mehrfach Verwendung findet.

Soll $y_\varrho - \varphi = 0$ invariante Gleichung sein, so muss

$$\delta y_\varrho - \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \delta y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \delta y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \ldots - \delta y_{\varrho-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{\varrho-1}} = 0$$

sein vermöge $$y_\varrho - \varphi = 0.$$

Nun ist:

$$\delta y_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} + y_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - y_1{}^2 \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\delta y_2 = y_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{2 \partial \xi}{\partial x} - 3 y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \omega_2 (x, y, y_1)$$

$$\delta y_3 = y_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{3 \partial \xi}{\partial x} - 4 y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \omega_3 (x, y, y_1, y_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta y_k = y_k \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - k \frac{\partial \xi}{\partial x} - (k+1) y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \omega_k (x, y, y_1 \ldots y_{k-1}).$$

Die obige Bedingung erhält also folgende Form:

$$y_\varrho \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \varrho \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\varrho+1) y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \omega_\varrho (x, y, y_1 \ldots y_{\varrho-1}) - \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \delta y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \ldots - \delta y_{\varrho-1} \frac{\partial \varphi}{\partial_{\varrho-1}}$$

vermöge $$y_\varrho - \varphi = 0$$ oder kü

$$y_\varrho \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \varrho \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\varrho+1) y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \omega'_\varrho (x, y, y_1 \ldots y_{\varrho-1}) = 0$$

vermöge $$y_\varrho - \varphi = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\varphi \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \varrho \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\varrho+1) y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \omega'_\varrho \equiv 0$$

oder: $$\omega'_\varrho = - \varphi \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \varrho \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\varrho+1) y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right).$$

Nun geht die Gleichung

$$y_\varrho - \varphi = 0$$

bei Ausführung der Transformation über in:

$$y_\varrho \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \varrho \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\varrho+1) y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \omega'_\varrho (x, y, y_1 \ldots y_{\ -1}) = 0.$$

Trägt man den Wert von ω'_ϱ ein, so bekommt man

$$(y_\varrho - \varphi) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \varrho \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\varrho+1) y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0.$$

Es ergiebt sich also als Faktor:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} - \varrho \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\varrho+1) y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

2. Sind

$$\begin{aligned} y_{\varrho_1} - \varphi_1 (x, y, y_1 \ldots y_{\varrho_1-1}) &= 0 \\ y_{\varrho_2} - \varphi_r (x, y, y_1 \ldots y_{\varrho_2-2}) &= 0 \qquad \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \geqq 2 \\ y_{\varrho_3} - \varphi_3 (x, y, y_1 \ldots y_{\varrho_3-3}) &= 0, \end{aligned}$$

drei Differentialgleichungen, die bei der endlichen Transformation

$$\begin{aligned} x' &= X(x, y) \\ y' &= Y(x, y) \end{aligned}$$

invariant bleiben (relative Differentialinvarianten), so ist:

$$(y_{\varrho_1} - \varphi_1)^\lambda (y_{\varrho_2} - \varphi_2)^\mu (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^\nu$$

eine absolute Differentialinvariante dieser Transformation, wenn λ, μ und ν die Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \nu &= 0 \\ \lambda \varrho_1 + \mu \varrho_2 + \nu \varrho_3 &= 0. \end{aligned}$$

Zum Beweise sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$X_x Y_y - X_y Y_x = \triangle$$
$$X_x + y_1 X_y = N.$$

Dann ergiebt die Ausführung der Transformation nach Satz 1):

$$y'_{\varrho_1} - \varphi_1 = \frac{\triangle}{N^{\varrho_1+1}} (y_{\varrho_1} - \varphi_1)$$

$$y'_{\varrho_2} - \varphi_2 = \frac{\triangle}{N^{\varrho_2+1}} (y_{\varrho_2} - \varphi_2)$$

$$y'_{\varrho_3} - \varphi_3 = \frac{\triangle}{N^{\varrho_3+1}} (y_{\varrho_3} - \varphi_3).$$

Also ist:

$$_1 - \varphi_1)^\lambda (y'_{\varrho_2} - \varphi_2)^\mu (y'_{\varrho_3} - \varphi_3)^\nu = \frac{\triangle^{\lambda+\mu+\nu}}{N^{(\varrho_1+1)\lambda + (\varrho_2+1)\mu + (\varrho_3+1)\nu}} \cdot (y_{\varrho_1} - \varphi_1)^\lambda (y_{\varrho_2} - \varphi_2)^\mu (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^\nu.$$

Da nun

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$
$$\lambda \varrho_1 + \mu \varrho_2 + \nu \varrho_3 = 0$$

ist,

rgiebt sich:

$$(y'_{\varrho_1} - \varphi_1)^\lambda (y'_{\varrho_2} - \varphi_2)^\mu (y'_{\varrho_3} - \varphi_3)^\nu = (y_{\varrho_1} - \varphi_1)^\lambda (y_{\varrho_2} - \varphi_2)^\mu (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^\nu.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3. Sind in drei Veränderlichen x, y, z, welche durch eine Relation gebunden sind (z Funktion x und y),

$$J_1 (x, y, z, p, q, r \ldots .)$$
$$J_2 (x, y, z, p, q, r \ldots .)$$
$$J_3 (x, y, z, p, q, r \ldots .)$$
$$J_4 (x, y, z, p, q, r \ldots .)$$

absolute Differentialinvarianten irgend einer Gruppe von Transformationen, deren allgemeine endliche sformationen lauten

$$x' = X (x, y, z, a_1, a_2 \ldots .)$$
$$y' = Y (x, y, z, a_1, a_2 \ldots .)$$
$$z' = Z (x, y, z, a_1, a_2 \ldots .),$$

t auch:

$$\frac{\dfrac{dJ_1}{dx}\dfrac{dJ_2}{dy} - \dfrac{dJ_1}{dy}\dfrac{dJ_2}{dx}}{\dfrac{dJ_3}{dx}\dfrac{dJ_4}{dy} - \dfrac{dJ_3}{dy}\dfrac{dJ_4}{dx}}$$

absolute Differentialinvariante dieser Gruppe.

Da zunächst J_1 und J_2 absolute Differentialinvarianten dieser Gruppe sind, so ist

$$a J_1 + b J_2 = c$$

invariante Differentialgleichung derselben. Aus ihr kann folgendes System von Differentialgleichungen let werden:

$$a \frac{dJ_1}{dx} + b \frac{dJ_2}{dx} = 0$$

$$a \frac{dJ_1}{dy} + b \frac{dJ_2}{dy} = 0.$$

Dieses System ist bei der gegebenen Transformation ebenfalls invariant, da dasselbe nach der ie der Differentialgleichungen dieselben Scharen von Integralflächen besitzt[1]) wie die ursprüngliche ıung. Es sind dies alle Scharen von Flächen, welche von der gegebenen Transformationsgruppe ant gelassen werden.

Da nun das System für alle Werte von a und b bestehen muss, so folgt aus ihm die Gleichung:

$$\frac{dJ_1}{dx}\frac{dJ_2}{dy} - \frac{dJ_2}{dx}\frac{dJ_1}{dy} = 0,$$

welche es ersetzt werden kann. Da diese dieselben Scharen von Integralflächen besitzt wie das System, auch sie bei der gegebenen Gruppe invariant bleiben.

---

[1]) Anmerkung: Der Beweis kann ausführlich ebenso geführt werden, wie es in zwei Veränderlichen in ıeorie der Differentialinvarianten geschieht.

Sind also zwei absolute Differentialinvarianten J_1 und J_2 irgend einer Gruppe gegeben, so erhält eine relative Differentialinvariante derselben, wenn man bildet:

$$\frac{dJ_1}{dx}\frac{dJ_2}{dy}-\frac{dJ_1}{dy}\frac{dJ_2}{dx}.$$

Demnach sind in dem Ausdruck:

$$\frac{\dfrac{dJ_1}{dx}\dfrac{dJ_2}{dy}-\dfrac{dJ_2}{dx}\dfrac{dJ_1}{dy}}{\dfrac{dJ_3}{dx}\dfrac{dJ_4}{dy}-\dfrac{dJ_4}{dx}\dfrac{dJ_3}{dy}}$$

Zähler und Nenner sicher relative Differentialinvarianten. Soll also der Quotient absolute Differentialinvar sein, d. h. ist der obige Satz richtig, so müssen sie sich bei den Transformationen der gegebenen Gr mit demselben Faktor reproducieren. Dieser Faktor soll für den Zähler berechnet werden.

Bezeichnet man mit $p', q', r', s', t' \ldots$ die transformierten Differentialquotienten $p, q, r, s, t, \ldots$ mit J'_1 und J'_2 die transformierten Funktionen J_1 und J_2, dann sind $p', q', r' \ldots$ Funktionen von $X,$ und deren Ableitungen (und damit auch Funktionen von $p, q, r, s, t \ldots$, was aber nicht in Betracht kom Nach Voraussetzung ist nun:

$$J'_1 = J_1(x', y', z', p', q' \ldots) = J_1(x, y, z, p, q \ldots)$$
$$J'_2 = J_2(x', y', z', p', q' \ldots) = J_2(x, y, z, p, q \ldots).$$

Da p' und q' Funktionen von X, Y, Z und deren Ableitungen sind, so sind auch J'_1 und Funktionen dieser Grössen. Da ferner x, y, z durch eine Relation verbunden sind, so sind es auch $X,$ Man kann diese Relationen zwischen X, Y, Z dadurch finden, dass man x, y, z als Funktionen von $X,$ ausdrückt, was nach der Definition der Funktionen X, Y, Z immer möglich ist, und in die Relationen x, y, z einsetzt. Aus der Gleichung, welche so entsteht, lässt sich Z als Funktion von X und Y berech Man kann also J'_1 und J'_2 als Funktionen von X und Y allein betrachten. Dann ist aber:

$$\frac{dJ'_k}{dx}=\frac{dJ'_k}{dX}\frac{dX}{dx}+\frac{dJ'_k}{dY}\frac{dY}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dJ'_k}{dy}=\frac{dJ'_k}{dX}\frac{dX}{dy}+\frac{dJ'_k}{dY}\frac{dY}{dx}, \quad k=1,2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dJ'_1}{dx}\frac{dJ'_2}{dy}-\frac{dJ'_1}{dy}\frac{dJ'_2}{dx}=\left(\frac{dJ'_1}{dX}\frac{dX}{dx}+\frac{dJ'_1}{dY}\frac{dY}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dJ'_2}{dX}\frac{dX}{dy}+\frac{dJ'_2}{dY}\frac{dY}{dy}\right)-$$
$$-\left(\frac{dJ'_1}{dX}\frac{dX}{dy}+\frac{dJ'_1}{dY}\frac{dY}{dy}\right)\cdot\left(\frac{dJ'_2}{dX}\frac{dX}{dx}+\frac{dJ'_2}{dY}\frac{dY}{dx}\right)=\left(\frac{dJ'_1}{dX}\frac{dJ'_2}{dY}-\frac{dJ'_1}{dY}\cdot\frac{dJ'_2}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\frac{d}{dx}\right.$$

Da nun $J'_1 = J_1$ und $J'_2 = J_2$ ist, so ergiebt sich hieraus:

$$\frac{dJ'_1}{dX}\frac{dJ'_2}{dY}-\frac{dJ'_1}{dY}\frac{dJ'_2}{dX}=\frac{1}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy}-\dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}}\cdot\left(\frac{dJ_1}{dx}\frac{dJ_2}{dy}-\frac{dJ_1}{dy}\cdot\frac{dJ_2}{dx}\right).$$

Da der Faktor, mit dem sich der Zähler

$$\frac{dJ_1}{dx}\frac{dJ_2}{dy}-\frac{dJ_1}{dy}\frac{dJ_2}{dx}$$

reproduciert, hiernach nur von den Funktionen X und Y abhängig ist, so muss dieselbe Rechnung den Nenner ergeben:

$$\frac{dJ'_3}{dx}\cdot\frac{dJ'_4}{dy}-\frac{dJ'_3}{dy}\frac{dJ'_4}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy}-\dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}}\cdot\left(\frac{dJ_3}{dx}\frac{dJ_4}{dy}-\frac{dJ_3}{dy}\frac{dJ_4}{dx}\right)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\dfrac{dJ'_1}{dX}\dfrac{dJ'_2}{dY}-\dfrac{dJ'_1}{dY}\dfrac{dJ'_2}{dX}}{\dfrac{dJ'_3}{dX}\dfrac{dJ'_4}{dY}-\dfrac{dJ'_3}{dY}\dfrac{dJ'_4}{dX}}=\frac{\dfrac{dJ_1}{dx}\dfrac{dJ_2}{dy}-\dfrac{dJ_1}{dy}\dfrac{dJ_2}{dx}}{\dfrac{dJ_3}{dx}\dfrac{dJ_4}{dy}-\dfrac{dJ_3}{dy}\dfrac{dJ_4}{dx}}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

II. Kapitel.

Vorin sind die Beziehungen der Reciprokantentheorie zur Theorie der Differentialinvarianten begründet?

Aus der Definition der Invariante ergiebt sich, dass eine Invariante, insbesondere auch eine erentialinvariante (absolute Differentialinvariante sowohl wie invariante Differentialgleichung) einer endlichen tinuierlichen Gruppe von Transformationen bei jeder Transformation der Gruppe invariant bleibt. raus folgt, dass unter den sämtlichen Differentialinvarianten einer bestimmten Transformation einer ppe alle Differentialinvarianten dieser Gruppe, sowie aller anderen Gruppen enthalten sein müssen, en die Transformation noch angehört.

Betrachtet man wiederum als Beispiel die allgemeine lineare Gruppe

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

st die Vertauschung der Veränderlichen

$$x' = y, \quad y' = x$$

Transformation dieser Gruppe, wie man sieht, wenn man den Parametern die Werte:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0$$

t. Daraus folgt nach dem Vorhergehenden, dass unter den sämtlichen Differentialinvarianten der isformation $x' = y$, $y' = x$ die Differentialinvarianten der allgemeinen linearen Gruppe enthalten müssen.

Von anderen bekannten endlichen kontinuierlichen Gruppen von Transformationen, welche in dieser eit in Betracht kommen, enthält auch die Gruppe

$$x' = y \,.\, \sin\alpha - x \,.\, \cos\alpha + a \;{}^{1})$$
$$y' = y \,.\, \cos\alpha + x \,.\, \sin\alpha + b,$$

ie schon oben als die orthogonale Gruppe bezeichnet worden ist und die durch die infinitesimalen sformationen

$$p, \; q, \; xq - yp$$

eten wird, die Vertauschung.

Ferner ist eine Gruppe dieser Beschaffenheit die allgemeine projektive Gruppe

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + c}, \;{}^{2})$$

infinitesimale Transformationen lauten:

$$p, q, xp, xq, yp, yq, x^2 p + xyq, xyp + y^2 q.$$

müssen unter den Differentialinvarianten der Transformation:

$$x' = y, \quad y' = x$$

die der orthogonalen und der allgemeinen projektiven Gruppe enthalten sein.

Diese Betrachtung ergiebt also, dass unter den sämtlichen Differentialinvarianten der Vertauschung Differentialinvarianten der allgemeinen linearen, der orthogonalen und der allgemeinen projektiven pe enthalten sein müssen; denn in diesen Gruppen kommt die Vertauschung der Veränderlichen als formation vor.

---

[1]) Anmerkung: Man hat hier nur den Parametern die folgenden Werte zu geben:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad a = b = 0.$$

[2]) Anmerkung: Man hat hier nur den Parametern die Werte zu geben:
$a_1 = 0, \; b_1 = 1, \; c_1 = 0, \; a_2 = 1, \; b_2 = 0, \; c_2 = 0, \; a = 0, \; b = 0, \; c = 1.$

In den Untersuchungen, welche Sylvester im American Journal of Mathematics, Bd. VIII und X, unter dem Titel:

„Lectures on the Theory of Reciprocants"

ausführt, und um deren Betrachtung es sich hier zunächst handelt, da sie als Grundlage der ga Reciprokantentheorie angesehen werden müssen, stellt er sich folgende Aufgabe:

Er will diejenigen Funktionen der Ableitungen zweier Veränderlicher x und y, im allgemeinen von den Veränderlichen x und y selbst frei sind, untersuchen, bezüg bestimmen, welche bei der Vertauschung der Veränderlichen bis auf einen Faktor, hinzutritt, ungeändert bleiben.[1])

Diese Funktionen nennt er Reciprokanten und daher die Theorie derselben „Reciprokantenthe

Diese Aufgabe bedeutet aber nach den Erörterungen des I. Kapitels, dass er die invaria Differentialgleichungen der Transformation

$$x' = y, \quad y' = x,$$

also der Vertauschung der Veränderlichen, welche allerdings im I. Kapitel nicht in Betracht gez ist, untersuchen will. Da er auch den Fall berücksichtigt, in welchem der Faktor nur Zahlen hat[2]), so sind unter diesen Funktionen auch die absoluten Differentialinvarianten dieser Transform enthalten.

Es ist also klar, dass Sylvesters Untersuchungen ein spezielles Problem aus der Theorie Differentialinvarianten im weitesten Sinne betreffen, so dass schon die allgemeine Untersuchung Reciprokanten Berührungspunkte mit der Theorie der Differentialinvarianten ergeben wird. Diesen sol folgenden zuerst eine kurze Betrachtung gewidmet werden.

Aber auch für Sylvester sind die allgemeinen Funktionen obiger Beschaffenheit, welche in Darstellung des I. Kapitels, wie schon bemerkt, überhaupt nicht berücksichtigt werden, keineswegs Hauptsache. Es gelingt ihm vielmehr im Laufe der Untersuchung zu beweisen, dass unter il Reciprokanten enthalten sind, welche sich entweder gegenüber der orthogonalen oder gegenüber der allgeme linearen oder gegenüber der allgemeinen projektiven Transformation ebenso verhalten, wie alle diese Funkti

---

[1]) Anmerkung: Sylvester sagt im American Journal, Bd. VIII, p. 203, Lecture II: „The expres $2\,y'\,y''' - 3\,y''^2$ (hier ist $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\ldots$) may be termed a reciprocant, meaning thereby tha interchanging y', y'', y''' with x', x'', x''' ($x' = \dfrac{dx}{dy}$, $x'' = \dfrac{d^2x}{dy^2}$, $x''' = \dfrac{d^3x}{dy^3}\ldots$) its form remained unaltered, sav to the acquisition of what may be called an extraneous factor".

Allgemeiner definiert er die Reciprokanten in demselben Bande p. 206, Lecture II:

„In general a Reciprocant may be defined to be a function F of such a kind, that $F\,(x', x''$ contains $F(y', y''\ldots)$ as a factor.

Es sei sogleich an dieser Stelle bemerkt, dass diese Definition Sylvesters nicht ausreichend ist. muss vielmehr die Beschränkung hinzugefügt werden, dass durch das Verschwinden der betreffenden Funktion Faktor nicht unendlich werden darf. Diese Ergänzung setzt Sylvester offenbar stillschweigend voraus; ohne dieselbe wird Sylvesters Forderung überhaupt durch jede Funktion der Ableitungen erfüllt; z. B. mag Funktion $f(y', y'', y'''\ldots)$ bei der Vertauschung der Veränderlichen in irgend eine Funktion $\psi\,(y', y'', y'''$ übergehen. Dann kann man schreiben:

$$\psi\,(y', y'', y'''\ldots) = \frac{\psi}{f}\cdot f.$$

$\dfrac{\psi}{f}$ ist Faktor, und Sylvesters Forderung ist ohne die erwähnte Beschränkung durch die beliebige Funk $f(y', y''\ldots)$ erfüllt.

[2]) Anmerkung: Man vergleiche American Journal, Bd. VIII, p. 206, Lecture II: An important spe case is that, in which the other factor is merely numerical.

h gegenüber der Vertauschung verhalten. Er zeigt nämlich (American Journal, Bd. VIII, Lection 9, 248), dass sich alle von x, y und y' freien, homogenen Reciprokanten auch bei der linearen nsformation

$$x' = fx + gy + h, \quad y' = f'x + g'y + h'$$

einem Faktor reproducieren. Alle von x, y, y' freien Reciprokanten nennt er „reine Reciprokanten" re Reciprocants), alle die, welche y' enthalten, gemischte (mixted) Reciprokanten. Ferner zeigt er, dass gemischten Reciprokanten, welche die Gleichung

$$Uf = \mu . y_1 . f$$

llen, auch die orthogonale Transformation

$$x' = y . \sin\alpha - x . \cos\alpha + a, \quad y' = x . \cos\alpha + x . \sin\alpha + b$$

atten. In derselben bedeutet Uf den Differentialausdruck

$$(1 - y_1{}^2)\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_1 \left(2 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + 3 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 4 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \ldots\right) + 3 y_2{}^2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 10 y_2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \ldots$$

μ eine Konstante. (Man vergl. American Journal, Bd. IX, p. 142, Lect. 17.)

Endlich beweist er noch, dass diejenigen reinen Reciprokanten, welche in den Grössen $y_2, y_3 \ldots$ rianten linearer Substitutionen sind, auch die allgemeine projektive Transformation:

$$x' = \frac{lx + my + n}{l''x + m''y + n''}, \quad y' = \frac{l'x + m'y + n'}{l''x + m''y + n''}$$

tten. (Man vergl. American Journal, Bd. VIII, p. 233, Lect. 6.)

Am Eingange dieses Kapitels ist nun gezeigt worden, dass unter allen Differentialinvarianten einer lnen Transformation diejenigen der sämtlichen Transformationsgruppen enthalten sind, in welchen Transformation vorkommt. Wie man sieht, ergiebt sich diese Thatsache für die Vertauschung auch ylvester; denn durch das Vorhergehende wird thatsächlich bewiesen, dass unter den Differentialinvarianten Vertauschung die der orthogonalen, linearen und projektiven Gruppe enthalten sind.

Gerade diese orthogonalen, reinen und projektiven Reciprokanten, wie sie Sylvester kurz benennt, n von ihm hauptsächlich untersucht, was im nächsten Kapitel ausführlich gezeigt werden soll. Diese rsuchung bezieht sich besonders auf das Verhalten dieser Funktionen gegenüber den genannten Transformationen. Es müssen sich also in diesen Untersuchungen Thatsachen aus der Theorie der rentialinvarianten wiederfinden.

Vor allem wird hierbei erörtert, wann eine Funktion der Ableitungen zu einer dieser Arten von rokanten gehört. Bei der Beantwortung dieser Frage zeigt sich besonders die vollständige Übereinstimmung r Theorien; denn auch Sylvester gewinnt die Formeln, welche im I. Kapitel entwickelt worden sind, bringt sie wenigstens in notwendigen Eigenschaften seiner Funktionen zum Ausdruck. Während aber Formeln im I. Kapitel abgeleitet worden sind, indem die unabhängigen infinitesimalen Transformationen Gruppe zur Vertretung der ganzen Gruppe benutzt werden, gewinnt Sylvester dieselben ohne diese ndung der infinitesimalen Transformationen im Sinne der Gruppentheorie. Er definiert vielmehr den benbegriff überhaupt nicht, wenn er auch die infinitesimale Transformation an sich und damit auch ite diesen Begriff verwendet. Deswegen soll im Anschluss an die Untersuchungen der reinen. onalen und projektiven Reciprokanten als Differentialinvarianten der entsprechenden Transformationsgruppen Erörterung über die Verwendung der infinitesimalen Transformation bei Sylvester angestellt werden. inzelvergleichung der Funktionen der beiden Theorien kann also nach folgenden zwei Gesichtspunkten geführt werden:

1. Die Reciprokanten als Differentialinvarianten der Vertauschung der Veränder- n ($x' = y$, $y' = x$).

2. Die reinen, die orthogonalen und die projektiven Reciprokanten als Differential- ianten der orthogonalen, der allgemeinen linearen und der allgemeinen projektiven sformationsgruppe mit besonderer Berücksichtigung der Verwendung der infinitesimalen sformation.

III. Kapitel.

Die Reciprokanten als Differentialinvarianten der Vertauschung
$(x' = y, \quad y' = x)$.

Nach der Definition, welche im vorigen Kapitel (p. 20) für alle Funktionen gegeben worde welche in der Reciprokantentheorie behandelt werden, muss man dieselben zwar als Differentialinvariante weitesten Sinne anerkennen; aber man kann, wie schon angedeutet worden ist, den Differentialinvaria welche im I. Kapitel behandelt worden sind, nur die orthogonalen, reinen und projektiven Reciprok unterordnen. Denn die obige Untersuchung über Differentialinvarianten behandelt Scharen von Transformat mit wenigstens einem willkürlichen Parameter, also auch mit wenigstens einer infinitesimalen Transform Die Reciprokantentheorie beschränkt sich dagegen in der allgemeinen Definition der Funktionen, w sie behandelt, auf eine einzige, von jedem Parameter freie, also niemals infinitesimale Transformation. können also nur die orthogonalen, reinen und projektiven Reciprokanten als Differentialinvarianten endl kontinuierlicher Transformationsgruppen bezeichnet werden.

Durch diesen Unterschied beider Theorien, welcher der allgemeinen Vergleichung derselben Grenze zieht, verliert der Vergleich derselben keineswegs an Wert.

Denn einmal ist die Beschränkung der Theorie der Differentialinvarianten auf endliche kontinuie Transformationsgruppen eine willkürliche. Sie ist nur erfolgt, weil gerade die invarianten Funkt dieser Transformationsgruppen in der Theorie der Differentialgleichungen[1]) und in vielen geometri Problemen, welche mit dieser Theorie in Verbindung stehen, grosse Bedeutung haben, wie man s erkannt hat, ehe man sie überhaupt als Differentialinvarianten von Transformationsgruppen betrachtete.

Aber vor allem beruht auch die Bedeutung der Reciprokantentheorie im wesentlichen auf d drei Unterarten der Reciprokanten. Die allgemeine Untersuchung der Reciprokanten dürfte wohl in Hauptsache überhaupt nur dazu dienen, diese drei speziellen Arten von Reciprokanten zu gewinnen. bestätigt die Inauguralrede Sylvesters zu Oxford, welche in der Zeitschrift „The Nature“, 6. Januar abgedruckt ist. Nach derselben sind diese drei Arten von Reciprokanten, wie die Differentialinvaria der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, deswegen besonders wertvoll, weil sie eine wic geometrische Bedeutung[2]) haben.

Auch die wichtige Beziehung der Reciprokanten zur Invariantentheorie besteht nur für die speziellen Arten von Reciprokanten. Dies findet man begründet in der ersten Lektion der Arbeiten American Journal, Bd. VIII, p. 197:

The parallelism between the theory of what may be called pure[3]) reciprocants and th invariants is so remarkable, that it will be frequently expedient . . . . . .

Man kann also mit Recht behaupten, dass die wichtigsten Funktionen, welche in Sylvesters Arb untersucht werden, einen speziellen Fall aus der Theorie der Differentialinvarianten bilden, während die Reciprokanten, die sich der Theorie der Differentialinvarianten in ihrer obigen Begrenzung unterordnen lassen, im wesentlichen nur der Erforschung der ersteren dienen.

Benutzt doch Sylvester bei seinen Untersuchungen nur die Kriterien, welche er für Unterscheidung der orthogonalen, reinen und projektiven Reciprokanten (Principianten) aufstellt. Leudesdorf hat überhaupt ein System von Gleichungen angegeben (vergl. Proceedings of the Lo Math. Soc., Bd. XVII, p. 336), das für alle gemischten Reciprokanten Giltigkeit hat.

---

[1]) Anmerkung: Man vergl. hierzu: S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Vorrede, p. IV, le Abschnitt; vor allem aber: Mathematische Annalen, Bd. XI: S. Lie, Klassifikation und Integration von gewöhnli Differentialgleichungen zwischen x und y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.

[2]) Anmerkung: Man vergl. hierzu auch American Journal, Bd. VIII, p. 197, wo Sylvester Reciprokanten „a new world of Algebraical forms, susceptible of important geometrical applications“ n Auch dies muss sich nach den Ausführungen in „The Nature“ auf die drei besonderen Arten von Reciproka beziehen.

[3]) Anmerkung: Auch die projektiven Reciprokanten gehören, wie man leicht einsehen kann, zu reinen (von y_1 freien) Reciprokanten.

Wiewohl nun hierdurch alle die gemischten Reciprokanten, welche ausser der Vertauschung keine tere Transformation gestatten, nur eine sekundäre Bedeutung erhalten, ist es doch gerade infolge der llung derselben zur Untersuchung der speziellen Reciprokanten wünschenswert, auch ihnen eine kurze rachtung zu widmen. Denn durch diese allgemeinen Untersuchungen Sylvesters wird ein wesentlicher erschied in der Auffassung beider Theorien klar zum Ausdruck gebracht, auf den die Einführung einer Anzahl Begriffen in die Reciprokantentheorie zurückzuführen ist, welche der Theorie der Differentialinvarianten ıd sind. Auf diese Begriffe, namentlich auf diejenigen, welche sich auf den Faktor beziehen, mit dem die Reciprokanten reproducieren, kann man sehr wohl eingehen, obwohl in der Theorie der erentialinvarianten die Vertauschung nicht als Transformation in Betracht gezogen wird. Denn der Satz den Faktor, mit welchem sich relative Differentialinvarianten reproducieren (Kap. I, § 6), erstreckt sich ganz beliebige Transformationen und nicht nur auf die allgemeinen endlichen Transformationen endlicher tinuierlicher Gruppen; also kann er auch auf die Vertauschung ausgedehnt werden.

Der Unterschied in der Auffassung der Grössen beider Theorien besteht darin, dass die prokantentheorie aus ihren Funktionen nur dann Gleichungen bildet, wenn sie die geometrische eutung der orthogonalen, reinen und projektiven Reciprokanten erörtert (man vergl. „The Nature").

Die Theorie der Differentialinvarianten dagegen stellt die relativen Differentialinvarianten stets in Form von Gleichungen dar. Die absoluten Differentialinvarianten dagegen gewinnt sie nicht in dieser n; sie kann dieselben aber in dieser Form betrachten, indem sie dieselben gleich einer Konstanten (vergl. p. 12). Dies thut sie z. B. bei ihrer Verwendung in der Theorie der Differentialgleichungen.

Durch diesen Unterschied wird nun zweierlei bewirkt. Die Theorie der Differentialinvarianten mt hierdurch erstens zu einer vollständigen Trennung zwischen absoluten Differentialinvarianten und rianten Differentialgleichungen, welche sich schon in den verschiedenen Methoden zur Gewinnung der beiden n von Differentialinvarianten zeigt[1]); die Reciprokantentheorie fasst dagegen alle Reciprokanten mmen und hat in den absoluten Reciprokanten nur den speziellen Fall zu behandeln, in welchem der or einen numerischen Wert hat[2]), der, wie im American Journal, Bd. VIII, p. 210, Lect. III, gezeigt in Wirklichkeit immer 1 ist.

Zweitens kann bei der Auffassung der relativen Differentialinvarianten als Gleichungen der Faktor, welchem sie sich bei Ausführung einer Transformation reproducieren, nie eine Bedeutung gewinnen, wenn seine Form für eine ganz beliebige Transformation festgestellt ist, wie im Kapitel I, § 6, gezeigt ist.

In der Reciprokantentheorie kommt dagegen der Faktor schon in der Definition des Begriffes rokant vor (man vergl. American Journal, Bd. VIII, p. 206: In general a Reciprocant may be defined a funktion F af such a kind, that $F(\tau, \alpha, \beta \,.\,.\quad)$[3]) contains $F(t, a, b, c \ldots)$ as factor), so dass ein Teil der allgemeinen Untersuchung der Reciprokanten gewidmet ist, bei der die wichtigen chnungen „Charakter" und „Charakteristik"[4]) eingeführt werden, welche die Theorie der Differentialianten gar nicht kennt. Trotz dieser Verschiedenheit geht aus diesen Untersuchungen über den Faktor für die Theorie der Differentialinvarianten eine Thatsache klar hervor.

Es ist in der Theorie der Differentialinvarianten zwar gelungen, den Faktor, welcher bei Anwendung ganz beliebigen Transformation

$$x' = X(x,y), \quad y' = Y(x,y)$$

tt, anzugeben, aber nur bei ihrer Anwendung auf eine Differentialgleichung, da bei Feststellung 'aktors

$$\frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^{\varrho+1}}, \quad \varrho \neq 1$$

leichung immer nach der höchsten Ableitung aufgelöst werden muss.

---

[1]) Anmerkung: Man vergl. Kapitel I, § 5.

[2]) Anmerkung: Man vergl. American Journal, Bd. VIII, Lect. 2, p. 206: An important special case is in which the other Factor is merely numerical; the Funktion F is then said to be an Absolute Reciprocant.

[3]) Anmerkung: Es bedeutet hier:

$$\tau = \frac{dx}{dy}, \quad \alpha = \frac{d^2 x}{dy^2}, \quad \beta = \frac{d^3 x}{dy^3} \cdots\cdots$$

$$t = \frac{dy}{dx}, \quad a = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad b = \frac{d^3 y}{dx^3} \cdots\cdots$$

Bezeichnungen haben immer, wenn es nicht anders bemerkt wird, dieselbe Bedeutung.

[4]) Anmerkung: Man vergl. über die Bedeutung der beiden Begriffe: American Journal, Bd. VIII, und Bd. VIII, p. 208.

Die Theorie der Reciprokanten dagegen zeigt von ihren Funktionen, soweit sie ganze ratio Funktionen der Ableitungen sind, nur in einzelnen Fällen auch für andere Funktionen, dass sie sich der Vertauschung der Veränderlichen stets mit einem Faktor reproducieren, welcher nur Potenz von y_1 Also wird sich bei allen Differentialinvarianten der Transformation

$$x' = y, \quad y' = x,$$

die ganze rationale Funktionen der Ableitungen sind, der Faktor auch ohne Auflösung nach höchsten Ableitung bestimmen lassen und zwar als eine Potenz von y_1.

Das Resultat, dass der Faktor nur Potenz von y_1 ist, muss auch die obige allgem Faktorbestimmung

$$\frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{(X_x + y_1 X_y)^{\varrho+1}}$$

ergeben, da man durch die Auflösung nur einen neuen Reciprokanten bildet, dem diese Eigenschaft zukommen muss. Der Faktor wird thatsächlich:

$$\frac{-1}{y_1{}^{\varrho+1}}.$$

Die Faktorbestimmung wird ferner in der Theorie der Reciprokanten auch für die re Reciprokanten durchgeführt; daraus geht hervor, dass man auch bei der allgemeinen linearen Transforma für ganze rationale Differentialinvarianten den Faktor ohne Auflösung nach der höchsten Ablei bestimmen kann.

Lautet nämlich die Transformation:

$$x' = Ax + By + C, \quad y' = ax + by + c,$$

so geht die invariante Differentialgleichung

$$R(y_2 \dots y_n) = 0$$

über in: $$\pm (Ab - B)^i (By_1 + A)^{-\mu} \, . \, R(y_2 \dots y_n),$$

wenn nicht gleichzeitig A und b verschwinden. In diesem Ausdruck bedeutet die Grösse i den Grad die Grösse μ, welche bei Sylvester Charakteristik genannt wird, den Exponenten y_1 in dem Faktor, wel bei Ausführung der Vertauschung auf die Funktion R auftritt.

Eine entsprechende Formel erhält man, wenn $A = b = 0$ ist.

Auf Grund dieser Faktorbestimmung stellt die Reciprokantentheorie den Satz auf, dass jede lin Funktion von Reciprokanten gleicher Ordnung wieder ein Reciprokant derselben Ordnung ist. Dementsprech ergiebt die Bestimmung des Faktors in der Theorie der Differentialinvarianten den allgemeinen Satz:

Bringt man n invariante Differentialgleichungen einer beliebigen Transformation

$$x' = X(x,y), \quad y' = Y(x,y), \qquad e$$

$$f_k(y_1 \dots y_\varrho) = 0, \quad k = 1, 2 \dots n,$$

auf die Form:

$$y_\varrho - \varphi_k(y_1 \dots y_{\varrho-1}) = 0, \quad k = 1, 2 \dots n,$$

und setzt eine beliebige lineare Funktion der Grössen $y_\varrho - \varphi_k$ gleich 0, so erhält man eine r invariante Differentialgleichung dieser Transformation.

Für die Differentialinvarianten der allgemeinen linearen Gruppe gilt nach den obigen Ausführun der Satz auch dann, wenn sie nicht nach der höchsten Ableitung aufgelöst sind.

Auch die übrigen Sätze der Reciprokantentheorie, welche dazu dienen, auf Grund der Definition Reciprokanten neue Funktionen dieser Art zu bilden, lassen sich aus der Theorie der Differentialinvaria ableiten, sobald man nur invariante Differentialgleichungen betrachtet. Dann ist aber auch keine Beschränk in Bezug auf die Transformationen, welche verwendet werden, notwendig, wie in der Reciprokantenthe

Sind J_1 und J_2 zwei Reciprokanten, welche bei der Vertauschung übergehen in:

$$\frac{1}{y_1{}^{\mu_1}} \, . \, J_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{y_1{}^{\mu_2}} \, . \, J_2,$$

so ist:

$$\frac{J_1{}^{\mu_2}}{J_2{}^{\mu_1}}$$

ein absoluter Reciprokant [1]).

[1]) Anmerkung: Es sei hier darauf hingewiesen, dass die absoluten Reciprokanten im allgemeinen m umfassen, als die absoluten Differentialinvarianten, da bei letzteren der konstante Faktor immer den We haben muss.

Oben ist aber der Satz angeführt worden:

enn $$y_{\varrho_1} - \varphi_1(y_1 \dots y_{\varrho-1}) = 0, \quad y_{\varrho_2} - \varphi_2 = 0, \quad y_{\varrho_3} - \varphi_3 = 0$$
ei invariante Differentialgleichungen einer Transformation
$$x' = X(x,y), \quad y' = Y(x,y)$$
ıd, so ist
$$(y_{\varrho_1} - \varphi_1)^{\lambda} (y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\mu} (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^{\nu}$$
solute Differentialinvariante dieser Transformation, wenn nur
$$\lambda + \mu + \nu = 0 \text{ und } \lambda\varrho_1 + \mu\varrho_2 + \nu\varrho_3 = 0$$
ist.

Wählt man insbesondere die Transformation
$$x' = y, \quad y' = x,$$
geht
$$(y_{\varrho_1} - \varphi_1)^{\lambda} (y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\mu} (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^{\nu}$$
Ausführung derselben über in
$$\frac{1^{\lambda+\mu+\nu}}{y_1^{(\varrho_1+1)\lambda+(\varrho_2+1)\mu+(\varrho_3+1)\nu}} \cdot (y_{\varrho_1} - \varphi_1)^{\lambda} (y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\mu} (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^{\nu}$$ [1].

In diesem Falle nimmt also der Faktor, welcher durch Ausführung der Transformation auftritt, schon ın den Wert 1 an, wenn
$$\lambda + \mu + \nu = \text{Konst.}$$
l
$$\lambda(\varrho_1 + 1) + \mu(\varrho_2 + 1) + \nu(\varrho_3 + 1) = 0$$
ist.

Dies erreicht man aber durch die Werte
$$\lambda = \varrho_2 + 1, \quad \mu = -(\varrho_1 + 1), \quad \nu = 0.$$
Also wird:
$$\frac{(y_{\varrho_1} - \varphi_1)^{\varrho_2+1}}{(y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\varrho_1+1}}$$
absolute Differentialinvariante der Vertauschung. Diese ist aber nach demselben Gesetz gebildet, wie absolute Reciprokant **Sylvesters**. Auch für diesen Fall ist also bewiesen, dass es in der Theorie der erentialinvarianten einen allgemeinen für beliebige Transformationen giltigen Satz giebt, welchem sich Satz der Reciprokantentheorie unterordnet.

Da die Reciprokantentheorie keine Methode kennt zur Bestimmung aller Reciprokanten, da sie nehr nur alle reinen Reciprokanten nach einer Methode bestimmen kann, welche auf die anderen Arten t anwendbar ist, so ist es für dieselbe wesentlich, einen Weg zu finden, auf dem aus bekannten iprokanten neue Reciprokanten derselben Art, aber höherer Ordnung abgeleitet werden können.

Sie geht dabei von dem Satze aus, dass aus dem absoluten Reciprokanten $J(y_1, y_2 \dots)$ der neue t absolute Reciprokant $\frac{dJ}{dx}$ gebildet werden kann. Dieser Satz ist für alle absoluten Differentialinvarianten stverständlich. Aus ihm ergiebt sich für reine Reciprokanten, dass
$$3\, y_2 \frac{dJ_1}{dx} - \mu\, y_3 J_1$$ [2]
ıicht absoluter reiner Reciprokant ist, wenn J_1 ein solcher ist. μ bedeutet hierbei wiederum die schon hnte Charakteristik.

---

[1] Anmerkung: Vergleiche die Ableitung dieses Satzes im Kapitel I, § 6.

[2] Anmerkung: Es sind hier an Stelle der Veränderlichen **Sylvesters**, wie auch immer im folgenden, gewöhnlich in der Theorie der Differentialinvarianten gebrauchten Veränderlichen auch in die Formeln der rokantentheorie eingeführt, um dadurch die Übereinstimmung der Resultate deutlicher erscheinen zu lassen. us den hier gegebenen Ausdrücken diejenigen **Sylvesters** wieder zu erhalten, braucht man nur folgenden nmenhang der Veränderlichen **Sylvesters** mit den hier angewendeten zu berücksichtigen. Es ist für
$$y_1 = \frac{dy}{dx}, \quad y_2 = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y_3 = \frac{d^3 y}{dx^3} \dots$$
leren reciproke Werte
$$x_1 = \frac{dx}{dy}, \quad x_2 = \frac{d^2 x}{dy^2}, \quad x_3 = \frac{d^3 x}{dy^3} \dots$$
des zu setzen:
$$y_1 = t, \quad y_2 = a, \quad y_3 = b \dots, \quad x_1 = \tau, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \beta \dots$$
Ferner ist:
$$a_0 = \frac{1}{1.2} \cdot y_2, \quad a_1 = \frac{1}{1.2.3} \cdot y_3, \quad a_2 = \frac{1}{1.2.3.4} \cdot y_4 \dots a_n = \frac{1}{1.2.3 \dots n+2}\, y_{n+2}.$$

Man kann ganz entsprechend ein Bildungsgesetz für relative Differentialinvarianten belieb
Transformationen aufstellen, welches das obige als speziellen Fall enthält. Die Theorie der Differentialinvaria
besitzt allerdings einen viel allgemeineren Weg für solche Bildungen in dem Satze, dass $\varphi\left(y_1, y_2 \ldots\right.$
invariante Funktion der Ableitungen ist, wenn $\omega(y_1, y_2 \ldots)$ eine solche Funktion ist.

Der Generator, wie Sylvester den obigen Ausdruck nennt, wird also für die Theorie
Differentialinvarianten keine Bedeutung erlangen; doch zeigt die Existenz desselben wiederum, wie in
Reciprokantentheorie der spezielle Fall einer allgemein giltigen Thatsache der Theorie der Differentialinvaria
betrachtet wird. Darum soll er hier entwickelt werden.

Aus den invarianten Differentialgleichungen

$$y_{\varrho_1} - \varphi_1 = 0, \quad y_{\varrho_2} - \varphi_2 = 0, \quad y_{\varrho_3} - \varphi_3 = 0$$

ergiebt sich, wie schon mehrfach erwähnt, die invariante Differentialgleichung:

$$(y_{\varrho_1} - \varphi_1)^\lambda \cdot (y_{\varrho_2} - \varphi_2)^\mu \cdot (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^\nu = c,$$

wobei $\lambda + \mu + \nu = 0$ und $\lambda \varrho_1 + \mu \varrho_2 + \nu \varrho_3 = 0$ sein m

Hieraus folgt, dass:

$$\frac{(y_{\varrho_1} - \varphi_1)^{\frac{\varrho_3 - \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2}}}{(y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}} \cdot (y_{\varrho_3} - \varphi_3)} = a$$

ebenfalls eine invariante Differentialgleichung ist. Dann ist auch:

$$\frac{y_{\varrho_1} - \varphi_1}{(y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_3 - \varrho_2}} \cdot (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_2}}} = b$$

eine solche. Hieraus ergiebt sich die invariante Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx} \frac{y_{\varrho_1} - \varphi_1}{(y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_3 - \varrho_2}} \cdot (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_2}}} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{(\varrho_3 - \varrho_2)(y_{\varrho_2} - \varphi_2)(y_{\varrho_3} - \varphi_3)\frac{d}{dx}(y_{\varrho_1} - \varphi_1) - (\varrho_3 - \varrho_1)(y_{\varrho_1} - \varphi_1)(y_{\varrho_3} - \varphi_3)\frac{d}{dx}(y_{\varrho_2} - \varphi_2)}{(\varrho_3 - \varrho_2)(y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_3 - \varrho_2} + 1} \cdot (y_{\varrho_3} - \varphi_3)^{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_2} + 1}} = 0$$

$$(\varrho_3 - \varrho_2)(y_{\varrho_2} - \varphi_2)(y_{\varrho_3} - \varphi_3)\frac{d}{dx}(y_{\varrho_1} - \varphi_1) - (\varrho_3 - \varrho_1)(y_{\varrho_1} - \varphi_1)(y_{\varrho_3} - \varphi_3)\frac{d}{dx}(y_{\varrho_2} - \varphi_2) =$$

als invariante Differentialgleichung. Setzt man bei Anwendung dieser Formel auf Differentialinvarian
einer bestimmten Transformation für $y_{\varrho_2} - \varphi_2$ und $y_{\varrho_3} - \varphi_3$ bekannte Differentialinvarianten di
Transformation ein, so ist hiermit eine Operation bestimmt, welche dem Generator der Reciprokantenthe
ganz entsprechend gebildet ist und aus einer invarianten Differentialgleichung einer ganz beliebi
Transformation eine neue solche Gleichung höherer Ordnung für diese Transformation erzeugt.

Betrachtet man insbesondere invariante Differentialgleichungen von Transformationen der linea
Gruppe, so kann man aus zwei invarianten Differentialgleichungen

$$y_{\varrho_1} - \varphi_1 = 0 \text{ und } y_{\varrho_2} - \varphi_2 = 0$$

die Funktion:

$$\frac{(y_{\varrho_1} - \varphi_1)^{\varrho_2 + 1}}{(y_{\varrho_2} - \varphi_2)^{\varrho_1 + 1}}$$

bilden, welche sich, wie sich leicht beweisen lässt, mit einem konstanten Faktor reproduciert.

Aus ihr erhält man auf demselben Wege, wie oben, die invariante Differentialgleichung:

$$(\varrho_2 + 1)(y_{\varrho_2} - \varphi_2)\frac{d}{dx}(y_{\varrho_1} - \varphi_1) - (\varrho_1 + 1)(y_{\varrho_1} - \varphi_1)\frac{d}{dx}(y_{\varrho_2} - \varphi_2) = 0.$$

Wählt man nun für $y_{\varrho_2} - \varphi = 0$ die invariante Gleichung $y_2 = 0$, so erhält man:

$$3\, y_2 \frac{d}{dx}(y_{\varrho_1} - \varphi_1) - (\varrho_1 + 1)\, y_3\, (y_{\varrho_1} - \varphi_1) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stimmt mit dem Generator Sylvesters für reine Reciprokanten:

$$3\, y_2 \frac{dJ}{dx} - \mu \cdot y_3 J.$$

überein.

Hiermit ist bewiesen, dass es möglich ist, den Generator für Differentialinvarianten beliebiger ansformationen zu verallgemeinern.

Besonders interessant ist ein Satz von Elliot, welchen er in seiner Arbeit über orthogonale ciprokanten (Proceedings, Bd. XVII) in drei Veränderlichen, welche durch eine Relation gebunden sind, stellt. Derselbe beschränkt sich auf absolute Reciprokanten und kann deshalb auf absolute ferentialinvarianten ohne weiteres übertragen werden, da man bei diesen von der Gleichungsform absehen in. Auch er gilt von Differentialinvarianten ganz beliebiger Transformationen.

Der Satz Elliots lautet:

Sind $u(x, y, z, p, q \ldots)$, $v(x, y, z, p, q \ldots)$, $w(x, y, z, p, q \ldots)$, $\varphi(x, y, z, p, q \ldots)$ [1]

absolute orthogonale Reciprokanten, in welchen z eine Funktion von x und y ist, so ist:

$$\frac{\dfrac{du}{dx} \cdot \dfrac{dv}{dy} - \dfrac{du}{dy} \cdot \dfrac{dv}{dx}}{\dfrac{dw}{dx} \cdot \dfrac{d\varphi}{dy} - \dfrac{dw}{dy} \cdot \dfrac{d\varphi}{dx}}$$

ıfalls ein absoluter orthogonaler Reciprokant.

Kapitel I, § 6, ist der Satz bewiesen, von welchem der obige ersichtlich nur ein spezieller Fall ist:

ind $J_1(x, y, z, p, q \ldots)$, $J_2(x, y, z \ldots)$, $J_3(x, y, z \ldots)$, $J_4(x, y, z \ldots)$

absolute Differentialinvarianten irgend einer Transformation (Transformationsgruppe), deren Gleichungen n:

$$x' = X(x, y, z, a_1, a_2 \ldots), \quad y' = Y(x, y, z, a_1, a_2 \ldots), \quad z' = Z(x, y, z, a_1, a_2 \ldots),$$

st auch:

$$\frac{\dfrac{dJ_1}{dx} \cdot \dfrac{dJ_2}{dy} - \dfrac{dJ_2}{dx} \cdot \dfrac{dJ_1}{dy}}{\dfrac{dJ_3}{dx} \cdot \dfrac{dJ_4}{dy} - \dfrac{dJ_4}{dx} \cdot \dfrac{dJ_3}{dy}}$$

ute Differentialinvariante dieser Transformation (Transformationsgruppe).

Damit sollen die allgemeinen Reciprokanten verlassen und nunmehr die orthogonalen, reinen projektiven Reciprokanten einzeln untersucht werden.

---

[1]) Anmerkung: Zum Vergleiche der beiderseitigen Entwicklungen sei bemerkt, dass Elliot für die ı Ableitungen auch die Bezeichnungen p, q gebraucht, dass er aber die höheren Ableitungen mit $a_1, b_1, c_1 \ldots$ chnet.

IV. Kapitel.

Die orthogonalen, reinen und projektiven Reciprokanten (Principiant als Differentialinvarianten der orthogonalen, der allgemeinen linear und der allgemeinen projektiven Transformationsgruppe.

Die Reciprokantentheorie macht zwar im allgemeinen keinen Unterschied zwischen absoluten nicht absoluten Reciprokanten; trotzdem sollen im folgenden diese beiden Arten von Reciprokanten, Rücksicht auf die Theorie der Differentialinvarianten, getrennt behandelt werden, was für dieselben l durchzuführen ist. Denn man verfährt bei der Bestimmung der Differentialinvarianten einer endli kontinuierlichen Transformationsgruppe nach früherem wesentlich verschieden, wenn man absolute und v man relative Differentialinvarianten bestimmt. Man muss nämlich, wie im I. Kapitel, § 5, ausgeführt im ersten Falle verlangen, dass die Inkremente, welche einer Funktion durch die Transformationen der Gr erteilt werden, identisch verschwinden, im zweiten Falle, dass sie vermöge der Differentialgleich verschwinden, welche aus der gesuchten Differentialinvariante gebildet werden kann [1]).

Es sollen also zunächst betrachtet werden:

I. Absolute Reciprokanten und Differentialinvarianten.

a. Orthogonale Reciprokanten, bezüglich Differentialinvarianten der orthogona Gruppe.

In der Theorie der Differentialinvarianten ergeben sich als Bedingung dafür, dass eine Funk $f(x, y, y_1, y_2 \dots)$ Differentialinvariante der Gruppe aller orthogonalen Transformationen

$$\xi = y \,.\, \sin \varepsilon - x \,.\, \cos \varepsilon + a$$
$$\eta = y \,.\, \cos \varepsilon + x \,.\, \sin \varepsilon + b$$

ist, folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$(1 + y_1{}^2)\frac{\partial f}{\partial y_1} + 3\, y_1\, y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + (4\, y_1\, y_3 + 3\, y_2{}^2)\frac{\partial f}{\partial y_3} + (5\, y_1\, y_4 + 10\, y_2\, y_3)\frac{\partial f}{\partial y_4} + \dots = ($$

Dieselben drücken aus, dass die Inkremente, welche die Funktion durch die Transformationen Gruppe und der erweiterten Gruppe erhält, verschwinden müssen. Es mag dabei noch einmal beson hervorgehoben werden, dass sich diese Inkremente ohne weiteres aus den infinitesimalen Transformatio der Gruppe und den infinitesimalen Transformationen der erweiterten Gruppe ergeben; da in der The der Differentialinvarianten jede Gruppe durch ihre infinitesimalen Transformationen vertreten wird, so s dieselben also immer bestimmbar.

Die Reciprokantentheorie dagegen verlangt zunächst von den orthogonalen Reciprokanten, wie allen Reciprokanten überhaupt, gemäss der Definition derselben (s. Kapitel II), dass dieselben von Veränderlichen x und y selbst frei sein sollen, eine Forderung, deren analytische Formulierung o weiteres auf die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{fü}$$

Dann aber stellt sie einen Ausdruck auf, welcher durch die orthogonalen Reciprokanten identi verschwinden muss. Sie nennt ihn Annihilator und bestimmt ihn folgendermassen:

[1]) Anmerkung: Dies Verlangen führt, wie oben gezeigt worden ist, bei den relativen Differentialinvarian zur Bestimmung durch Determinanten.

Ist $\xi = x \cdot \cos\varepsilon - y \cdot \sin\varepsilon, \quad \eta = x \cdot \sin\varepsilon + y \cdot \cos\varepsilon$

end eine orthogonale Transformation (es werden überhaupt nur einzelne Transformationen betrachtet und auf, dass in den obigen allgemeinen Transformationen eine ganze Schar von solchen mit der Gruppeneigenschaft halten ist, wird keine Rücksicht genommen), so wird:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta_1 = \frac{\sin\varepsilon + y_1 \cdot \cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - y_1 \cdot \sin\varepsilon},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \eta_2 = \frac{1}{\sin^3\varepsilon} \cdot \frac{y_2}{\left(y_1 - \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\right)^3},$$

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} = \eta_2 = \frac{-1}{\sin^4\varepsilon} \cdot \frac{-\left(y_1 - \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\right) y_3 + 3\,y_2^{\,2}}{\left(y_1 - \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\right)^5}$$

u. s. w.

Wird nun ε unendlich klein, so wird aus diesen Ausdrücken:

$$\xi = x - \varepsilon y,$$
$$\eta = y + \varepsilon x,$$

$$\eta_1 = (1 + y_1^{\,2})\,\varepsilon,$$
$$\eta_2 = 3\,y_1\,y_2 \cdot \varepsilon,$$
$$\eta_3 = (4\,y_1\,y_3 + 3\,y_2^{\,2})\,\varepsilon$$

u. s. w.

Hieraus ergiebt sich, dass die Funktion $f(y_1\,y_2 \ldots.)$ bei Ausführung der Transformation ndes Inkrement erhält:

$$\left\{(1 + y_1^{\,2})\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_1\left(3\,y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + 4\,y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + \ldots\right) + Vf\right\}\varepsilon.$$

i

$$Vf = 3\,y_2^{\,2}\frac{\partial f}{\partial y_3} + 10\,y_2\,y_3\frac{\partial f}{\partial y_4} + \ldots.$$

ist.

Ist nun f absoluter orthogonaler Reciprokant, so muss dieses Inkrement identisch verschwinden. s Verlangen liefert den obengenannten Annihilator. Derselbe stimmt mit der dritten Differentialgleichung Theorie der Differentialinvarianten überein. Das musste auch erwartet werden, da er gefunden worden ndem an Stelle der allgemeinen orthogonalen Transformation die infinitesimale orthogonale Transformation ndet wurde.

Dass aber das, was für die infinitesimale orthogonale Transformation gilt, für alle orthogonalen formationen

$$\xi = x \cdot \cos\varepsilon - y \cdot \sin\varepsilon, \quad \eta = x \cdot \sin\varepsilon + y \cdot \cos\varepsilon$$

ist, wird bewiesen, indem gezeigt wird, dass das Kriterium auch hinreichend ist. Wenn also die okantentheorie thatsächlich nur eine einzelne orthogonale Transformation betrachtet und zwar die esimale, so ersetzt sie doch in Wirklichkeit alle orthogonalen Transformationen durch diese eine; sie t also die Eigenschaft der Schar der orthogonalen Transformationen, dass sie eine Gruppe bilden lass man diese Gruppe ersetzen kann durch die infinitesimalen Transformationen, welche in ihr ten sind. Mit den infinitesimalen Transformationen operiert sie nun genau so, wie die Theorie der ntialinvarianten und gelangt dementsprechend auch zu demselben Resultat.

Hierbei wird durch das Verlangen, dass das Inkrement verschwinden soll, welches durch die simale orthogonale Transformation der Funktion $f(y_1, y_2, \ldots)$ erteilt wird, ausgedrückt, dass sich solutèn orthogonalen Reciprokanten auch bei der orthogonalen Transformation mit dem Faktor 1 ucieren. Es mag hier besonders darauf hingewiesen werden, dass die Reciprokantentheorie im einen unter absoluten Reciprokanten solche versteht, die sich bei der Vertauschung der Veränderlichen mit dem Faktor 1 reproducieren, während in der Definition der Zahlenwert des Faktors, welcher anderen Transformationen auftritt, die sie zulassen, nicht berücksichtigt wird.

b. Absolute reine Reciprokanten, bezüglich Differentialinvarianten der allgemei linearen Gruppe.

Wie schon im II. Kapitel auseinandergesetzt worden ist, versteht Sylvester unter absol reinen Reciprokanten alle die Funktionen der Ableitungen, welche bei der Vertauschung der Veränderli sich mit dem Faktor 1 reproducieren und von den Veränderlichen x und y selbst, sowie von der er Ableitung y_1 frei sind. Er beweist von allen diesen Funktionen, dass sie sich auch bei der allgeme linearen Transformation mit irgend einem Faktor reproducieren. Dabei entscheidet er aber nicht, ob bei dieser Transformation der Faktor den Wert 1 hat. Auf Grund dieser Definition stellt er Bedingungen auf, dass eine Funktion absoluter reiner Reciprokant ist. Die Bedingungen stimmen nun thatsächlich mit Differentialgleichungen überein, welchen die absoluten Differentialinvarianten der allgemeinen linearen Gr genügen; daraus geht hervor, dass sich die absoluten reinen Reciprokanten auch bei der allgeme linearen Transformation mit dem Faktor 1 reproducieren. Sie sind also identisch mit den absolu Differentialinvarianten der allgemeinen linearen Gruppe. Somit hat Sylvester in seinen Untersuchungen absolute reine Reciprokanten die Aufgabe gelöst, die absoluten Differentialinvarianten der allgeme linearen Transformationsgruppe zu bestimmen. Nur ist die Übereinstimmung von Sylvesters Bedingun mit den Differentialgleichungen dieser Gruppe noch nicht bewiesen.

Aus den infinitesimalen Transformationen derselben ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$x\frac{\partial f}{\partial y} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0.$$

$$y\frac{\partial f}{\partial y} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + \dots = 0.$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - 2y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 3y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} - \dots = 0.$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - y_1{}^2\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3y_1y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - (4y_1y_3 + 3y_2{}^2)\frac{\partial f}{\partial y_3} - (5y_1y_4 + 10y_2y_3)\frac{\partial f}{\partial y_4} - \dots = 0.$$

Die Bedingungen, welche Sylvester aus seiner Definition und der Zulässigkeit der allgemei linearen Transformation ableitet, sind folgende:

1. Gemäss der Definition muss die Funktion frei von x, y und y_1 sein.
2. Die Funktion muss den Ausdruck:

$$Vf = 3y_2\frac{\partial f}{\partial y_3} + 10y_2y_3\frac{\partial f}{\partial y_4} + \dots$$

zum Annihilator haben, d. h. identisch gleich 0 machen.

3. Die Funktion muss homogen und isobar sein und zwar muss Grad und Gewicht gleich 0 s

Bedingung 1) ist selbstverständlich.

Bedingung 2) gewinnt Sylvester in einer Weise, welche wiederum zur Theorie der Differentialinvarian vielfache Beziehungen zeigt. Er beweist nämlich, wie schon erwähnt, dass jeder reine Reciprokant allgemeine lineare Transformation gestattet und dass jede Funktion, welche die allgemeine lineare Transforma gestattet, reiner (aber nicht, dass sie auch absoluter) Reciprokant ist. Diesen Beweis führt er du indem er einzelne lineare Transformationen nach einander ausführt. Also auch in diesem Beweis w wiederum die allgemeine Transformation implicite als eine Schar von Transformationen betrachtet, welche Gruppeneigenschaft besitzt und diese Eigenschaft als Grundlage der Entwicklung verwendet. Da aber a hier diese Eigenschaft nicht definiert wird, muss auch noch die Umkehrung des Satzes bewiesen werd Dann aber drückt er, um sein Kriterium Vf zu finden, das Verlangen analytisch aus, dass ein rei Reciprokant die allgemeine lineare Transformation gestattet und verfährt dabei folgendermassen[1]):

[1]) Anmerkung: Diese Entwicklung soll hier bei ihrer hervorragenden Wichtigkeit für die gesa Untersuchung mit den bekannten Umformungen in den Bezeichnungen durchgeführt werden, um so mehr, als Vergleich ihrer Resultate mit der Theorie der Differentialinvarianten in der Form Sylvesters nicht übersichtlich

Betrachtet man die Transformation

$$x' = x + \varepsilon y,$$

der ε eine infinitesimale Grösse bezeichnet und nennt das Inkrement, das eine Funktion f bei dieser ansformation erhält, Δf, so muss

$$\Delta R(x_2, x_3 \ldots .) = 0$$

1, da die Grössen $x_2, x_3 \ldots .$ bei derselben ungeändert bleiben. Bezeichnet man nun die Ausführung Transformation durch [ ], so ist:

$$[y_1] = \frac{dy}{d[x]} = \frac{dy}{d(x+\varepsilon y)} = y_1 - \varepsilon y_1{}^2.$$

$$[y_2] = \frac{d[y_1]}{d[x]} = y_2 - 3 y_1 y_2 \cdot \varepsilon.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[y_{n+1}] = (1 - \varepsilon y_1) \frac{d}{dx} [y_n].$$

Also ergiebt sich:

$$[y_1] = y_1 - \varepsilon y_1{}^2$$

$$[y_2] = y_2 - \varepsilon \left(\frac{3}{2} y_1 y_2 + \frac{3}{2} y_2 y_1 \right)$$

$$[y_3] = y_3 - \varepsilon (2 y_1 y_3 + 3 y_2{}^2 + 2 y_3 y_1)$$

$$[y_4] = y_4 - \varepsilon \left(\frac{5}{2} y_1 y_4 + 5 y_2 y_3 + 5 y_3 y_2 + \frac{5}{2} y_4 y_1 \right)$$

analog

$$= y_n - \varepsilon \left(\frac{n+1}{2} (y_1 y_n + \frac{n}{2} y_2 y_{n-1} + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n}{2} y_3 y_{n-2} + \ldots + \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{3} y_{n-2} \cdot y_3 + \frac{n}{2} y_{n-1} y_2 + y_n y_1) \right).$$

Diese allgemeine Form kann durch den Schluss von n auf $n+1$ bewiesen werden. Also ist:

$$\Delta y_n = -\frac{n+1}{2} \cdot \varepsilon (y_1 y_n + \frac{n}{2} y_2 y_{n-1} + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n}{2} y_3 \cdot y_{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{3} y_{n-2} y_3 + \frac{n}{2} y_{n-1} y_2 + y_n \cdot y_1) = -\frac{n+1}{2} \cdot \varepsilon \cdot S_n.$$

Es ist nun:

$$\Delta R(x_2, x_3 \ldots .) = \Delta (y_1{}^{-\mu} R(y_2 y_3 \ldots .))^{1)},$$

$$\Delta (y_1{}^{-\mu} R(y_2 y_3 \ldots .)) = 0,$$

$$-\mu y_1{}^{-\mu-1} \Delta y_1 \cdot R + y_1{}^{-\mu} \cdot \Delta R = 0,$$

$$-\mu y_1{}^{-1} \Delta y_1 + R^{-1} \Delta R = 0,$$

$$-\mu \cdot R \cdot y_1{}^{-1} \Delta y_1 + \frac{\partial R}{\partial y_2} \Delta y_2 + \frac{\partial R}{\partial y_3} \Delta y_3 + \ldots . = 0.$$

Setzt man ein, so bekommt man:

$$+ \mu \cdot R \cdot y_1 - \frac{\partial R}{\partial y_2} \cdot 3 y_1 y_2 - \frac{\partial R}{\partial y_3} (4 y_1 y_3 + 3 y_2{}^2) - \ldots = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in folgende zwei:

$$3 y_2 \frac{\partial R}{\partial y_2} + 4 y_3 \frac{\partial R}{\partial y_3} + 5 y_4 \frac{\partial R}{\partial y_4} + \ldots . = \mu \cdot R$$

$$3 y_2{}^2 \frac{\partial R}{\partial y_3} + 10 y_2 y_3 \frac{\partial R}{\partial y_4} + \ldots . = 0.$$

[1]) Anmerkung: Es ist bereits erwähnt, dass Sylvester den Faktor, mit welchem sich die Reciprokanten Vertauschung der Veränderlichen reproducieren, gleich $y_1{}^{-\mu}$ berechnet hat.

Ist nun R ein absoluter Reciprokant, so ist $\mu = 0$, da sich die absoluten Reciprokanten der Vertauschung der Veränderlichen mit dem Faktor 1 reproducieren. Dann sagt aber die e Gleichung nur aus, dass die homogene Funktion R (homogen ist R nach Bedingung 3)) auch isobar muss. Die zweite Gleichung ergiebt aber $VR = 0$. Wie Sylvester ferner noch zeigt, ist d Bedingung, unter der Voraussetzung, dass Bedingung 1) und 3) erfüllt sind, auch hinreichend.

Was die 3.) Bedingung anlangt, so hat Sylvester den Satz bewiesen, dass jeder r Reciprokant entweder selbst eine homogene Funktion oder wenigstens in eine Summe von homoge Funktionen auflösbar ist. Obige Entwicklung zeigt, dass solche reine Reciprokanten auch immer isob sind. Da nun die Reciprokanten, welche hier betrachtet werden, absolut sein sollen, muss $\mu = 0$ sein. ist $\mu = w + 3i$ (w bedeutet das Gewicht, i den Grad); also muss $w + 3i = 0$ sein. Da weder noch i bei Reciprokanten, welche rationale Funktionen sind und die erste Ableitung nicht enthalten, neg sein kann, muss $w = i = 0$ sein.

Vergleicht man diese Bedingungen Sylvesters mit den Differentialgleichungen der Theorie Differentialinvarianten, so ergiebt sich:

Die erste und zweite Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sagen aus, dass die absoluten Differentialinvarianten der linearen Gruppe frei von x und y sein müs

Die dritte reduciert sich durch die erste und zweite auf

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

und sagt aus, dass dieselben von y_1 frei sein müssen.

Die vierte reduciert sich auf:

$$y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \dots = 0$$

und sagt aus, dass die Funktion f in $y_2\, y_3 \dots$ homogen vom 0ten Grade sein muss.

Die fünfte ergiebt:

$$y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 2\,y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 3\,y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} + \dots = 0.$$

Sie hat sich schon bei Sylvester ergeben und sagt aus, dass die Funktion f isobar sein muss mit d Gewicht 0, und zwar unter Annahme der Gewichte $0, 1, 2, 3 \dots$ für $y_2, y_3, y_4, y_5 \dots$ Diese f Gleichungen sind also nur eine analytische Formulierung der Bedingungen 1) und 3) der Reciprokantentheo

Die sechste Gleichung aber kann auf die Form:

$$3\,y_2{}^2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 10\,y_2\,y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \dots = 0$$

gebracht werden; sie stimmt also mit dem Annihilator Vf überein.

---

[1]) Anmerkung: Unter isobaren Funktionen (soweit sie rational sind) versteht man, ebenso wie m bekanntlich unter homogenen Funktionen solche versteht, deren sämtliche Glieder gleichen Grad haben, Funktion deren sämtliche Glieder gleiches Gewicht haben.

Unter Gewicht eines Gliedes versteht man die Summe der Produkte, welche entstehen, wenn man Exponenten des ersten Faktors eines Gliedes mit 0 oder 1 oder 2 u. s. w., den des zweiten mit 1 oder 2 oder 3 u. s. den des dritten mit 2 oder 3 oder 4 u. s. w. u. s. w. multipliciert bei Feststellung einer bestimmten Reihenfo der Faktoren eines Gliedes, die im allgemeinen bei den Reciprokanten nach der Reihenfolge der Ableitung geordnet werden, wobei mit der ersten Ableitung begonnen wird.

Dass eine Funktion $f(y_2 \dots y_n)$ homogen vom Grade 0 ist, kann analytisch ausgedrückt werden du die Gleichung:

$$y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \dots = 0.$$

Da nun jeder absolute reine Reciprokant homogen vom Grade 0 sein muss, so muss er diese Gleichung erfüll Dann ergiebt aber obige Gleichung, welche ausdrückt, dass der Reciprokant isobar sein muss:

$$y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 2\,y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 3\,y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} + \dots = 0,$$

was für später bemerkt sein mag.

Sylvesters Ableitung dieses Annihilators, welche oben angeführt ist, ist aber thatsächlich nur e Berechnung des Inkrementes, das eine Funktion bei Ausführung der infinitesimalen Transformation $p + yq$ erhält. Also auch hier benutzt Sylvester implicite die Gruppeneigenschaft, indem er die :har der Transformationen

$$x' = x + ay$$

rch die infinitesimale Transformation ersetzt, welche in ihr enthalten ist und diese erweitert. Also ch hier ist die für alle kontinuierlichen Gruppen giltige Methode der Theorie der Differentialinvarianten einem speziellen Falle von Sylvester entwickelt worden.

c. Die absoluten projektiven Reciprokanten und die Differentialinvarianten der allgemeinen projektiven Gruppe.

Bei den projektiven Reciprokanten findet man die Punkte der Übereinstimmung, welche oben für die ıen Reciprokanten auseinandergesetzt worden sind, wieder[1]), indem auch hier fortgesetzt von Sylvester r Gruppenbegriff verwendet wird. Er stellt nämlich auch als Kriterium der projektiven Reciprokanten ı Annihilator Vf auf, weil in der allgemeinen projektiven Transformation die allgemeine lineare halten ist. Hieraus ergiebt sich überhaupt als erste Bedingung dafür, dass eine Funktion Principiant ojektiver Reciprokant) ist, dass sie reiner Reciprokant sein muss.

Mit Hilfe der infinitesimalen Transformationen

$$x' = \frac{x}{1 + hx}, \quad y' = \frac{y}{1 + hx},$$

infinitesimale Grösse) findet dann Sylvester den Annihilator

$$\Omega f = 3 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 8 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \dots .$$

Dann beweist er, dass für homogene und isobare Funktionen vom Grad und Gewicht 0, welche von und y_1 frei sind, die Annihilatoren

$$Vf \text{ und } \Omega f$$

ı hinreichend sind als Kriterien dafür, dass diese Funktionen projektive Reciprokanten sind. Eine ktion obiger Beschaffenheit, welche die beiden Bedingungen

$$Vf = 0 \text{ und } \Omega f = 0$$

llt, muss nach dem, was über reine Reciprokanten bewiesen worden ist, die Transformationen

$$x''' = lx'' + my'' + n, \quad y''' = l'x'' + m'y'' + n'$$
$$x' = \lambda x + \mu y + \nu, \quad y' = \lambda' x + \mu' y + \nu'$$

atten. Genau wie bei den reinen Reciprokanten lässt sich ferner beweisen, dass sie auch die sformationen

$$x'' = \frac{x'}{1 + hx'}, \quad y'' = \frac{y'}{1 + hx'}$$

ttet. Da nun diese Transformationen nach einander ausgeführt aequivalent sind mit der Transformation

$$x''' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad y''' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''},$$

uss die Funktion auch diese Transformation gestatten. Man findet also hier wieder eine Verwendung Eigenschaft einer Gruppe, dass mehrere Transformationen derselben nach einander ausgeführt wieder Transformation der Gruppe geben.

---

[1]) Anmerkung: In Halphens Arbeit: „Thèses Présentées à la Faculté des Sciences: I. Thèse sur les iants différentiels“ wird die Methode der Theorie der Differentialinvarianten mit ausdrücklicher Verwendung ruppenbegriffs angewendet; auch hat er das Vorhandensein von Reciprokanten, welche die allgemeine projektive sformation

$$x' = \frac{lx + my + n}{l''x + m''y + n''}, \quad y' = \frac{l'x + m'y + n'}{l''x + m''y + n''}$$

ten, in einem Briefe an Sylvester, der im American Journal, Bd. XVIII, p. 137 veröffentlicht ist, bewiesen.

Die Bestimmung der Annihilatoren Vf und Ωf selbst erfolgt auch hier dadurch, dass bestimm infinitesimale Transformationen der Gruppe, nämlich

$$x' = x + \varepsilon y \text{ und } x' = \frac{x}{1 + hx}, \quad y' = \frac{y}{1 + hx}$$

erweitert werden.

Diese Bedingungen müssen sich auch aus den Differentialgleichungen der Theorie d Differentialinvarianten ergeben. Sechs von den acht infinitesimalen Transformationen der projektiven Gruppe si identisch mit denen der linearen Gruppe. Die Differentialgleichungen, welche aus ihnen hervorgehen, drück also nur die Bedingung Sylvesters aus, dass die Funktion reiner Reciprokant sein muss. Die Forderung wird in der Theorie der Differentialinvarianten durch den Satz ausgesprochen, dass ei Differentialinvariante einer Gruppe stets auch Differentialinvariante aller Untergruppen derselben sein mu

Von der siebenten und achten Transformation der projektiven Gruppe braucht man nur d siebente $x^2p + xyq$ zu berücksichtigen, da die achte $xyp + y^2q$ aus dieser durch Bildung d Klammeroperation mit yp hervorgeht.

Die siebente Transformation liefert die Gleichung:

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} + (y - xy_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3xy_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - (3y_2 + 5xy_3)\frac{\partial f}{\partial y_3} - (8y_3 + 7xy_4)\frac{\partial f}{\partial y_4} - \ldots =$$

welche mit Hilfe der anderen Gleichungen auf die Form:

$$3y_2\frac{\partial f}{\partial y_3} + 8y_3\frac{\partial f}{\partial y_4} + 15y_4\frac{\partial f}{\partial y_5} + \ldots = 0$$

gebracht werden kann.

Diese Gleichung ist aber aequivalent mit dem Annihilator Ωf, womit auch hier die vollständi Übereinstimmung bewiesen ist.

II. Die nicht absoluten Reciprokanten und die relativen Differentialinvarianten.

Die folgenden Untersuchungen können kürzer gefasst werden, da die obigen Entwicklungen üb die Annihilatoren auf das Absolutsein der Reciprokanten zunächst nirgends Rücksicht genommen habe dieses vielmehr erst durch Einführung der Bestimmungen über Grad und Gewicht in diese Annihilatore zum Ausdruck kommt; diese Untersuchungen gelten also auch noch hier insbesondere in Bezug au alles das, was über die Methode gesagt worden ist, welche zur Bildung dieser Ausdrücke angewend worden ist.

Es sollen zunächst betrachtet werden:

a. Die nicht absoluten orthogonalen Reciprokanten.

Jede Funktion, welche ein orthogonaler Reciprokant sein soll, muss von x und y frei sein un durch den Operator

$$(1 + y_1^2)\frac{\partial f}{\partial y_1} + 3y_1y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + (4y_1y_3 + y_2^2)\frac{\partial f}{\partial y_3} + \ldots$$

mit dem Faktor $\mu \, . \, y_1$ reproduciert werden. Hier bedeutet μ die bekannte Konstante, welche bei den absolute Reciprokanten den Wert 0 annimmt.

Die erste Bedingung ist in der Theorie der Differentialinvarianten durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ausgedrück

Als weitere Bedingung verlangt die Theorie der Differentialinvarianten, dass das Inkremen welches durch die infinitesimale Transformation $yp - xq$ einer Funktion $f(y_1, y_2 \ldots y_n)$ erteilt wir vermöge der Gleichung $f = 0$ verschwindet, d. h. dass die Gleichung besteht:

$$(1 + y_1^2)\frac{\partial f}{\partial y_1} + 3y_1y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + (4y_1y_3 + 3y_2^2)\frac{\partial f}{\partial y_3} + \ldots = \Phi(f).$$

Sie zeigt dann, dass $\Phi(f)$ die Form $\psi(y_1 \ldots y_n) \, . \, f$ hat, dass sich also die Funktion bei Ausführung de Transformation mit einem Faktor reproduciert (vergl. Kapitel I, § 6). Der Operator der Reciprokantentheori

nd die erweiterte Transformation stimmen überein; sie sind sogar auf demselben Wege gewonnen; zur ollständigen Übereinstimmung ist nur noch nötig, dass auch die Faktoren $\mu \cdot y_1$ und $\psi(y_1, y_2 \ldots .)$ gleichen Vert haben. Nun ist Kapitel I, § 6, der Faktor berechnet worden, welcher zur linken Seite einer Gleichung

$$y_\varrho - \varphi(y_1 \ldots . y_{\varrho-1}) = 0$$

ei Ausführung der infinitesimalen Transformation

$$\delta x = \xi \delta t, \quad \delta y = \eta \delta t$$

inzutritt. Wendet man diese Formel für die Transformation

$$y p - x q$$

ı und bringt in der Gleichung

$$(1 + y_1{}^2) \frac{\partial f}{\partial y_1} + 3 y_1 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + (4 y_1 y_3 + 3 y_2{}^2) \frac{\partial f}{\partial y_3} + \ldots . = \psi . f$$

auf die Form $y_\varrho - \varphi$, so bekommt man:

$$(1 + y_1{}^2) \frac{\partial}{\partial y_1} (y_\varrho - \varphi) + 3 y_1 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} (y_\varrho - \varphi) + \ldots . = -(\varrho + 1) y_1 (y_\varrho - \varphi).$$

Da $-(\varrho + 1)$ eine Konstante ist, ist hiermit die völlige Übereinstimmung bewiesen.

b. Nicht absolute reine Reciprokanten.

Jeder reine Reciprokant muss

1. frei von x, y, y_1 sein;
2. homogen und isobar von irgend einem Grade und Gewichte sein (Grad und Gewicht 0 liefern besondere absolute Reciprokanten);
3. den Operator Vf zum Annihilator haben.

Die Theorie der Differentialinvarianten liefert folgende Bedingungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \psi_1 . f.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \psi_2 . f.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = \psi_3 . f.$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \ldots . = \psi_4 . f.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - 2 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - 3 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} - \ldots . = \psi_5 . f.$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - y_1{}^2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - 3 y_1 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - (4 y_1 y_3 + 3 y_2{}^2) \frac{\partial f}{\partial y_3} - \ldots . = \psi_6 . f.$$

Ersetzt man hier f durch die Funktion $y_\varrho - \varphi$ und berechnet die Funktionen ψ nach der oben ınnten Formel, so bekommt man:

$$\frac{\partial}{\partial x} (y_\varrho - \varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_1} (y_\varrho - \varphi) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} (y_\varrho - \varphi) = 0.$$

Hieraus folgt: $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0,$$

φ ist von x, y und y_1 frei. Das ist aber nur möglich, wenn f von diesen Grössen frei ist. Die n drei Gleichungen ergeben also auch hier die Bedingung 1) der Reciprokantentheorie.

Führt man in Gleichung 4) $y_\varrho - \varphi$ an Stelle von f ein und berechnet ψ_4, so erhält man un Berücksichtigung von Gleichung 1) bis 3) folgendes:

$$y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}(y_\varrho - \varphi) + y_3 \frac{\partial}{\partial y_3}(y_\varrho - \varphi) + \ldots y_\varrho \frac{\partial}{\partial y_\varrho}(y_\varrho - \varphi) = y_\varrho - \varphi.$$

Hieraus folgt:
$$y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_4} + \ldots = \varphi.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass φ homogene Funktion vom ersten Grade sein muss. Das aber nur möglich, wenn f selbst homogene Funktion von irgend einem Grade ist, was analytisch ausgedrüc werden kann durch die Gleichung:

$$y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \ldots = \text{konst.}\,.\, f.$$

Also ist ψ_4 eine Konstante und die Gleichung 4) der Theorie der Differentialinvarianten nur d analytische Ausdruck dafür, das f homogene Funktion ist.

Gleichung 5) ergiebt mit Hilfe der umgeformten Gleichung 4):

$$y_3 \frac{\partial}{\partial y_3}(y_\varrho - \varphi) + 2\, y_4 \frac{\partial}{\partial y_4}(y_\varrho - \varphi) + 3\, y_5 \frac{\partial}{\partial y_5}(y_\varrho - \varphi) + \ldots (\varrho - 2)\frac{\partial}{\partial y_\varrho}(y_\varrho - \varphi) = (\varrho - 2)(y_\varrho -$$

oder:
$$y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} + 2\, y_4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_4} + 3\, y_5 \frac{\partial \varphi}{\partial y_5} + \ldots = (\varrho - 2)\,.\,\varphi.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass φ eine isobare Funktion mit dem Gewicht $\varrho - 2$ sein mus wenn man für $y_2, y_3 \ldots$ die Gewichte $0, 1, 2 \ldots$ annimmt. Da dann y_ϱ das Gewicht $\varrho - 2$ hat, ist dies nur möglich, wenn f selbst eine isobare Funktion ist. Dies wird analytisch ausgedrückt dur die Gleichung:

$$y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 2\, y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 3\, y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} + \ldots + (\varrho - 2)\, y_\varrho \frac{\partial f}{\partial y_\varrho} = \text{konst.}\,.\, f;$$

hieraus folgt, dass ψ_5 konstant sein muss. Also ist Gleichung 5) nur der analytische Ausdruck dafü dass f isobare Funktion ist. Gleichung 4) und 5) enthalten also die Bedingung 2) der Reciprokantentheori

Aus Gleichung 6) erhält man:

$$3\, y_1 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}(y_\varrho - \varphi) + (4 y_1 y_3 + 3 y_2{}^2)\frac{\partial}{\partial y_3}(y_\varrho - \varphi) + (5 y_1 y_4 + 10 y_2 y_3)\frac{\partial}{\partial y_4}(y_\varrho - \varphi) + \ldots = (\varrho + 1)\, y_1 (y_\varrho - \varphi$$

Da nun bewiesen worden ist, dass $y_\varrho - \varphi$ frei von y_1 sein muss, so zerfällt diese Gleichung i folgende zwei:

$$3\, y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}(y_\varrho - \varphi) + 4\, y_3 \frac{\partial}{\partial y_3}(y_\varrho - \varphi) + \ldots = (\varrho + 1)(y_\varrho - \varphi)$$

und:
$$3\, y_2{}^2 \frac{\partial}{\partial y_3}(y_\varrho - \varphi) + 10\, y_2\, y_3 \frac{\partial}{\partial y_4}(y_\varrho - \varphi) + \ldots = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ergiebt sich durch Addition von Gleichung 4) und 5). Di zweite kann aber von $y_\varrho - \varphi$ nur erfüllt werden, wenn ihr auch die Funktion f genügt. Also ergiebt sich

$$3\, y_2{}^2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 10\, y_2\, y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit dem Annihilator Vf überein. Damit ist auch für die reine Reciprokanten die Übereinstimmung nachgewiesen.

Sylvester definiert die reinen Reciprokanten als Funktionen der Ableitungen, welche von x, y und y_1 frei sind und bei der Vertauschung der Veränderlichen sich mit einem Faktor reproducieren. Auf Grund dieser Definition gelingt es ihm, zu beweisen, dass diese Funktionen auch bei der allgemeinen linearen Transformation sich mit einem Faktor reproducieren. Diese Thatsache kann auch die Theorie der Differentialinvarianten aus obiger Definition ohne weiteres ableiten. Denn da diese Funktionen von y_1 frei sein sollen, müssen sie die Transformation $x\,q$ gestatten. Da sie nach der Definition die Vertauschung gestatten, müssen sie auch die Transformation $y\,p$ zulassen. Hieraus folgt, dass sie auch die Transformation $(x\,q, y\,p) = x\,p - y\,q$ und damit $x\,p$ und $y\,q$ zulassen müssen. Hiermit ist bewiesen, dass sie die allgemeine lineare Transformation zulassen. Auch die Eigenschaft der reinen Reciprokanten,

ss sie homogen und isobar sein müssen, welche Sylvester ebenfalls aus obiger Definition entwickelt, giebt sich in der Theorie der Differentialinvarianten. Denn die vorangegangene Untersuchung zeigt, dass Zulässigkeit der Transformationen xp und yq nur das Vorhandensein dieser Eigenschaft ausdrückt.

Da ferner in der Theorie der Differentialinvarianten keine Beschränkung in Bezug auf die ıktionen, die untersucht werden, notwendig ist, so folgt noch, dass auch Sylvesters Untersuchungen ıt, wie es geschieht, auf ganze rationale Funktionen beschränkt zu werden brauchen.

c. Projektive Reciprokanten oder Principianten.

Die allgemeine lineare Gruppe ist einerseits eine Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe, sind die Differentialinvarianten der letzteren auch solche der ersteren; andererseits ist nach Sylvester r projektive Reciprokant auch reiner Reciprokant. Es müssen also die vorhergehenden Untersuchungen für projektive Reciprokanten gelten.

Die projektiven Reciprokanten müssen ferner den Operator

$$\Omega f = 3\,y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 8\,y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 15\,y_4 \frac{\partial f}{\partial y_5} + \ldots$$

Annihilator haben.

Die Theorie der Differentialinvarianten verlangt noch, dass sich die relativen Differentialinvarianten ler Transformation $x^2 p + xyq$ (betreffend die Transformation $xyp + y^2 q$ s. p. 34) mit einem Faktor ducieren, d. h. es muss nach früherem die Gleichung bestehen:

$$\ldots_2 \frac{\partial}{\partial y_2}(y_\varrho - \varphi) + (3y_2 + 5xy_3)\frac{\partial}{\partial y_3}(y_\varrho - \varphi) + (8y_3 + 7xy_4)\frac{\partial}{\partial y_4}(y_\varrho - \varphi) + \ldots = x(2\varrho - 1)(y_\varrho - \varphi).$$

Da $y_\varrho - \varphi$ von x frei ist, zerfällt sie in:

$$3\,y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}(y_\varrho - \varphi) + 5\,y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + \ldots = (2\varrho - 1)(y_\varrho - \varphi)$$

$$3\,y_2 \frac{\partial}{\partial y_3}(y_\varrho - \varphi) + 8\,y_3 \frac{\partial}{\partial y_4}(y_\varrho - \varphi) + \ldots = 0.$$

Die erste Gleichung ergiebt sich, wenn man die fünfte Gleichung der linearen Gruppe mit 2 multipliciert iervon die vierte Gleichung derselben abzieht. Aus der zweiten ergiebt sich wie oben die Gleichung:

$$3\,y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 8\,y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \ldots = 0,$$

mit dem Annihilator Ωf aequivalent ist. Hiermit ist auch für die projektiven Reciprokanten die volle instimmung beider Theorien bewiesen.

Wenn man nun die Resultate der Untersuchungen dieses Kapitels zusammenfasst, so ergiebt sich folgendes:

1. Auf Grund der Definition der orthogonalen, reinen und projektiven Reciprokanten Sylvester beweisen, dass diese Funktionen auch bei der orthogonalen, bezüglich bei llgemeinen linearen, bezüglich bei der allgemeinen projektiven Transformation bis inen hinzutretenden Faktor ungeändert bleiben. Aus dieser Thatsache in Verbindung er Definition der genannten Reciprokanten leitet er Kriterien dafür ab, dass eine tion der Ableitungen zu einer dieser drei Arten von Reciprokanten gehört. Dieselben nur aus, dass die Inkremente, welche diesen Funktionen durch gewisse infinitesimale formationen erteilt werden, die in den allgemeinen Transformationen enthalten sind, der identisch (bei den absoluten Reciprokanten) oder durch Nullsetzen der betreffenden ionen (bei den nicht absoluten Reciprokanten) verschwinden. **Dies ist dieselbe Forderung, durch die Differentialgleichungen der Theorie der Differentialinvarianten ausgedrückt wird. Demchend hat sich oben die vollständige Übereinstimmung der Kriterien Sylvesters mit diesen Differentialngen ergeben.**

Es sei noch darauf hingewiesen, dass sich die Zulässigkeit der orthogonalen, der allgemeinen und der allgemeinen projektiven Transformation für die drei besonderen Arten von Reciprokanten r Theorie der Differentialinvarianten aus der Definition derselben thatsächlich ergeben muss. Denn eser Definition sind diese Reciprokanten Differentialinvarianten einer Transformation, welche in den en allgemeinen Transformationen enthalten ist (der Vertauschung). Sie bilden also einen Teil der

sämtlichen Differentialinvarianten dieser Transformation. Aus den sämtlichen Differentialinvarianten dersel werden sie aber durch Forderungen abgeschieden, deren analytische Formulierung die Differentialgleichun welche die Theorie der Differentialinvarianten für die genannten Transformationsgruppen aufstellt, o weiteres ergiebt.

2. Bei der Ableitung dieser Kriterien werden gewisse Scharen von orthogonal linearen und projektiven Transformationen durch die infinitesimalen Transformatio ersetzt, welche in ihnen enthalten sind. Dies ist, wie aus der allgemeinen Theorie Differentialinvarianten hervorgeht, nur möglich, weil die Gesamtheit der verwende Transformationen die Gruppeneigenschaft besitzt. **Es ist in diesem Verfahren also eine Verwend der Sätze über die Transformationsgruppen zu erkennen, welche im I. Kapitel, § 1, entwickelt worden s**

Obwohl somit die Gruppeneigenschaft der vorkommenden Transformationsscha thatsächlich verwendet wird, so ist ihr Vorhandensein in den Untersuchungen Sylvest doch nicht festgestellt und der Gruppenbegriff nicht eingeführt. Deswegen können diesem Zusammenhang zwischen den Differentialinvarianten und den Transformatio gruppen, auf dem die allgemeine Theorie Lies begründet ist, bei Sylvester ke Folgerungen gezogen werden. Es ist vielmehr bei ihm in jedem einzelnen Falle noch besonderer Beweis dafür nötig, dass die aufgestellten Kriterien auch hinreichend sind die allgemeinen Transformationen, während sie nur für die infinitesimalen Transformatio abgeleitet worden sind. Thatsächlich aber wird durch dieses Verfahren doch auch nur allgemeine, für beliebige kontinuierliche Transformationsgruppen giltige Satz Gruppentheorie, dass jede Transformationsgruppe zur Bestimmung ihrer Differenti invarianten durch die infinitesimalen Transformationen, welche in ihr enthalten si vertreten werden kann, für die speziellen Fälle, welche Sylvester behandelt, bewiesen.

Sylvester hat also durch die Aufstellung der Kriterien für orthogonale, reine und projek Reciprokanten das spezielle Problem aus der allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten gelöst, Differentialinvarianten der orthogonalen, der allgemeinen linearen und der allgemeinen projekti Transformationsgruppe in zwei Veränderlichen zu bestimmen, indem er die allgemeine Methode dieser The mit Umgehung des Gruppenbegriffs für diese speziellen Fälle entwickelt.

III. Reine Reciprokanten in drei Veränderlichen.

In den Arbeiten Elliots, welche in den Proceedings[1]) veröffentlicht sind, wird das Problem Reciprokanten auf solche in drei Veränderlichen ausgedehnt. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: können erstens zwei unabhängige (x, y) und eine abhängige Veränderliche (z) vorhanden sein. D versteht man unter einem Reciprokanten eine Funktion der Ableitungen von z nach x und y, die cyklischer Vertauschung der drei Veränderlichen in eine neue Funktion übergeht, welche als Produkt

---

[1]) Anmerkung: Man vergleiche insbesondere Proceedings, Bd. XVIII: On Differential Equations of I Ternary Reciprocants.

Über die Bezeichnungen ist folgendes zu bemerken. Es ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_{1,0}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = x_{1,0}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = y_{1,0}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{2,0}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = x_{2,0},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_{0,1}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = x_{0,1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = y_{0,1}. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{1,1}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = x_{1,1} \qquad \text{u. s}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{0,2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = x_{0,2},$$

Elliots Bezeichnungen sind:

$$\begin{aligned}
z_{1,0} &= p, & z_{0,1} &= q, & z_{2,0} &= a_1, & z_{1,1} &= b_1, & z_{0,2} &= c_1, \\
x_{1,0} &= p', & x_{0,1} &= q', & x_{2,0} &= a_1', & x_{1,1} &= b_1', & x_{0,2} &= c_1', \qquad \text{u. s.} \\
y_{1,0} &= p'', & y_{0,1} &= q'', & y_{2,0} &= a_1'', & y_{1,1} &= b_2'', & y_{0,2} &= c_1''.
\end{aligned}$$

ursprünglichen Funktion und einem Faktor dargestellt werden kann, der im allgemeinen auch ıktion der Ableitungen ist. Reine Reciprokanten nennt man die Funktionen, wenn sie frei von der en Ableitung sind. Diese letzteren sind allein genauer untersucht, aber es ist von ihnen nicht bewiesen den, dass sie die allgemeine lineare Transformation gestatten. Doch kann man dies aus obiger Definition au wie in zwei Veränderlichen ableiten (vergl. p. 36). Es lässt sich nämlich zeigen, dass die erentialgleichungen, welche ausdrücken, dass die Funktionen von den ersten Ableitungen frei sind, die remente bestimmter infinitesimaler Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe in drei Veränderlichen und dass diese Transformationen durch cyklische Vertauschung der Veränderlichen die übrigen itesimalen Transformationen der genannten Gruppe ergeben. Hieraus geht hervor, dass diese Funktionen Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe gestatten.

Elliot stellt auf anderem Wege Bedingungen dafür auf, dass eine Funktion in drei Veränderlichen er Reciprokant sei. Wie sich herausstellen wird, sind dieselben aequivalent mit den Differentialgleichungen, he durch die infinitesimalen Transformationen der linearen Gruppe bestimmt werden, so dass auch lurch die Übereinstimmung dieser Reciprokanten mit den Differentialinvarianten der allgemeinen linearen ppe erwiesen wird.

Das Verfahren zur Aufstellung dieser Bedingungen entspricht dem in zwei Veränderlichen, indem hier die Inkremente berechnet werden, welche die Ableitungen bei einer bestimmten infinitesimalen sformation erhalten und daraus das Inkrement ermittelt wird, das eine Funktion dieser Ableitungen t [1]).

So kommt Elliot zu folgenden Bedingungen für absolute reine Reciprokanten:

1. Die Funktion muss von $x, y, z, z_{1,0}$ und $z_{0,1}$ frei sein.
2. Die Funktion muss homogen sein [2]).
3. Die Funktion muss folgende sechs Operatoren zu Annihilatoren haben:

$$3 z_{2,0}\frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} + 2 z_{1,1}\frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} + z_{0,2}\frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} + \left(4 z_{3,0}\frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} + 3 z_{2,1}\frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + 2 z_{1,2}\frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} + z_{0,3}\frac{\partial f}{\partial z_{0,3}}\right) + \ldots.$$

$$z_{2,0}\frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} + 2 z_{1,1}\frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} + 3 z_{0,2}\frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} + \left(z_{3,0}\frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} + 2 z_{2,1}\frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + 3 z_{1,2}\frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} + 4 z_{0,3}\frac{\partial f}{\partial z_{0,3}}\right) + \ldots$$

$$z_{2,0}\frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} + z_{1,1}\frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} + \left(z_{3,0}\frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + 2 z_{2,1}\frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} + 3 z_{1,2}\frac{\partial f}{\partial z_{0,3}}\right) + \ldots.$$

$$2 z_{1,1}\frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} + z_{0,2}\frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} + \left(3 z_{2,1}\frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} + 2 z_{1,2}\frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + z_{0,3}\frac{\partial f}{\partial z_{1,2}}\right) + \ldots.$$

$$3 z_{2,0}^{2}\frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} + 3 z_{2,0} \cdot z_{1,1}\frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + (z_{2,0} \cdot z_{0,2} + 2 z_{1,1}^{2})\frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} + 3 z_{1,1} \cdot z_{0,2}\frac{\partial f}{\partial z_{0,3}} + \ldots.$$

$$3 z_{2,0} \cdot z_{1,1}\frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} + (z_{2,0} \cdot z_{0,2} + 2 z_{1,1}^{2})\frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + 3 z_{1,1} \cdot z_{0,2}\frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} + 3 z_{0,2}^{2}\frac{\partial f}{\partial z_{0,3}} + \ldots.$$

Sind die Reciprokanten nicht absolut, so tritt nur darin eine Änderung ein, dass

$$E_1 f = \mu . f \text{ und } E_2 f = \mu . f$$

uss, wobei μ eine Konstante bedeutet.

---

[1]) Anmerkung: Während Elliots Weg in Bezug auf die verwendeten infinitesimalen Transformationen lvesters Verfahren in zwei Veränderlichen abweicht, wendet Leudesdorf in der Arbeit: On some connected with the Theory of Reciprocants, Proceedings XVII, p. 217 ff., dem Verfahren Sylvesters in ränderlichen völlig analog die infinitesimalen Transformationen:

$$\begin{aligned} x' &= x - \varepsilon_1 z, & x' &= x, \\ y' &= y, & y' &= y - \varepsilon_2 z, \\ z' &= z, & z' &= z \end{aligned}$$

an.

[2]) Anmerkung: Es sei hier besonders darauf hingewiesen, dass Elliot die in zwei Veränderlichen llte Bedingung, dass die Funktion isobar sein muss, hier nicht in dieser Form ausspricht, sondern durch en Annihilatoren $E_1 f$ und $E_2 f$ zum Ausdruck bringt.

In der Theorie der Differentialinvarianten erhält man durch Erweiterung der zwölf infinitesim Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe folgende zwölf Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z_{1,0}} = 0.$$

$$y \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z_{0,1}} = 0.$$

$$z \frac{\partial f}{\partial z} + z_{1,0} \frac{\partial f}{\partial z_{1,0}} + z_{0,1} \frac{\partial f}{\partial z_{0,1}} + z_{2,0} \frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} + z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} + z_{0,2} \frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} + z_{3,0} \frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} + z_{2,1} \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + \ldots\ldots =$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - z_{1,0} \frac{\partial f}{\partial z_{1,0}} - 2 z_{2,0} \frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} - z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} - 3 z_{3,0} \frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} - 2 z_{2,1} \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} - z_{1,2} \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} - \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} - z_{0,1} \frac{\partial f}{\partial z_{0,1}} - z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} - 2 z_{0,2} \frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} - z_{2,1} \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} - 2 z_{1,2} \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} - 3 z_{0,3} \frac{\partial f}{\partial z_{0,3}} - \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - z_{1,0} \frac{\partial f}{\partial z_{0,1}} - z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} - 2 z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} - z_{3,0} \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} - 2 z_{2,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} - 3 z_{1,2} \frac{\partial f}{\partial z_{0,3}} - \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - z_{0,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,0}} - 2 z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} - z_{0,2} \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} - 3 z_{2,1} \frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} - 2 z_{1,2} \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} - z_{0,3} \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} - \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$\begin{aligned} z \frac{\partial f}{\partial x} &- z_{1,0}{}^2 \frac{\partial f}{\partial z_{1,0}} - z_{1,0} \cdot z_{0,1} \frac{\partial f}{\partial z_{0,1}} - 3 z_{1,0} \cdot z_{2,0} \frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} - (2 z_{1,0} \cdot z_{1,1} + z_{0,1} \cdot z_{2,0}) \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} - (2 z_{0,1} \cdot z_{1,1} \\ &+ z_{1,0} \cdot z_{0,2}) \frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} - (4 z_{1,0} \cdot z_{3,0} + 3 z_{2,0}{}^2) \frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} - (z_{0,1} \cdot z_{3,0} + 3 z_{1,0} \cdot z_{2,1} + 3 z_{2,0} \cdot z_{1,1}) \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} \\ &- (2 z_{0,1} \cdot z_{2,1} + 2 z_{1,0} \cdot z_{1,2} + z_{2,0} \cdot z_{0,2} + 2 z_{1,1}{}^2) \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} - (3 z_{0,1} \cdot z_{1,2} + z_{1,0} \cdot z_{0,3} + 3 z_{1,1} \cdot z_{0,2}) \frac{\partial f}{\partial z_{0,3}} - \ldots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \frac{\partial f}{\partial y} &- z_{1,0} \cdot z_{0,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,0}} - z_{0,1}{}^2 \frac{\partial f}{\partial z_{0,1}} - (2 z_{1,0} \cdot z_{1,1} + z_{0,1} \cdot z_{2,0}) \frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} - (2 z_{0,1} \cdot z_{1,1} + z_{1,0} \cdot z_{0,2}) \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} \\ &- 3 z_{0,1} \cdot z_{0,2} \frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} - (z_{0,1} \cdot z_{3,0} + 3 z_{1,0} \cdot z_{2,1} + 3 z_{2,0} \cdot z_{0,2}) \frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} - (2 z_{0,1} \cdot z_{2,1} + 2 z_{1,0} \cdot z_{1,2} + 2 z_{1,1}{}^2 \\ &+ z_{2,0} \cdot z_{0,2}) \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + (z_{1,0} \cdot z_{0,3} + 3 z_{0,1} \cdot z_{1,2} + 3 z_{1,1} \cdot z_{0,2}) \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} - (4 z_{0,1} \cdot z_{0,3} + 3 z_{0,2}{}^2) \frac{\partial f}{\partial z_{0,3}} - \ldots = 0. \end{aligned}$$

Die ersten drei Gleichungen sagen aus, dass f von x, y, z, die vierte und fünfte, dass f von und $z_{0,1}$ frei sein muss. Die sechste sagt mit Berücksichtigung von Gleichung 1) bis 5) aus, dass Funktion f in den Grössen $z_{2,0}, z_{1,1}, z_{0,2}, z_{3,0}, z_{2,1} \ldots\ldots$ homogen sein muss. Dies sind wieder Bedingungen 1) und 2) der Reciprokantentheorie. Aus den übrigen sechs Gleichungen kann man die se Annihilatoren entwickeln.

E_1 erhält man durch Addition der linken Seiten von Gleichung 7) und 6).

E_2 ergiebt sich ebenso aus Gleichung 8) und Gleichung 6).

Ω_1 und Ω_2 sind identisch mit den linken Seiten von Gleichung 9) und 10).

V_1 und V_2 ergeben sich folgendermassen:

Da f von $z_{1,0}$ und $z_{0,1}$ frei sein soll, so kann man Gleichung 11) in folgende drei zerlegen:

$$3 z_{2,0} \frac{\partial f}{\partial z_{2,0}} + 2 z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} + z_{0,2} \frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} + 4 z_{3,0} \frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} + 3 z_{2,1} \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + \ldots = 0.$$

$$z_{2,0} \frac{\partial f}{\partial z_{1,1}} + 2 z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{0,2}} + z_{3,0} \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + 2 z_{2,1} \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} + z_{1,2} \frac{\partial f}{\partial z_{0,3}} + \ldots = 0.$$

$$3 z_{2,0}{}^2 \frac{\partial f}{\partial z_{3,0}} + 3 z_{2,0} \cdot z_{1,1} \frac{\partial f}{\partial z_{2,1}} + (z_{2,0} \cdot z_{0,2} + 2 z_{1,1}{}^2) \frac{\partial f}{\partial z_{1,2}} + 3 z_{1,1} \cdot z_{0,2} \frac{\partial f}{\partial z_{0,3}} + \ldots = 0.$$

Die linke Seite der letzten dieser Gleichungen ist mit $V_1 f$ identisch, die der ersten mit $E_1 f$ und der zweiten mit $\Omega_1 f$. Ebenso kann man Gleichung 12) in folgende zerfällen:

$$E_2 f = 0, \quad \Omega_2 f = 0, \quad V_2 f = 0.$$

Damit ist für absolute Reciprokanten die völlige Übereinstimmung erwiesen.

Was nun die nicht absoluten Reciprokanten, bezüglich die relativen Differentialinvarianten angeht, kann man die Forderung der Theorie der Differentialinvarianten wie in zwei Veränderlichen so auslegen, s sich die relativen Differentialinvarianten bei Ausführung der erweiterten Transformationen mit Faktoren roducieren sollen. Die Bedingungen der Reciprokantentheorie kann man in demselben Sinne interpretieren; weichen die Operatoren derselben, wie oben gezeigt, von den Inkrementen ab; sie sind aber zulässige nbinationen derselben, so dass die Faktoren nur andere Werte erhalten.

Es bleibt nur noch übrig, über den zweiten Fall einiges zu bemerken[1]. Es können nämlich die Veränderlichen auch durch zwei Relationen verbunden sein. Denkt man sich x und y als Funktionen z[2]), so hat man unter einem Reciprokanten eine Funktion der Ableitungen zu verstehen, welche sich, n man die Veränderlichen cyklisch vertauscht, so dass der Reihe nach x und y unabhängige Veränderliche len, immer mit einem Faktor reproduciert, der im allgemeinen auch Funktion der Ableitungen ist. Funktion der Ableitungen ist nun absoluter reiner Reciprokant der betrachteten Art, wenn sie erstens von $x, y, z, x_z^{(1)}, y_z^{(1)}$ ist, wenn sie zweitens in den Ableitungen von x und y nach z homogen vom le 0 und in beiden Reihen von Ableitungen gleichzeitig isobar vom Gewichte 0 ist und zwar so, dass itungen gleicher Ordnung immer gleiches Gewicht haben, und wenn sie drittens folgende vier Operatoren Annihilatoren hat:

$$= x_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(2)}} + x_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(3)}} + x_z^{(4)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(4)}} + \ldots\ldots$$

$$= y_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(2)}} + y_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(3)}} + y_z^{(4)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(4)}} + \ldots\ldots$$

$$= 3 x_z^{(2)\,2} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(3)}} + 10\, x_z^{(2)} x_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(4)}} + \ldots + 3\, x_z^{(2)} y_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(3)}} + 2\,(3\, y_z^{(3)} x_z^{(2)} + 2\, y_z^{(2)} x_z^{(3)}) \frac{\partial f}{\partial y_z^{(4)}} + \ldots$$

$$= 3\, x_z^{(2)} y_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(3)}} + 2\,(3\, x_z^{(3)} y_z^{(2)} + 2\, y_z^{(3)} x_z^{(2)}) \frac{\partial f}{\partial x_z^{(4)}} + \ldots + 3\, y_z^{(2)\,2} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(3)}} + 10\, y_z^{(2)} y_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(4)}} + \ldots$$

Diese Annihilatoren werden auch hier genau wie in zwei Veränderlichen gewonnen. (Vergl. rkung 1, p. 39.)

---

[1]) Anmerkung: Vergl. Leudesdorf: Formula on the Interchange . . . . Proceedings, Bd. XVII, p. 329 ff.

[2]) Über die Bezeichnungen ist folgendes zu bemerken. Es wird gesetzt:

$$\frac{dx}{dz} = x_z^{(1)}, \quad \frac{dy}{dx} = y_x^{(1)}, \quad \frac{dz}{dy} = z_y^{(1)},$$
$$\frac{dy}{dz} = y_z^{(1)}, \quad \frac{dz}{dx} = z_x^{(1)}, \quad \frac{dx}{dy} = x_y^{(1)},$$
$$\frac{d^2x}{dz^2} = x_z^{(2)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y_x^{(2)}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = z_y^{(2)},$$
$$\frac{d^2y}{dz^2} = y_z^{(2)}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = z_x^{(2)}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = x_y^{(2)},$$

u. s. w.

Leudesdorf setzt:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n x}{dz^n} = X_n, \quad \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dz^n} = Y_n,$$
$$\frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n} = Y_n, \quad \frac{1}{n!}\frac{d^n z}{dx^n} = Z_n,$$
$$\frac{1}{n!}\frac{d^n z}{dy^n} = Z'_n, \quad \frac{1}{n!}\frac{d^n x}{dy^n} = X'_n.$$

So entsteht folgender Zusammenhang:

$$x_z^{(n)} = n!\,X_n, \quad y_z^{(n)} = n!\,Y_n,$$
$$y_x^{(n)} = n!\,Y_n, \quad z_x^{(n)} = n!\,Z_n,$$
$$z_y^{(n)} = n!\,Z'_n, \quad x_y^{(n)} = n!\,X'_n$$

u. s. w.

Die erweiterten infinitesimalen Transformationen aber ergeben folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

$$z \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x_z^{(1)}} = 0.$$

$$z \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_z^{(1)}} = 0.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial z} + x_z^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(1)}} + x_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(2)}} + x_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(3)}} + \ldots . = 0.$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} + y_z^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(1)}} + y_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(2)}} + y_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(3)}} + \ldots . = 0.$$

$$z \frac{\partial f}{\partial z} - x_z^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(1)}} - y_z^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(1)}} - 2\, x_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(2)}} - 2\, y_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(2)}} - 3\, x_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(3)}} - 3\, y_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(3)}} - \ldots\ldots =$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - y_z^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(1)}} - y_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(2)}} - y_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(3)}} - \ldots\ldots = 0.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - x_z^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(1)}} - x_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(2)}} - x_z^{(3)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(3)}} - \ldots\ldots = 0.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial z} - {x_z^{(1)}}^2 \frac{\partial f}{\partial x_z^{(1)}} - x_z^{(1)} y_z^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(1)}} - 3\, y_z^{(1)} x_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(2)}} - (2\, x_z^{(1)} y_z^{(2)} + y_z^{(1)} x_z^{(2)}) \frac{\partial f}{\partial y_z^{(2)}} - (4\, x_z^{(1)} y_z^{(3)}$$
$$+ 3\, {x_z^{(2)}}^2) \frac{\partial f}{\partial x_z^{(3)}} - (y_z^{(1)} x_z^{(3)} + 3\, x_z^{(1)} y_z^{(3)} + 3\, x_z^{(2)} y_z^{(2)}) \frac{\partial f}{\partial y_z^{(3)}} - \ldots\ldots = 0.$$

$$y \frac{\partial f}{\partial z} - x_z^{(1)} y_z^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_z^{(1)}} - {y_z^{(2)}}^2 \frac{\partial f}{\partial y_z^{(1)}} - (2\, y_z^{(1)} x_z^{(2)} + x_z^{(1)} y_z^{(2)}) \frac{\partial f}{\partial x_z^{(2)}} - 3\, y_z^{(1)} x_z^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y_z^{(2)}} - (x_z^{(1)} y_z^{(3)} + 3\, x_z^{(3)} y$$
$$+ 3\, x_z^{(2)} y_z^{(2)}) \frac{\partial f}{\partial x_z^{(3)}} - (4\, x_z^{(3)} y_z^{(1)} + 3\, {x_z^{(2)}}^2) \frac{\partial f}{\partial y_z^{(3)}} - \ldots\ldots = 0.$$

Die ersten fünf Gleichungen sind die analytische Formulierung der ersten Bedingung. Die m Hilfe der Gleichungen 1) bis 5) reducierten Gleichungen 6), 7) und 8) drücken die zweite Bedingung au Die linken Seiten der Gleichungen 9) und 10) sind identisch mit den Annihilatoren J_2 und J_1 ur Gleichung 11) und 12) zerfallen jede in drei. Die erste aus 11) entstehende Gleichung ist gleich d Summe von 8) und 10), die zweite ist identisch mit 10) selbst und die dritte ist der Annihilator $W_1 f$. D erste Gleichung von 12) ist identisch mit 9), die zweite ist gleich der Summe von 8) und 9) und die drit ist identisch mit dem Annihilator $W_2 f$.

Hiermit ist der Beweis erbracht, dass die Resultate, welche über die Reciprokanten in zw Veränderlichen gefunden worden sind, in allen Punkten auch für die Reciprokanten in drei Veränderliche giltig sind.

Schliesslich sollen hier noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden über die Relationen, welch Leudesdorf zwischen den Operatoren $J_1 f$, $J_2 f$, $W_1 f$, $W_2 f$ aufstellt[1]. Dieselben lauten:

$$(J_1\, W_1 - W_1\, J_1) = 0.$$
$$(J_2\, W_2 - W_2\, J_2) = 0.$$
$$(J_1\, W_2 - W_2\, J_1) = W_1.$$
$$(J_2\, W_1 - W_1\, J_2) = W_2.$$

[1]) Anmerkung: On Change of the Independent Variable (Proceedings XVII).

Da diese Operatoren entweder selbst erweiterte Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe r lineare Funktionen solcher erweiterter Transformationen sind, so hat man in diesen Formeln nur die annten Relationen zu erkennen, welche aussagen, dass die erweiterten infinitesimalen Transformationen e Gruppe bilden.

Trotzdem ist auch bei diesen Untersuchungen die Gruppeneigenschaft der Gesamtheit der linearen nsformationen, so oft sie auch verwendet wird, niemals als solche ausgesprochen.

Auch in zwei Veränderlichen finden sich, wie hier noch bemerkt sein mag, diese Klammeroperationen ler. Denn unter den Alternanten, welche Sylvester in den Arbeiten im American Journal untersucht, man nichts anderes zu verstehen als die Klammeroperation der Gruppentheorie.

Auch die Bildung der Generatoren zur Gewinnung neuer Reciprokanten aus schon bekannten mit e der Alternanten, wie sie am gleichen Orte auseinandergesetzt ist, beruht lediglich auf einer Bestimmung er erweiterter infinitesimaler Transformationen aus bekannten durch die Klammeroperation.

Da es jedoch die Aufgabe dieser Arbeit nur sein soll, zunächst den grundlegenden Zusammenhang er Theorien, vor allem aber die Thatsache festzustellen, dass die Reciprokanten keine neue Art von braischen Formen sind (vergl. American Journal 1886, Lecture I: „A new world of algebraical forms"), ern zu den Funktionen gehören, welche in der Theorie der Differentialinvarianten untersucht worden , so muss die genauere Untersuchung dieser und mancher anderen hierher gehörigen Frage vorläufig rbleiben. Der Zweck dieser Arbeit ist erreicht, wenn durch sie die Anregung gegeben würde, den mmenhang beider Theorien, welchen sie nachgewiesen hat, für die Fortschritte beider zu verwerten.

SULLE QUADRATURE

NOTA

DEL COMMENDATORE

P. TARDY

Professore di Calcolo Differenziale e Integrale nella Regia Università di Genova, Direttore degli Studi nella R. Scuola di Marina, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo, della R. Accademia delle Scienze di Torino, de' Nuovi Lincei di Roma, de' Georgofili di Firenze, ecc.

INSERITA NEL TOMO SECONDO DELLA SERIE SECONDA

DELLE MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

MODENA

TIPOGRAFIA DELL' EREDE SOLIANI

1865

Gl' integrali delle funzioni non potendosi ottenere in termini finiti o con le ordinarie trascendenti che in un numero assai ristretto di casi, i geometri in vista principalmente delle applicazioni si sono rivolti a cercare delle formole, le quali somministrino il valore numerico approssimato di un integrale definito tra limiti dati, ossia dell' area di una curva piana.

La più semplice tra esse è quella che si consegue decomponendo la differenza delle ascisse estreme, cioè dei limiti dell' integrale, in un certo numero di parti uguali, e riguardando l' area della curva siccome la somma di tanti trapezi, i cui lati paralleli sono le ordinate equidistanti, e i lati non paralleli i diversi elementi delle ascisse e le corde che congiungono le estremità delle ordinate.

Ora è importante conoscere l' espressione analitica della correzione che bisogna fare a ciascuna formola di approssimazione per avere il valore esatto dell' integrale.

Poisson (1) è stato il primo a dare sotto forma d' integrale definito la suddetta correzione per il più ovvio metodo di quadratura sopra accen-

(1) Mém. de l' Acad. R.e des Sciences T. VI.

nato. Integrando quindi successivamente per parti si giunge alla serie dovuta originariamente a Maclaurin, e che porta d' ordinario il nome di Euler, della quale si ottiene così il termine complementare.

Il ch. Generale Menabrea in una Memoria inserita tra quelle dell' Accademia delle Scienze di Torino, (2) partendo anch' egli da una formola di Fourier, à con procedimento uniforme assegnato per integrali definiti le correzioni ai valori approssimati forniti dai metodi generalmente conosciuti sotto i nomi di Legendre e di Simpson.

In questa nota ci proponiamo di ritrovare per altra via il termine complementare di Poisson, e di far vedere come da esso si possano dedurre immediatamente le correzioni relative alle formole dianzi indicate e ad altre. Soggiungeremo quindi qualche cosa intorno al metodo di Gauss generalizzato da Christoffel.

Abbiamo dal calcolo integrale

$$(1) \qquad f(x+\omega)-f(x)=\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{\Pi(2)}f''(x)+\dots\dots\dots + \frac{\omega^m}{\Pi(m)}f^{(m)}(x)+\frac{\omega^{m+1}}{\Pi(m)}\int_0^1 dz.z^m f^{(m+1)}(x+\omega-\omega z);$$

ponendo in luogo d' x successivamente $a, a+\omega, a+2\omega, \dots a+(n-1)\omega$, e sommando verrà

$$(2) \qquad f(a+n\omega)-f(a)=\omega\left\{f'(a)+f'(a+\omega)+\dots\dots+f'(a+(n-1)\omega)\right\} + \frac{\omega^2}{\Pi(2)}\left\{f''(a)+\dots\dots+f''(a+(n-1)\omega)\right\}+\dots\dots + \frac{\omega^m}{\Pi(m)}\left\{f^{(m)}(a)+\dots+f^{(m)}(a+(n-1)\omega)\right\} + \frac{\omega^{m+1}}{\Pi(m)}\int_0^1 dz.z^m\left\{f^{(m+1)}(a+\omega-\omega z)+f^{(m+1)}(a+2\omega-\omega z)+\dots+f^{(m+1)}(a+n\omega-\omega z)\right\}$$

---

(2) Tom. VIII. Serie 2.ª

Facendo

$$a + n\omega = b, \qquad f'(x) = \varphi(x), \qquad \text{per cui}$$
$$f(x) = \int \varphi(x)\,dx,$$

si avrà

$$(3)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \omega \left\{ \varphi(a) + \varphi(a+\omega) + \ldots + \varphi(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^2}{\Pi(2)} \left\{ \varphi'(a) + \ldots\ldots + \varphi'(a+(n-1)\omega) \right\} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\omega^m}{\Pi(m)} \left\{ \varphi^{(m-1)}(a) + \ldots\ldots + \varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^{m+1}}{\Pi(m)} \int_0^1 dz \,.\, z^m \left\{ (\varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z) + \varphi^{(m)}(a+2\omega-\omega z) + \ldots \right.$$
$$\left. + \varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z) \right\}$$

la quale equazione suppone che $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ... $\varphi^{(m)}(x)$ rimangano finite e continue per tutti i valori della variabile compresi fra a e b. Allo stesso modo con cui siamo pervenuti alla (2) otterremo le seguenti:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \omega \left\{ \varphi'(a) + \ldots + \varphi'(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^2}{\Pi(2)} \left\{ \varphi''(a) + \ldots\ldots + \varphi''(a+(n-1)\omega) \right\} + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^{m-1}}{\Pi(m-1)} \left\{ \varphi^{(m-1)}(a) + \ldots\ldots + \varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^m}{\Pi(m-1)} \int_0^1 dz.z^{m-1} \left\{ \varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z) + \ldots + \varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z) \right\},$$

$$\varphi'(b) - \varphi'(a) = \omega \left\{ \varphi''(a) + \ldots + \varphi''(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^2}{\Pi(2)} \left\{ \varphi'''(a) + \ldots + \varphi'''(a+(n-1)\omega) \right\} + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^{m-2}}{\Pi(m-2)} \left\{ \varphi^{(m-1)}(a) + \ldots + \varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega) \right\}$$
$$+ \frac{\omega^{m-1}}{\Pi(m-2)} \int_0^1 dz.z^{m-2} \left\{ \varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z) + \ldots + \varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z) \right\},$$

$$\varphi''(b)-\varphi''(a)=\omega\left\{\varphi'''(a)+\ldots\ldots+\varphi'''(a+(n-1)\omega)\right\}$$
$$+\frac{\omega^2}{\Pi(2)}\left\{\varphi^{\mathrm{IV}}(a)+\ldots+\varphi^{\mathrm{IV}}(a+(n-1)\omega)\right\}+\ldots$$
$$+\frac{\omega^{m-3}}{\Pi(m-3)}\left\{\varphi^{(m-1)}(a)+\ldots+\varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega)\right\}$$
$$+\frac{\omega^{m-2}}{\Pi(m-3)}\int_0^1 dz.z^{m-3}\left\{\varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z)\right\},$$

....

$$\varphi^{(m-2)}(b)-\varphi^{(m-2)}(a)=\omega\left\{\varphi^{(m-1)}(a)+\ldots\ldots+\varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega)\right\}$$
$$+\omega^2\int_0^1 dz.z\left\{\varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z)\right\},$$

che moltiplicate rispettivamente per $A_1\,\omega$, $A_2\,\omega^2$, ... $A_{m-1}\,\omega^{m-1}$, e sommate daranno

$$A_1\,\omega\left\{\varphi(b)-\varphi(a)\right\}+A_2\,\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$$
$$+A_3\,\omega^3\left\{\varphi''(b)-\varphi''(a)\right\}+\ldots+A_{m-1}\,\omega^{m-1}\left\{\varphi^{(m-2)}(b)-\varphi^{(m-2)}(a)\right\}$$
$$=A_1\,\omega^2\left\{\varphi'(a)+\varphi'(a+\omega)+\ldots\ldots+\varphi'(a+(n-1)\omega)\right\}$$
$$+\left(\frac{A_1}{\Pi(2)}+A_2\right)\omega^3\left\{\varphi''(a)+\ldots\ldots+\varphi''(a+(n-1)\omega)\right\}$$
$$+\left(\frac{A_1}{\Pi(3)}+\frac{A_2}{\Pi(2)}+A_3\right)\omega^4\left\{\varphi'''(a)+\ldots\varphi'''(a+(n-1)\omega)\right\}+\ldots\ldots$$
$$+\left(\frac{A_1}{\Pi(m-1)}+\frac{A_2}{\Pi(m-2)}+\ldots\ldots+A_{m-1}\right)\omega^m$$
$$\times\left\{\varphi^{(m-1)}(a)+\ldots\ldots+\varphi^{(m-1)}(a+(n-1)\omega)\right\}$$
$$+\omega^{m+1}\int_0^1 dz.\left\{\frac{A_1}{\Pi(m-1)}z^{m-1}+\frac{A_2}{\Pi(m-2)}z^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1}\,z\right\}$$
$$\times\left\{\varphi^{(m)}(a+\omega-\omega z)+\varphi^{(m)}(a+2\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(m)}(a+n\omega-\omega z)\right\}.$$

Determiniamo le costanti A_1, A_2, ... A_{m-1} per mezzo delle equazioni

$$A_1 = \frac{1}{\Pi(2)},$$

$$\frac{A_1}{\Pi(2)} + A_2 = \frac{1}{\Pi(3)},$$

$$\frac{A_1}{\Pi(3)} + \frac{A_2}{\Pi(2)} + A_3 = \frac{1}{\Pi(4)},$$

. . . .

$$\frac{A_1}{\Pi(m-1)} + \frac{A_2}{\Pi(m-2)} + \dots\dots + A_{m-1} = \frac{1}{\Pi(m)};$$

esse, com' è noto, (3) forniscono

$$A_1 = \tfrac{1}{2},\ A_3 = 0,\ A_5 = 0,\ \dots\dots\ A_{2r-1} = 0,\ A_{2r} = (-1)^r \frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)},$$

ove B_{2r-1} rappresenta l' $(r)^{esimo}$ numero di Bernoulli.

Prendendo $m = 2r+1$ avremo così

$$\frac{\omega^2}{\Pi(2)} \Big\{ \varphi'(a) + \varphi'(a+\omega) + \dots + \varphi'(a+(n-1)\omega) \Big\}$$

$$+ \frac{\omega^3}{\Pi(3)} \Big\{ \varphi''(a) + \dots + \varphi''(a+(n-1)\omega) \Big\} + \dots\dots$$

$$+ \frac{\omega^{2r+1}}{\Pi(2r+1)} \{ \varphi^{(2r)}(a) + \dots + \varphi^{(2r)}(a+(n-1)\omega \} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\omega \{ \varphi(b) - \varphi(a) \}$$

$$- \frac{B_1}{\Pi(2)} \omega^2 \Big\{ \varphi'(b) - \varphi'(a) \Big\} + \frac{B_3}{\Pi(4)} \omega^4 \Big\{ \varphi'''(b) - \varphi'''(a) \Big\} - \dots$$

$$+ (-1)^r \frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)} \omega^{2r} \Big\{ \varphi^{(2r-1)}(b) - \varphi^{(2r-1)}(a) \Big\}$$

$$- \omega^{2r+2} \int_0^1 dz \Big\{ \frac{1}{2\Pi(2r)} z^{2r} - \frac{B_1}{\Pi(2)\Pi(2r-1)} z^{2r-1} + \dots + (-1)^r \frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)} z \Big\} \times$$

$$\times \{ \varphi^{(2r+1)}(a+\omega-\omega z) + \dots\dots + \varphi^{(2r+1)}(a+n\omega-\omega z) \},$$

e quindi sostituendo nella (3),

---

(3) Euler. Calc. Differ. Pars. posterior. Cap. V.

$$(4)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\ldots+\varphi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{B_1}{\Pi(2)}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{B_3}{\Pi(4)}\omega^4\left\}\varphi'''(b(-\varphi'''(a)\right\}-\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}\omega^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}+\frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r)}\int_0^1 dz\,\times$$

$$\left\{\frac{z^{2r+1}}{2r+1}-\tfrac{1}{2}z^{2r}+\tfrac{1}{2}(2r)_1B_1z^{2r-1}-\tfrac{1}{4}(2r)_3B_3z^{2r-3}+\ldots+(-1)^r\frac{1}{2r}(2r)_{2r-1}B_{2r-1}z\right\}$$

$$\times\left\{\varphi^{(2r+1)}(a+\omega-\omega z)+\ldots+\varphi^{(2r+1)}(a+n\omega-\omega z)\right\}.$$

Poniamo per brevità

$$(5)\qquad \varphi^{(2r+1)}(a+\omega-\omega z)+\varphi^{(2r+1)}(a+2\omega-\omega z)+\cdots+\varphi^{(2r+1)}(a+n\omega-\omega z)=\Psi(z)$$

e

$$(6)\qquad \frac{z^{2r+1}}{2r+1}-\tfrac{1}{2}z^{2r}+\tfrac{1}{2}(2r)_1B_1z^{2r-1}-\tfrac{1}{4}(2r)_3B_3z^{2r-3}+\cdots$$
$$+(-1)^r\frac{1}{2r}(2r)_{2r-1}B_{2r-1}z=\mathbf{B}_2(z)$$

ed avremo

$$(7)\qquad \int_a^b\varphi(x)\,dx=\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\ldots\right.$$
$$\left.+\varphi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$-\frac{B_1}{\Pi(2)}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{B_3}{\Pi(4)}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}-\ldots$$
$$+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}\omega^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}+R,$$

ove

$$(8)\qquad R=\frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r)}\int_0^1\mathbf{B}_2(z)\,\Psi(z)\,dz,$$

che è la formola di Maclaurin completata da un integrale definito.

Se avessimo preso $m = 2r + 2$, e posto

$$(9)\qquad \frac{z^{2r+2}}{2r+2} - \tfrac{1}{2} z^{2r+1} + \tfrac{1}{2}(2r+1)_1 B_1 z^{2r} - \tfrac{1}{4}(2r+1)_3 B_3 z^{2r-2} + \dots$$
$$+ (-1)^r \frac{1}{2r}(2r+1)_{2r-1} B_{2r-1} z^2 = \mathbf{B}_1(z)$$

avremmo ottenuto per l' espressione del resto

$$(10)\qquad R = \frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r+1)} \int_0^1 \mathbf{B}_1(z)\, \Psi^1(z)\, dz.$$

La funzione

$$(11)\qquad \mathbf{B}(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2} z^m + \tfrac{1}{2} B_1 (m)_1 z^{m-1} - \tfrac{1}{4} B_3 (m)_3 z^{m-3} + \dots\dots,$$

che per z numero intero positivo rappresenta la somma delle potenze $(m)^{me}$ de' numeri naturali

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots\dots + (z-1)^m$$

è stata detta da Raabe (4) *funzione Bernoulliana*.

Essa diviene $\mathbf{B}_2(z)$ se m è pari $= 2r$, e $\mathbf{B}_1(z)$ se m è impari $= 2r+1$. Tra le varie proprietà importanti di cui gode questa funzione, e per le quali rimandiamo al lavoro già citato di Raabe e a quelli di Malmstén (5) e di Schlömilch (6) è fondamentale quella contenuta nell' equazione

$$(12)\qquad \mathbf{B}(1-z) = (-1)^{m-1}\, \mathbf{B}(z),$$

per cui

$$\mathbf{B}_2(1-z) = -\mathbf{B}_2(z),$$
$$\mathbf{B}_1(1-z) = \mathbf{B}_1(z),$$

onde sostituendo $1 - z$ invece di z, e facendo

$$(13)\qquad \varphi^{(2r+1)}(a+\omega z) + \varphi^{(2r+1)}(a+\omega+\omega z) + \dots + \varphi^{(2r+1)}(a+(n-1)\omega+\omega z) = \Phi(z),$$

si consegue dalla (8)

---

(4) Die Jacob Bernoullische Function. Zürich 1848.
(5) Crelle. Journal für die Mathem. T. 35, p. 55.
(6) Zeitschrift für Mathem. und Phys. T. 1, p. 193.

(14) $$R = -\frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r)} \int_0^1 \mathbf{B}_2(z)\,\Phi(z)\,dz,$$

e dalla (10)

(15) $$R = \frac{\omega^{2r+2}}{\Pi(2r+1)} \int_0^1 \mathbf{B}_1(z)\,\Phi'(z)\,dz.$$

Quest' ultima espressione avrebbe anco potuto dedursi dalla precedente (14), come la (10) dalla (8), integrando per parti ed osservando che per le (6), (9) e (12)

$$\mathbf{B}_2(z) = \frac{1}{2r+1}\mathbf{B}'_1(z),$$

$$\mathbf{B}_1(0) = 0, \quad \mathbf{B}_1(1) = 0.$$

Per dare al termine complementare la forma assegnata da Poisson osserviamo che partendo dall' equazione notissima (7)

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sin 2z + \tfrac{1}{3}\sin 3z + \dots\dots,$$

ossia

$$z = \pi - 2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin kz}{k},$$

la quale sussiste per tutti i valori di z compresi tra 0 e 2π, ma esclusi questi limiti, si à per replicate integrazioni

$$\frac{z^{2r+1}}{\Pi(2r+1)} = \pi\frac{z^{2r}}{\Pi(2r)} - 2S_2\frac{z^{2r-1}}{\Pi(2r-1)} + 2S_4\frac{z^{2r-3}}{\Pi(2r-3)} - \dots$$

$$+ 2(-1)^r S_{2r}\,z + 2(-1)^{r+1}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kz}{k^{2r+1}}$$

per tutti i valori di z da $z=0$ a $z=2\pi$, ove

$$S_{2p} = 1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \dots\dots\dots,$$

e perciò (8)

$$S_{2p} = \frac{(2\pi)^{2p}}{2\,\Pi(2p)} B_{2p-1};$$

---

(7) Euler Calc. Differ. P. post. Cap. IV. §. 92.

(8) Ib. Cap. VI.

moltiplicando poi per $\frac{\Pi(2r)}{(2\pi)^{2r+1}}$ si ottiene

$$\frac{2(-1)^r\,\Pi(2r)}{(2\pi)^{2r+1}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kz}{k^{2r+1}}=\frac{1}{2r+1}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2r+1}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2r}$$

$$+\tfrac{1}{2}(2r)_1 B_1\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2r-1}-\tfrac{1}{4}(2r)_3 B_3\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2r-3}+\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{1}{2r}(2r)_{2r-1}B_{2r-1}\frac{z}{2\pi}=\mathrm{B}_2\left(\frac{z}{2\pi}\right),$$

e scrivendo $2\pi z$ invece di z

16) $$\mathrm{B}_2(z)=\frac{2(-1)^{r+1}\,\Pi(2r)}{(2\pi)^{2r+1}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi z}{k^{2r+1}},\qquad (9)$$

con che la (8) diviene

17) $$R=\frac{2(-1)^{r+1}\,\omega^{2r+2}}{(2\pi)^{2r+1}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r+1}}\int_0^1\Psi(z)\sin 2k\pi z.\,dz.$$

Ora rimesso per $\Psi(z)$ il suo valore (5) si à

$$\int_0^1\Psi(z)\sin 2k\pi z.\,dz.=\int_0^1\varphi^{(2r+1)}(a+\omega-\omega z)\sin 2k\pi z.\,dz$$

$$+\int_0^1\varphi^{(2r+1)}(a+2\omega-\omega z)\sin 2k\pi z.\,dz+\ldots$$

$$+\int_0^1\varphi^{(2r+1)}(a+n\omega-\omega z)\sin 2k\pi z.\,dz\,;$$

nel 1.° integrale del secondo membro si ponga $a+\omega-\omega z=x$, nel 2.° $a+2\omega-\omega z=x$, ... nell' ultimo $a+n\omega-\omega z=x$, ed essendo per q intero qualunque

$$\sin\frac{2k\pi(a+q\omega-x)}{\omega}=-\sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega},$$

(9) Raabe. Crelle Journal. T. 42, p. 350.

si otterrà

$$\int_0^1 \Psi(z) \sin 2k\pi z . dz =$$

$$-\frac{1}{\omega}\left\{\int_a^{a+\omega} \varphi^{(2r+1)}(x) \sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx+\int_{a+\omega}^{a+2\omega} \varphi^{(2r+1)}(x) \sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx+\ldots\right.$$

$$\left.+\int_{a+(n-1)\omega}^{a+n\omega} \varphi^{(2r+1)}(x) \sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx\right\}=-\frac{1}{\omega}\int_a^b \varphi^{(2r+1)}(x) \sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega} d$$

Integrando per parti si à

$$\int \varphi^{(2r+1)}(x) \sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx = \varphi^{(2r)}(x) \sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}$$

$$-\frac{2x\pi}{\omega}\int \varphi^{(2r)}(x) \cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega} d$$

e perciò

$$\int_a^b \varphi^{(2r+1)}(x) \sin\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx = -\frac{2k\pi}{\omega}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x) \cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx$$

per cui risulterà dalla (17)

$$(18) \qquad R = (-1)^{r+1}\frac{2\omega^{2r}}{(2\pi)^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x) \cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx$$

siccome à trovato Poisson.

Dalla (7), mettendo per i numeri Bernoulliani B_1, B_3, B_5, ... i loro valori (10), avremo dunque

---

(10) $B_1=\frac{1}{6}$, $B_3=\frac{1}{30}$, $B_5=\frac{1}{42}$, $B_7=\frac{1}{30}$, $B_9=\frac{5}{66}$, ...

$$(19) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\cdots+\varphi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{1}{12}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{1}{720}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}$$

$$-\frac{1}{30240}\omega^6\left\{\varphi^{\mathrm{V}}(b)-\varphi^{\mathrm{V}}(a)\right\}+\frac{1}{1209600}\omega^8\left\{\varphi^{\mathrm{VII}}(b)-\varphi^{\mathrm{VII}}(a)\right\}$$

$$-\cdots+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}\omega^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{(2\pi)^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

e per $r=0$

$$(20) \qquad \int_a^b\varphi(x)\,dx=\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\ldots+\varphi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

Rimane così assegnata l'espressione analitica della correzione da farsi quando il valore approssimato dell'integrale si calcola con la formola

$$\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\ldots..+\varphi(a+(n-1)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\},$$

Siano ora h_1, h_2, ….. h_p de' divisori del numero n, e sia

$$n=h_1 q_1,\ n=h_2 q_2,\ \ldots..\ n=h_p q_p;$$

egli è evidente che invece di dividere l'intervallo $b-a$ in n parti uguali ad ω possiamo intenderlo diviso in q_1 parti uguali ad $h_1\omega$, in q_2 parti uguali ad $h_2\omega$, …… in q_p parti uguali ad $h_p\omega$.

La formola (19) ci darà pertanto p equazioni, il cui tipo generale

sarà

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=h_s\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+h_s\omega)+\varphi(a+2\,h_s\omega)+\ldots+\varphi(a+(q_s-1)h_s\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{B_1}{\Pi(2)}\,h_s^2\,\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{B_3}{\Pi(4)}\,h_s^4\,\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}-\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}\,h_s^{2r}\,\omega^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}$$

$$-(-1)^r\frac{2h_s^{2r}\,\omega^{2r}}{(2\pi)^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{h_s\omega}\,dx.$$

Si moltiplichino queste ordinatamente per λ_1, λ_2, ... λ_p e si sommino con la (19), indi si determinino i fattori λ_1, λ_2, ... λ_p in modo che nel 2.° membro spariscano i coefficienti di ω^2, ω^4, ... ω^{2p}, cioè in modo da verificare le equazioni

$$1+\lambda_1\,h_1^2+\lambda_2\,h_2^2+\ldots\ldots+\lambda_p\,h_p^2=0,$$
$$1+\lambda_1\,h_1^4+\lambda_2\,h_2^4+\ldots\ldots+\lambda_p\,h_p^4=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1+\lambda_1\,h_1^{2p}+\lambda_2\,h_2^{2p}+\ldots\ldots+\lambda_p\,h_p^{2p}=0,$$

e conseguiremo così una nuova espressione per la valutazione numerica approssimata dell' integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, e la serie che ci dà la correzione non che il resto di essa.

La medesima operazione eseguita sull' equazione (20), dopo aver trovato λ_1, λ_2, ... λ_p, ci somministra per integrali definiti la correzione da applicarsi nel nuovo caso.

È chiaro poi che possiamo combinare anco diversamente quelle equazioni, ed ottenere altre formole di quadratura coi rispettivi termini complementari.

Cominciamo dal supporre il numero delle parti in cui si divide la dif-

ferenza $b-a$, delle ascisse estreme pari cioè,

$$n=2q,$$

avremmo oltre la (19) e la (20)

$$\text{(21)}\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\dots+\varphi(a+(2q-2)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{1}{12}(2\omega)^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{1}{720}(2\omega)^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}$$

$$-\frac{1}{30240}(2\omega)^6\left\{\varphi^{\mathrm{v}}(b)-\varphi^{\mathrm{v}}(a)\right\}+\dots\dots$$

$$+(-1)^r\frac{B_{2r-1}}{\Pi(2r)}(2\omega)^{2r}\left\{\varphi^{(2r-1)}(b)-\varphi^{(2r-1)}(a)\right\}$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx,$$

e

$$\text{(22)}\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\dots+\varphi(a+(2q-2)\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Moltiplicando la (20) per 2 e sottraendo la (22) viene

$$\text{(23)}\quad \int_a^b\varphi(x)\,dx=2\omega\left\{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\dots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-2\left\{2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx-\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right\}.$$

Operando alla stessa guisa sulla (19) e la (21) si ottiene

$$
(24) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega \left\{ \varphi(a+\omega) + \varphi(a+3\omega) + \dots + \varphi(a+(2q-1)\omega) \right\}
$$

$$
-\frac{1}{12}(2-2^2)\omega^2 \left\{ \varphi'(b) - \varphi'(a) \right\} + \frac{1}{720}(2-2^4)\omega^4 \left\{ \varphi'''(b) - \varphi'''(a) \right\} - \dots
$$

$$
+ (-1)^r \frac{2-2^{2r}}{\Pi(2r)} B_{2r-1}\, \omega^{2r} \left\{ \varphi^{(2r-1)}(b) - \varphi^{(2r-1)}(a) \right\}
$$

$$
-(-1)^r \frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k)^{2r}} \int_a^b \varphi^{(2r)}(x) \cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2r}} \int_a^b \varphi^{(2r)}(x) \cos\frac{k(\pi x - a)}{\omega}\,dx \right.
$$

Ora è evidente che si à in generale

$$
(25) \qquad 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} F(2k) - \sum_{k=1}^{k=\infty} F(k) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \cos k\pi\, F(k),
$$

e perciò la (23) si cangia nella seguente:

$$
(26) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega \left\{ \varphi(a+\omega) + \varphi(a+3\omega) + \dots + \varphi(a+(2q-1)\omega) \right\}
$$

$$
-2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \cos k\pi \int_a^b \varphi(x) \cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx,
$$

che è la formola di approssimazione di Legendre completata da un integrale definito.

Si scorge facilmente che il metodo di Legendre consiste nel dividere la differenza $b-a$ delle ascisse in un numero pari di parti uguali, di tirare le tangenti alla curva, alle estremità delle ordinate di posto pari e di sostituire all' area che si vuol valutare la somma delle aree de' trapezi com-

presi tra l' asse delle ascisse, due ordinate consecutive di posto impari e le tangenti accennate.

La (24) poi diviene

$$(27)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega\left\{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{1}{6}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}-\frac{7}{360}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}+\frac{31}{15120}\omega^6\left\{\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)\right\}-\ldots$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos k\pi}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Queste equazioni, ponendo $\frac{\omega}{2}$ in luogo di ω coincidono con quelle date dal Gen. Menabrea.

Il Poncelet, osservando che ciascuno elemento dell' area di una curva è racchiuso tra il trapezio formato sull' asse con le due ordinate estreme e la corda, e il trapezio formato con quelle due ordinate, prolungate se occorre, e la tangente condotta all' estremità dell' ordinata equidistante dalle estreme, à pensato di prendere la media aritmetica tra il risultato fornito dal primo processo de' trapezi inscritti e quello dato dal metodo di Legendre; se non che per non avere a calcolare tutte le ordinate di posto impari à ingegnosamente construito i trapezi incsritti congiungendo le estremità delle due prime ordinate e delle due ultime, e poi unendo tutti i punti di contatto.

Per ottenere la sua formola decomponiamo l' integrale proposto in tre, cioè facciamo

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^{a+\omega}\varphi(x)\,dx+\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)\,dx+\int_{b-\omega}^{b}\varphi(x)\,dx,$$

applichiamo al primo e al terzo la (20) e al secondo la (22), ed avremo

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega \Big\{ \tfrac{1}{4}\varphi(a) + \tfrac{3}{4}\varphi(a+\omega) + \varphi(a+3\omega) + \cdots$$

$$+ \varphi(a+(2q-3)\omega) + \tfrac{3}{4}\varphi(a+(2q-1)\omega) + \tfrac{1}{4}\varphi(b) \Big\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty} \Big\{ \int_a^{a+\omega} \varphi(x) \cos \frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$+ \int_{a+\omega}^{b-\omega} \varphi(x) \cos \frac{k\pi(x-a-\omega)}{\omega}\,dx + \int_{b-\omega}^{b} \varphi(x) \cos \frac{2k\pi(x-b+\omega)}{\omega}\,dx$$

Ora

$$\cos \frac{k\pi(x-a-\omega)}{\omega} = \cos k\pi \cos \frac{k\pi(x-a)}{\omega}$$

$$\cos \frac{2k\pi(x-b+\omega)}{\omega} = \cos \frac{2k\pi(x-a-(2q-1)\omega)}{\omega} = \cos \frac{2k\pi(x-a)}{\omega},$$

ed inoltre è evidente che

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} F(k) = \sum_{k=1}^{k=\infty} F(2k) + \sum_{k=1}^{k=\infty} F(2k-1), \tag{28}$$

e perciò otterremo

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega \Big\{ \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{4} - \frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{4} \tag{29}$$

$$+ \varphi(a+\omega) + \varphi(a+3\omega) + \cdots + \varphi(a+(2q-1)\omega) \Big\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty} \int_a^b \varphi(x) \cos \frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} \int_{a+\omega}^{b-\omega} \varphi(x) \cos \frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

Dalla semisomma di questa con la (26), avuto pure riguardo alla (28), risulta

$$30)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{8} - \frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{8}\right.$$

$$\left. + \varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx + \sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{a+\omega}^{b-\omega} \varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx,$$

che è la formola di Poncelet completata con integrali definiti.

Se invece avessimo posto per $\int_a^{a+\omega} \varphi(x)\,dx$ e $\int_{b-\omega}^b \varphi(x)\,dx$ i valori dati dalla (19) e per $\int_{a+\omega}^{b-\omega} \varphi(x)\,dx$ quello fornito dalla (21) saremmo pervenuti all' equazione

$$(31) \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{4} - \frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{4}\right.$$

$$+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\Big\}$$

$$-\frac{1}{12}\omega^2\Big\{\varphi'(b)-\varphi'(a)+3[\varphi'(b-\omega)-\varphi'(a+\omega)]\Big\}$$

$$+\frac{1}{720}\omega^4\Big\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)+15[\varphi'''(b-\omega)-\varphi'''(a+\omega)]\Big\}$$

$$-\frac{1}{30240}\omega^6\Big\{\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)+63[\varphi^{v}(b-\omega)-\varphi^{v}(a+\omega)]\Big\}+\ldots..$$

$$-(-1)^r\,\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\left\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r}}\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right\}$$

e dalla semisomma di questa con la (27) avremmo avuto

$$(32)\quad \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$=2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{8}-\frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{8}+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega)\right\}$$

$$+\frac{1}{24}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)-3\left[\varphi'(b-\omega)-\varphi'(a+\omega)\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{1440}\omega^4\left\{13\left[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right]-15\left[\varphi'''(b-\omega)-\varphi'''(a+\omega)\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{60480}\omega^6\left\{61\left[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)\right]-63\left[\varphi^{v}(b-\omega)-\varphi^{v}(a+\omega)\right]\right\}-\ldots\ldots$$

$$-(-1)^r\frac{\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\left\{2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r}}\left(\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}dx+\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}dx\right)\right\}$$

Se invece di combinare nel modo che abbiamo tenuto la (19) e la (21), o la (20) e la (22) avessimo seguito il processo da prima indicato, cioè moltiplicato la (22) per un fattore λ determinato dall' equazione

$$1+2^2\lambda=0\,,$$

che dà $\lambda=-\frac{1}{4}$, e quindi sommato con la (20), avremmo conseguito

$$\frac{3}{4}\int_a^b \varphi(x)\,dx = \omega\left\{\frac{1}{4}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\frac{1}{2}\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\varphi(a+(2q-2)\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)+\frac{1}{4}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,d$$

da cui, mercè la (25),

$$(33)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{\omega}{3}\left\{\varphi(a)+4\varphi(a+\omega)+2\varphi(a+2\omega)+4\varphi(a+3\omega)+\ldots\right.$$

$$\left.+2\varphi(a+(2q-2)\omega)+4\varphi(a+(2q-1)\omega)+\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}(2\cos k\pi+1)\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Analogamente dalle (19) e (21) sarebbe venuto

$$(34)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=\frac{\omega}{3}\left\{\varphi(a)+4\varphi(a+\omega)+2\varphi(a+2\omega)+\ldots+2\varphi(a+(2q-2)\omega)+4\varphi(a+(2q-1)\omega)+\varphi(b\right.$$

$$-\frac{1}{3.60}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}+\frac{1}{3.504}\omega^6\left\{\varphi^{\mathrm{v}}(b)-\varphi^{\mathrm{v}}(a)\right\}-\frac{1}{3.4800}\omega^8\left\{\varphi^{\mathrm{vii}}(b)-\varphi^{\mathrm{vii}}(a)\right\}+.$$

$$-(-1)^r\frac{2}{3}\cdot\frac{\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2\cos k\pi+1}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Resta così a un tratto assegnata per integrale definito, o per serie col suo termine complementare, la correzione da farsi alla formola di Tommaso Simpson.

Le equazioni (33) e (34) si accordano con le (39) e (40) della Memoria più volte citata del Sig. Menabrea.

È noto che nel processo di Simpson si divide la differenza dei limiti $b-a$ in un numero pari di parti uguali, e quindi all'arco della curva che passa per le estremità di tre ordinate successive si sostituisce un arco di parabola conica che passi per gli stessi tre punti, e il cui asse sia parallelo a quello delle ordinate.

Il Sig. Parmentier (*) dall'esame de'primi termini della differenza tra il valore esatto dell'integrale e il valore approssimato fornito dal metodo detto de'trapezi inscritti e da quello di Legendre è stato indotto a proporre una nuova formola di quadratura. In luogo della semisomma della (29) e della (26), come fa Poncelet, egli prende il terzo della somma della (29) col doppio della (26). Si ottiene così

$$(35)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\left\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{12}-\frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{12}+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(2q-1)\omega\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$-\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx.$$

Allo stesso modo dalla (31) e dalla (27) si ricava

(*) Terquem. Nouvelles Annales de Mathém. T. 14.

$$(36)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$=2\omega\Big\{\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{12}-\frac{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+(2q-1)\omega)}{12}+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\dots+\varphi(a+(2q-1)\omega)$$

$$+\frac{1}{12}\omega^2\Big\{\varphi'(b)-\varphi'(a)-[\varphi'(b-\omega)-\varphi'(a+\omega)]\Big\}$$

$$-\frac{1}{720}\omega^4\Big\{9[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)]-15[\varphi'''(b-\omega)-\varphi'''(a+\omega)]\Big\}+\dots$$

$$-(-1)^r\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\Big\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r}}\int_{a+\omega}^{b-\omega}\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\pi}\,dx$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{(2k-1)\pi(x-a)}{\omega}\,dx\Big\}.$$

Se vogliamo che la distanza costante tra le ordinate da calcolarsi sia la medesima per ciascuno de' processi indicati dobbiamo porre $\frac{\omega}{2}$ in luogo di ω nella formola (19) e $\frac{\omega}{4}$ nelle (27), (32) e (36), ed allora il primo termine della differenza tra il valore approssimato dell' integrale e il suo valore esatto, sviluppata per le potenze della suddetta distanza ω, sarà:

pel metodo de' trapezi inscritti $-\frac{1}{48}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$, e si calcolano $2q+1$ ordinate

....	di Legendre	$+\frac{1}{96}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$,	....	$2q$	.....
....	di Poncelet	$-\frac{1}{192}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$,	....	$2q+2$	.....
....	di Parmentier	$+\frac{1}{768}\omega^3\left\{\varphi''(b)+\varphi''(a)\right\}$,	....	$2q+2$	.....
....	di Simpson	$-\frac{1}{180}\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}$,	....	$2q+1$	.....

La correzione dipendendo dal valore di ω e della forma della funzione φ non si può dire in generale, come taluni àn fatto, non tenendo conto che del solo primo termine, che il metodo di Legendre sia sempre preferibile a quello de' trapezi inscritti, che il metodo di Poncelet dia un valore più approssimato di quello di Legendre, e che la formola di Parmentier, siccome sembra pretendere il suo autore, sia da anteporsi alle altre. L' unica cosa evidente si è che per ω sufficientemente piccola, in modo che la correzione possa limitarsi al solo primo termine, l' approssimazione cresce ne' diversi metodi nell' ordine in cui sono sopra disposti, e che perciò tra essi il valore fornito da quello di Simpson finisce con essere il più vicino al vero valore dell' integrale. Ma ciò non toglie che con un numero assai limitato di ordinate non si possa avere in alcuni casi una maggiore approssimazione con la formola di Legendre e di Poncelet che con quella di Simpson.

Mi pare che l' errore del Sig. Parmentier nel volere giustificare la sua proposizione (*) consista nel ritenere che la curva $y = \varphi(x)$, di cui si tratta di valutar l'area, non abbia punti di flesso nell'intervallo da $x = a$ ad $x = b$.

(*) Nouv. Annales de Mathém. T. 16.

Se supponiamo $n=4q$ avremo oltre le (20) e (22), in cui bisogna mettere $2q$ invece di q, la seguente:

$$(37)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 4\omega\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+4\omega)+\dots+\varphi(a+(4q-4)\omega)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{2\omega}\,dx,$$

ed oltre le (19) e (21), nelle quali pure va posto $2q$ in luogo di q,

$$(38)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx = 4\omega\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+4\omega)+\dots+\varphi(a+(4q-4)\omega)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-\frac{1}{12}4^2\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}+\frac{1}{720}4^4\omega^4\left\{\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right\}-\frac{1}{30240}4^6\omega^6\left\{\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)\right\}+$$

$$-(-1)^r\frac{2(2\omega)^{2r}}{\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi\,(x-a)}{2\omega}\,dx.$$

Stabiliamo le equazioni

$$1+2^2\lambda_1+4^2\lambda_2=0,$$

$$1+2^4\lambda_1+4^4\lambda_2=0,$$

da cui

$$\lambda_1=-\frac{20}{64},\qquad \lambda_2=\frac{1}{64},$$

moltiplichiamo rispettivamente le (20), (22) e (37) per 64, − 20 e 1, e sommiamo; otterremo

$$45\int_a^b \varphi(x)dx=\omega\Big\{14\varphi(a)+64\Big(\varphi(a+\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-1)\omega)\Big)$$

$$+24\Big(\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+6\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-2)\omega)\Big)$$

$$+28\Big(\varphi(a+4\omega)+\varphi(a+8\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-4)\omega)\Big)+14\varphi(b)\Big\}$$

$$-128\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{\omega}dx+40\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}dx$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{2\omega}dx$$

ossia

9) $$\int_a^b\varphi(x)dx=\frac{\omega}{45}\Big\{14\varphi(a)+64\Big(\varphi(a+\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-1)\omega)\Big)$$

$$24\Big(\varphi(a+2\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-2)\omega)\Big)+28\Big(\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+(4q-4)\omega)\Big)+14\,\varphi(b)\Big\}$$

$$\frac{64}{45}\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos k\pi\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}dx-\frac{2}{45}\sum_{k=1}^{k=\infty}(6\cos k\pi+7)\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{h\pi(x-a)}{2\omega}dx.$$

Facendo la medesima operazione sopra le (19), (21) e (38) risulta

$$(40)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{\omega}{45}\Big\{14\varphi(a)+64\Big(\varphi(a+\omega)+\dots+\varphi(a+(4q-1)\omega)\Big)$$

$$+24\Big(\varphi(a+2\omega)+\dots+\varphi(a+(4q-2)\omega)\Big)+28\Big(\varphi(a+4\omega)+\dots+\varphi(a+4q-4)\omega)\Big)+14\varphi($$

$$-\frac{2}{3^3.5.7.}\omega^6\Big\{\varphi^{\mathrm{V}}(b)-\varphi^{\mathrm{V}}(a)\Big\}+\frac{1}{2^2.3^2.5^2}\omega^8\Big\{\varphi^{\mathrm{VII}}(b)-\varphi^{\mathrm{VII}}(a)\Big\}$$

$$-\frac{1609}{2^5.3^6.5^2.7.11}\omega^{10}\Big\{\varphi^{\mathrm{IX}}(b)-\varphi^{\mathrm{IX}}(a)\Big\}+\dots$$

$$-\frac{(-1)^r}{45}\cdot\frac{2\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\Big\{32\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos k\pi}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx$$

$$+2^{2r}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{6\cos k\pi+7}{k^{2r}}\int_a^b \varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{2\omega}\,dx\Big\}.$$

Parimente se n fosse multiplo di 6, $n=6q$, stabilendo le equazioni

$$1+2^2\lambda_1+3^2\lambda_2+6^2\lambda_3=0,$$

$$1+2^4\lambda_1+3^4\lambda_2+6^4\lambda_3=0,$$

$$1+2^6\lambda_1+3^6\lambda_2+6^6\lambda_3=0,$$

si otterebbe

$$(41) \qquad \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{\omega}{140}\Big\{41[\varphi(a)+\varphi(b)]$$

$$+216[\varphi(a+\omega)+\varphi(a+5\omega)+\varphi(a+11\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-5)\omega)-\varphi(a+(6q-1)\omega)]$$

$$+\ 27[\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\varphi(a+8\omega)+\ldots+\varphi(a-(6q-4)\omega)+\varphi(a+(6q-2)\omega)]$$

$$+272[\varphi(a+3\omega)+\varphi(a+9\omega)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\varphi(a+(6q-3)\omega)]$$

$$+\ 82[\varphi(a+6\omega)+\varphi(a+12\omega)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\varphi(a+(6q-6)\omega)]\Big\}$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}(\cos k\pi-1133)\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{\omega}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}(367\cos k\pi+365)\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{3\omega}\,dx,$$

ed anche

$$(42)\quad \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{\omega}{140}\Big\{41[\varphi(a)+\varphi(b)]+216[\varphi(a+\omega)+\dots]+27[\varphi(a+2\omega)+\dots]$$

$$+272[\varphi(a+3\omega)+\dots]+82[\varphi(a+6\omega)+\dots]\Big\}$$

$$-\frac{3^2}{2^3.5^2.7}\omega^8\Big\{\varphi^{\mathrm{VII}}(b)-\varphi^{\mathrm{VII}}(a)\Big\}+\frac{5}{2^3.7.11}\omega^{10}\Big\{\varphi^{\mathrm{IX}}(b)-\varphi^{\mathrm{IX}}(a)\Big\}-\dots$$

$$-(-1)^r\frac{\omega^{2r}}{\pi^{2r}}\Big\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos k\pi-1133}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi\,(x-a)}{\omega}dx$$

$$+3^{2r}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{367\cos k\pi+365}{k^{2r}}\int_a^b\varphi^{(2r)}(x)\cos\frac{k\pi\,(x-a)}{3\omega}dx$$

Al 2.° membro di quest' ultima equazione si aggiunga e si sottragga

$$\frac{1}{140}\Big\{\Delta^6\varphi(a)+\Delta^6\varphi(a+6\omega)+\dots+\Delta^6\varphi(a+(6q-6)\omega)\Big\},$$

e si osservi che si à in generale da una parte

$$\Delta^6\varphi(x)=\varphi(x)+\varphi(x+6\omega)-6[\varphi(x+\omega)+\varphi(x+5\omega)]$$

$$+15[\varphi(x+2\omega)+\varphi(x+4\omega)]-20\varphi(x+3\omega),$$

e dall' altra

$$\Delta^6\varphi(x)=\left(e^{\omega\frac{d}{dx}}-1\right)^6\varphi(x)$$

$$=\omega^6\varphi^{\mathrm{VI}}(x)+3\omega^7\varphi^{\mathrm{VII}}(x)+\frac{19}{4}\omega^8\varphi^{\mathrm{VIII}}(x)+\ldots..$$

ed avremo

$$(43)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$=\frac{3}{10}\omega\Big\{\varphi(a)+\varphi(b)+5[\varphi(a+\omega)+\varphi(a+5\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-5)\omega)+\varphi(a+(6q-1)\omega)]$$

$$+[\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+4\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-4)\omega)+\varphi(a+(6q-2)\omega)]$$

$$+6[\varphi(a+3\omega)+\varphi(a+9\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-3)\omega)]$$

$$+2[\varphi(a+6\omega)+\varphi(a+12\omega)+\ldots+\varphi(a+(6q-6)\omega)]\Big\}$$

$$-\omega^6\big\{\varphi^{\mathrm{VI}}(a)+\varphi^{\mathrm{VI}}(a+6\omega)+\ldots+\varphi^{\mathrm{VI}}(a+(6q-6)\omega)\big\}$$

$$-3\omega^7\big\{\varphi^{\mathrm{VII}}(a)+\varphi^{\mathrm{VII}}(a+6\omega)+\ldots+\varphi^{\mathrm{VII}}(a+(6q-6)\omega)\big\}$$

$$-\omega^8\Big\{\frac{19}{4}[\varphi^{\mathrm{VIII}}(a)+\ldots+\varphi^{\mathrm{VIII}}(a+(6q-6)\omega)]+\frac{3^2}{2^3.5^2.7}[\varphi^{\mathrm{VII}}(b)-\varphi^{\mathrm{VII}}(a)]\Big\}-\ldots$$

Questa è la formola che si deduce dal metodo assai semplice poposto da Weddle (*) con i primi termini della serie che ne rappresenta la correzione.

(*) The Cambridge and Dublin Mathem. Journal V. 9, p. 71.

Le formole di quadratura contenute nelle equazioni (20), (33), (39), (41) rientrano in quelle calcolate da Cotes nella sua opera *Harmonia Mensurarum,* giovandosi delle indicazioni lasciate da Newton. Se si divide l' intervallo totale delle ascisse estreme in parti uguali l' area racchiusa fra due ordinate consecutive, l' arco della curva e l' asse delle x si può valutare approssimatamente mediante 2, 3,.... in generale n ordinate, comprendendo fra esse le due estreme. Si ànno allora le formole di Cotes, le quali danno il valore esatto dell' integrale quante volte la funzione da integrarsi è nel caso generale intera razionale di grado non superiore ad $n-1$.

Il celebre Gauss (*) à avuto l' idea felice di sostituire alle ordinate equidistanti del Cotes ordinate prese ad intervalli diversi, e di determinare quest' intervalli in maniera che per mezzo delle n ordinate corrispondenti si abbia il valore dell' integrale più approssimato che sia possibile, e il grado dell' approssimazione si fa generalmente il doppio di prima, e se ne ottiene il valore esatto quando il grado della funzione non supera $2n-1$.

Nel caso che si voglia prendere una sola ordinata il metodo di Gauss riproduce quello di Legendre.

Il ch. Prof. Turazza (**) à voluto introdurre nel calcolo approssimato dell' integrale i valori estremi delle ordinate, ed à annunziato in fine alla sua Memoria che un' analisi uguale a quella da lui esposta si potrebbe applicare al caso più generale, in cui fossero fissati alcuni valori della funzione, e si volesse intercalare tra essi un certo numero di altri valori in modo che l' approssimazione riuscisse la massima possibile.

Questo problema è stato in seguito maestrevolmente trattato dal Sig. Christoffel. (***)

La soluzione che qui brevemente soggiungiamo ci sembra abbastanza semplice per non riuscire del tutto inutile.

(*) Methodus nova integral. valores per approxim. inveniendi. Comment. Soc. R. Scient. Gotting. recentiores. V. 3.

(**) Intorno all' uso de' compartimenti diseguali nella ricercha del val. numerico di un dato integr. Mem. dell' Istit. Veneto T. 3.

(***) Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. Crelle Journ. T. 55.

Riprendiamo l' equazione

$$\int_a^b \varphi(x)dx = k\varphi(a) + \frac{k^2}{\Pi(2)}\varphi'(a) + \dots + \frac{k^{p+2n}}{\Pi(p+2n)}\varphi^{(p+2n-1)}(a)$$

$$+\frac{k^{p+2n+1}}{\Pi(p+2n)}\int_0^1 dz.z^{p+2n}\varphi^{(p+2n)}(a+k-kz)$$

ove si è posto $b-a=k$, e quindi le altre

$$\varphi(a+\alpha_1 k) = \varphi(a) + \alpha_1 k\varphi'(a) + \dots + \frac{(\alpha_1 k)^{p+2n-1}}{\Pi(p+2n-1)}\varphi^{(p+2n-1)}(a)$$

$$+\frac{(\alpha_1 k)^{p+2n}}{\Pi(p+2n-1)}\int_0^1 dz.z^{p+2n-1}\varphi^{(p+2n)}(a+\alpha_1 k-\alpha_1 kz),$$

$$\varphi(a+\alpha_2 k) = \varphi(a) + \alpha_2 k\varphi'(a) + \dots + \frac{(\alpha_2 k)^{p+2n-1}}{\Pi(p+2n-1)}\varphi^{(p+2n-1)}(a)$$

$$+\frac{(\alpha_2 k)^{p+2n}}{\Pi(p+2n-1)}\int_0^1 dz.z^{p+2n-1}\varphi^{(p+2n)}(a+\alpha_2 k-\alpha_2 kz),$$

. . . .

$$\varphi(a+\alpha_{p+n} k) = \varphi(a) + \alpha_{p+n} k\varphi'(a) + \dots + \frac{(\alpha_{p+n} k)^{p+2n-1}}{\Pi(p+2n-1)}\varphi^{(p+2n-1)}(a)$$

$$+\frac{(\alpha_{p+n} k)^{p+2n}}{\Pi(p+2n-1)}\int_0^1 dz.z^{p+2n-1}\varphi^{(p+2n)}(a+\alpha_{p+n} k-\alpha_{p+n} kz).$$

Moltiplichiamo rispettivamente queste ultime per

$$-\lambda_1 k,\ -\lambda_2 k,\ \dots\ -\lambda_{p+n} k,$$

e sommiamole con la prima, otterremo

$$(44)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx = k\left\{\lambda_1\varphi(a+\alpha_1 k)+\lambda_2\varphi(a+\alpha_2 k)+\dots+\lambda_{p+n}\varphi(a+\alpha_{p+n}k)\right\}$$

$$+\sum_{r=1}^{r=p+2n}\frac{k^r}{\Pi(r-1)}\left\{\frac{1}{r}-\alpha_1^{r-1}\lambda_1-\alpha_2^{r-1}\lambda_2-\dots-\alpha_{p+n}^{r-1}\lambda_{p+n}\right\}\varphi^{(r-1)}($$

$$+\frac{k^{p+2n+1}}{\Pi(p+2n-1)}\left\{\frac{1}{p+2n}\int_0^1 dz.z^{p+2n}\varphi^{(p+2n)}(a+k-kz)\right.$$

$$-\alpha_1^{p+2n}\lambda_1\int_0^1 dz.z^{p+2n-1}\varphi^{(p+2n)}(a+\alpha_1 k-\alpha_1 kz)-\dots$$

$$\left.-\alpha_{p+n}^{p+2n}\lambda_{p+n}\int_0^1 dz.z^{p+2n-1}\varphi^{(p+2n)}(a+\alpha_{p+n}k-\alpha_{p+n}kz)\right\}$$

Ora supposto che la funzione $\varphi(x)$ si sviluppi in serie convergente, la prima linea esprimerà con tanto maggiore approssimazione il valore dell'integrale quanto più grande sarà il numero dei coefficienti delle successive potenze di k a partire dalla prima che si uguaglieranno a zero.

Se tutte le α e λ sono indeterminate potremo fare sparire $2p+2n$ di tali coeficienti, e perciò l'espressione

$$k\left\{\lambda_1\varphi(a+\alpha_1 k)+\lambda_2\varphi(a+\alpha_2 k)+\dots+\lambda_{p+n}\varphi(a+\alpha_{p+n}k)\right\}$$

darà evidentemente il valore esatto dell'integrale se il grado di $\varphi(x)$ non supera $2p+2n-1$; ma se p di quelle quantità sono assegnate, allora non si potranno annullare che $p+2n$ coefficienti, e quindi la suddetta espressione non darà il valore esatto che quando il grado di $\varphi(x)$ non sia maggiore di $p+2n-1$.

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ p valori dati e determiniamo le $p+2n$ quantità

$$\alpha_{p+1},\quad \alpha_{p+2},\quad \ldots\quad \alpha_{p+n},\quad \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \ldots\quad \lambda_{p+n}$$

in guisa da verificare le $p+2n$ equazioni

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{p+n}=1,\\ &\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_{p+n}\lambda_{p+n}=\frac{1}{2},\\ &\alpha_1^2\lambda_1+\alpha_2^2\lambda_2+\ldots+\alpha_{p+n}^2\lambda_{p+n}=\frac{1}{3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\alpha_1^{p+2n-1}\lambda_1+\alpha_2^{p+2n-1}\lambda_2+\ldots+\alpha_{p+n}^{p+2n-1}\lambda_{p+n}=\frac{1}{p+2n}. \end{aligned}\right.$$

A questo fine poniamo

$$(46)\qquad \theta(x)=A_0x^{p+n}+A_1x^{p+n-1}+\ldots+A_{p+n-1}x+A_{p+n},$$

e moltiplichiamo per $A_{p+n}, A_{p+n-1}, \ldots A_1, A_0$ rispettivamente

la $1.^a$ $2.^a$ $3.^a$ .... $(p+n+1)^{ma}$ delle (45),

e poi la $2.^a$ $3.^a$ $4.^a$ .... $(p+n+2)^{ma}$,

. . . .

e finalmente la $(n)^{ma}$, $(n+1)^{ma}$, ... $(p+2n)^{ma}$,

quindi sommando avremo

$$\theta(\alpha_1)\lambda_1+\theta(\alpha_2)\lambda_2+\dots+\theta(\alpha_{p+n})\lambda_{p+n}=\int_0^1\theta(x)dx,$$

$$\alpha_1\theta(\alpha_1)\lambda_1+\alpha_2\theta(\alpha_2)\lambda_2+\dots+\alpha_{p+n}\theta(\alpha_{p+n})\lambda_{p+n}=\int_0^1 x\theta(x)dx,$$

. . . .

$$\alpha_1^{n-1}\theta(\alpha_1)\lambda_1+\alpha_1^{n-1}\theta(\alpha_2)\lambda_2+\dots+\alpha_{p+n}^{n-1}\theta(\alpha_{p+n})\lambda_{p+n}=\int_0^1 x^{n-1}\theta(x)dx.$$

Evidentemente queste equazioni saranno soddisfatte se ammettiamo che la (46) abbia per radici le quantità date $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, e le quantità cercate $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots \alpha_{p+n}$, e di più che gl' integrali ne' secondi membri siano tutti nulli.

Per avere adunque i valori $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots \alpha_{p+n}$ tutta la quistione è ridotta a trovare un polinomio $\theta(x)$ di grado $p+n$ tale che gl' integrali

$$\int_0^1\theta(x)dx, \quad \int_0^1 x\theta(x)dx, \quad \dots \quad \int_0^1 x^{n-1}\theta(x)dx$$

siano uguali a zero, e di più esso si annulli per $x=\alpha_1, =\alpha_2, \dots =\alpha_p$.

È nota, e può facilmente trovarsi, la formola

$$\int x^m\theta(x)dx=x^m\int\theta(x)dx-x^{m-1}\int^{(2)}\theta(x)dx^2+m(m-1)x^{m-2}\int^{(3)}\theta(x)dx^3-\dots$$

$$+(-1)^m m(m-1)\dots 2.1.\int^{(m+1)}\theta(x)dx^{m+1},$$

dalla quale si scorge che gl' integrali superiori saranno nulli se tali

saranno

$$\int \theta(x)dx,\ \int^{(2)} \theta(x)dx^2,\ \ldots \int^{(n)} \theta(x)dx^n,$$

presi fra i limiti 0 e 1, e viceversa.

Si faccia

$$\int^{(n)} \theta(x)dx^n = \psi(x),$$

e la funzione $\Psi(x)$ dovrà insieme alle sue derivate successive sino alla $(n-1)^{ma}$ annullarsi per $x=0$ ed $x=1$.

A ciò si soddisfa prendendo

$$\Psi(x) = x^n (x-1)^n \varpi(x),$$

per cui

$$\theta(x) = D.^n x^n (x-1)^n \varpi(x),$$

e $\varpi(x)$ evidentemente deve essere di grado p, ed inoltre così fatta che $D.^n x^n (x-1)^n \varpi(x)$ si riduca a zero per $x=\alpha_1, =\alpha_2, \ldots = \alpha_p$.

Sia

$$\varpi(x) = B_o x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots\ldots + B_p,$$

e poniamo per brevità

7) $$C_\lambda(x) = D.^n x^{n+p-\lambda} (x-1)^n$$

avremo

8) $$\theta(x) = B_o . C_o(x) + B_1 . C_1(x) + \ldots\ldots + B_p . C_p(x)$$

Per determinare i coeficienti $B_o, B_1, \ldots B_p$ serviranno le equazioni:

$$0 = B_0 \cdot C_0(\alpha_1) + B_1 \cdot C_1(\alpha_1) + \ldots\ldots + B_p \cdot C_p(\alpha_1),$$

$$0 = B_0 \cdot C_0(\alpha_2) + B_1 \cdot C_1(\alpha_2) + \ldots\ldots + B_p \cdot C_p(\alpha_2),$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = B_0 \cdot C_0(\alpha_p) + B_1 \cdot C_1(\alpha_p) + \ldots\ldots + B_p \cdot C_p(\alpha_p).$$

Eliminando tra queste e la (48) B_0, $B_1, \ldots B_p$, si otterrà, facendo astrazione da un fattore costante.

$$(49) \qquad \theta(x) = \begin{vmatrix} C_0(x) & C_1(x) & \ldots\ldots & C_p(x) \\ C_0(\alpha_1) & C_1(\alpha_1) & \ldots\ldots & C_p(\alpha_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0(\alpha_p) & C_1(\alpha_p) & \ldots\ldots & C_p(\alpha_p) \end{vmatrix} = 0$$

Trovata così l'equazione che à per radici oltre le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ le quantità cercate $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2} \ldots \alpha_{p+n}$, le prime $p+n$ equazioni delle (45) ci daranno i fattori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{p+n}$. Esse risolute col metodo insegnato da Lagrange (*) forniscono per un' incognita qualunque λ_s un valore che si pone facilmente sotto la forma

$$(50) \qquad \lambda_s = \frac{1}{\theta'(\alpha_s)} \int_0^1 \frac{\theta(x)}{x - \alpha_s}\, dx.$$

Riflettendo all'espressione (47) della funzione $C_\lambda(x)$ si vede subito che posto

$$V = \frac{d^{pn}}{d\alpha_1^n \, d\alpha_2^n \ldots d\alpha_p^n} \cdot \left\{ \alpha_1(\alpha_1 - 1)\alpha_2(\alpha_2 - 1) \ldots \alpha_p(\alpha_p - 1) \right\}^n \begin{vmatrix} x^p & x^{p-1} & \ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1^p & \alpha_1^{p-1} & \ldots\ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_p^p & \alpha_p^{p-1} & \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix}$$

(*) Mém. de l' Acad. de Berlin. An. 1775 et 1792. V. Baltzer Theorie und Anwendung der Determinanten p. 53.

ossia

$$(51)\qquad V=\frac{d^{pn}}{d\alpha_1^n d\alpha_2^n \ldots d\alpha_p^n}\cdot\left\{\alpha_1(\alpha_1-1)\alpha_2(\alpha_2-1)\ldots\alpha_p(\alpha_p-1)\right\}^n \Pi(\alpha_p,\alpha_{p-1},\ldots\alpha_1,x),$$

ove

$$\begin{aligned}\Pi(\alpha_p,\alpha_{p-1},\ldots\alpha_1,x)=(\alpha_{p-1}-\alpha_p)\,(\alpha_{p-2}-\alpha_p)\,(\alpha_{p-3}-\alpha_p)\,\ldots\ldots\,&(x-\alpha_p)\\ (\alpha_{p-2}-\alpha_{p-1})\,(\alpha_{p-3}-\alpha_{p-1})\,\ldots\ldots\,&(x-\alpha_{p-1})\\ (\alpha_{p-3}-\alpha_{p-2})\,\ldots\ldots\,&(x-\alpha_{p-2})\\ \ddots\quad&\vdots\\ &(x-\alpha_1)\,,\end{aligned}$$

l'equazione (49) si può scrivere così:

$$(52)\qquad \theta(x)=D_x^n x^n(x-1)_x^n V=0.$$

Se V è reale o può divenir reale moltiplicata per un fattore costante, applicando il teorema di Rolle, si deduce che, avendo l'equazione

$$x^n(x-1)^n V=0$$

n radici uguali a 0 ed n uguali all'unità, la (52) à necessariamente almeno n radici reali comprese fra questi limiti, e perciò se le quantità date $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ sono fuori di essi, le n cercate sono tutte reali, positive e minori dell'unità.

Se poi le radici di $V=0$ sono tutte reali, anche le radici della (52) saranno tutte reali, e il numero di quelle fuori dei limiti 0 ed 1 è in ambedue lo stesso.

La (47), sviluppando $(x-1)^n$, ed eseguendo le derivazioni, ci dà

$$(53)\qquad C_\lambda(x)=\Pi(n)\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r(n)_r(2n+p-\lambda-r)_n x^{n+p-\lambda-r},$$

e per facili riduzioni si à anche

$$(54)\qquad C_\lambda(x)=\Pi(n)\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r(n+p-\lambda)_r(2n+p-\lambda-r)_{n-r}\,x^{n+p-\lambda-r}$$

Applicando invece la formola di Leibnitz per effettuare la derivata $(n)^{ma}$ del prodotto nel 2.° membro della (47) verrà

$$(55)\qquad C_\lambda(x)=\Pi(n)\sum_{r=0}^{r=n}(n)_r(n+p-\lambda)_{n-r}\,x^{p-\lambda+r}(x-1)^{n-r}.$$

Se si fa $p=0$ si ritorna al caso trattato da Gauss; e le radici $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots\alpha_n$ saranno date dall'equazione

$$D^n.\,x^n\,(x-1)^n=0.$$

Se poi prendiamo $p=2$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ abbiamo il caso considerato dal Prof. Turazza, e siccome allora

$$C_0(x)=D.^n x^{n+2}(x-1)^n,\quad C_1(x)=D.^n x^{n+1}(x-1)^n,\quad C_2(x)=D.^n x^n(x-1)^n,$$

$$C_0(0)=0,\qquad C_1(0)=0,\qquad C_2(0)=\Pi(n).(-1)^n,$$

$$C_0(1)=\Pi(n),\qquad C_1(1)=\Pi(n),\qquad C_2(1)=\Pi(n),$$

l'equazione (49) che fornirà i valori di, $\alpha_3,\ \alpha_4,\dots\alpha_{n+2}$ si riduce a

$$(56)\qquad C_0(x)-C_1(x)=0$$

ossia

$$D^n.\,x^{n+1}(x-1)^{n+1}=0,$$

che evidentemente contiene anche le due radici $x=0, x=1$.

Ponendo nella (56) per $C_0(x)$ e $C_{\cdot 1}(x)$ i valori che si deducono dalla (54) per $p=2$, avremo

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \left\{ (n+2)_r (2n-r+2)_{n-r}\, x - (n+1)_r (2n-r+1)_{n-r} \right\} x^{n-r+1} = 0,$$

ossia

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r (n+2)_r (2n-r+2)_{n-r+1} x^{n-r+2} = 0.$$

Dividendo per $(2n+2)_{n+1}\, x\,(x-1)$ si otterrà

(57) $$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n = 0,$$

ove si è posto

$$A_q = \frac{1}{(2n+2)_{n+1}} \sum_{k=0}^{k=q} (-1)^k (n+2)_k (2n-k+2)_{n-k+1},$$

ossia

(58) $$A_q = \sum_{k=0}^{k=q} (-1)^k \frac{(n+1)_k (n+2)_k}{(2n+2)_k}$$

Il valore di questa somma si ottiene facilmente, anche per induzione, e si trova

(59) $$A_q = (-1)^q \frac{(n)_q (n+1)_q}{(2n+2)_q},$$

il quale risultato si accorda con quello ottenuto dal Prof. Turazza.

Se nell' equazione (56) si pongano invece per $C_0(x)$ e $C_1(x)$ i valori tratti dalla (55), e poscia si tolga il fattore evidente $x(x-1)$ e si sviluppi, si à

$$x_n - \ldots + (-1)^q \frac{1}{(2n+2)_n} \cdot \frac{n-q+2}{q} \sum_{h=0}^{h=n-q} (n)_h (n+1)_{n-h-1} (n-h-1)_{q-1} \cdot x^{n-q} + \ldots = 0$$

la quale deve conicidere con la (57) e perciò se ne conchiude

$$\frac{1}{(2n+2)_n} \cdot \frac{n-q+2}{q} \sum_{h=0}^{h=n-q} (n)_h (n+1)_{n-h-1} (n-h-1)_{q-1} = \frac{(n)_q (n+1)_q}{(2n+2)_q},$$

ossia dopo alcune semplici riduzioni

$$(60) \qquad \sum_{h=0}^{h=n-q} (n)_h (n+1)_{h+2} (n-h-1)_{q-1} = (n+1)_{q-1} (2n-q+2)_{n-q}.$$

Le uguaglianze (59) e (60) non credo siano state da altri avvertite.

	ERRORI	CORREZIONI
Pag. 24 *lin.* 3 *di fondo.*	nella formola (19) e $\frac{\omega}{4}$ nelle	nelle formole
Pag. 25 *lin.* 1.	$-\frac{1}{48}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$	$-\frac{1}{12}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$
« *lin.* 2.	$+\frac{1}{96}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$	$+\frac{1}{24}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$
« *lin.* 3.	$-\frac{1}{192}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$	$-\frac{1}{48}\omega^2\left\{\varphi'(b)-\varphi'(a)\right\}$
« *lin.* 4.	$+\frac{1}{768}\omega^3\left\{\varphi''(b)+\varphi''(a)\right\}$	$+\frac{1}{96}\omega^3\left\{\varphi''(b)+\varphi''(a)\right\}$

Königliches Gymnasium zu Köslin.

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht 1909.

Die Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten in der Gymnasialprima.

Von

Professor Dr. **Joh. Thiede.**

Köslin 1909.
Gedruckt bei C. G. Hendess.

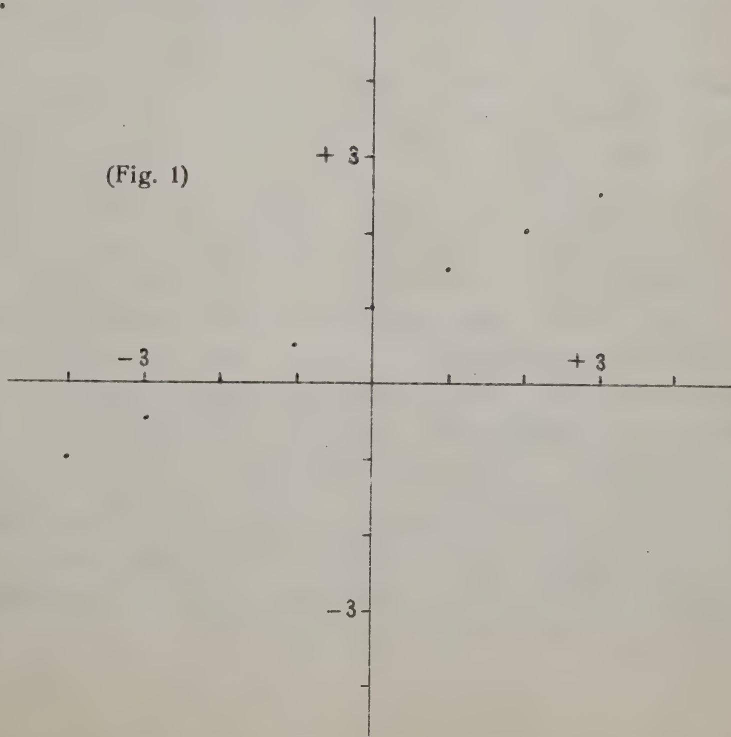
1909. Progr.-No. 199.

Die moderne Forderung, sich im Unterrichte der Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten anzunehmen, tritt immer energischer auch an das Gymnasium heran. Und ich glaube, dass dies bei nicht übertriebenen Ansprüchen, nämlich bis zur Herausbildung der wichtigen Grundvorstellungen, wohl angängig ist. Es soll im Folgenden ein Gedankengang vorgeführt werden, welcher, entsprechend einer naheliegenden Auffassung, den neuen Stoff mit den in der Prima ohnehin zu behandelnden Elementen der analytischen Geometrie verflochten enthält.

I.

1. Es wird zuerst die graphische Darstellung algebraischer Ausdrücke geübt. Dabei erscheint es mir didaktisch empfehlenswert, damit der Anfänger klar und einfach den algebraischen Ausdruck für sich als die Funktion auffassen lernt, die Form der sogenannten Funktionsgleichung, wie $y = x + a$, zu Anfang nicht in Gebrauch zu nehmen. Erst allmählich mag zu den abkürzenden Zeichen $f(x)$ und y übergegangen werden. — Die Grösse x wird als „unabhängige variable Grösse" eingeführt, die Funktion als „abhängige variable Grösse"; jedem Wert der unabhängigen Variablen entspricht ein Wert der Funktion. Ein solches Wertepaar in algebraischem Sinne bedeutet einen Punkt in der geometrischen Zeichnung; „Abscissenachse", „Ordinatenachse". — Das Verfahren, neben die Figur jedesmal die Berechnung der Werte in Form einer Tabelle zu setzen, ist für die Schüler durchaus zweckmässig. Es sei erlaubt, hier ein Beispiel herzusetzen, weil sich auf das benutzte Schema später ein anderes gründen soll.

x	$\frac{1}{2}x + 1$
$0 \rightarrow$	$+1$
-2	$\leftarrow 0$
$-\infty$	$-\infty$
.	.
.	.
.	.
-4	-1
-3	$-\frac{1}{2}$
-1	$+\frac{1}{2}$
$+1$	$+1\frac{1}{2}$
$+2$	$+2$
$+3$	$+2\frac{1}{2}$
.	.
.	.
.	.
$+\infty$	$+\infty$



(Fig. 1)

Durch die Zeichnung von Ausdrücken wie $\pm x \pm 1$, $\pm 2x \pm 3$, $\pm \frac{3}{4} x \pm 2$ kommen die Schüler induktiv zu der Erkenntnis, dass die linearen algebraischen Ausdrücke in der Zeichnung geraden Linien entsprechen. Und leicht finden sie die folgenden „Sätze“: Ist die unabhängige Variable 0, so ergibt der zugehörige Funktionswert den Schnittpunkt auf der Ordinatenachse, ist die Funktion 0, so ergibt der zugehörige Wert der unabhängigen Variablen den Schnittpunkt auf der Abscissenachse. Es soll nun die Behandlung einer Funktion grundsätzlich mit diesen Fragen beginnen, wie das in der obigen Tabelle bereits angedeutet ist.

Zugleich erkennen die Schüler die Bedeutung der dabei auftretenden konstanten Grössen. Ist ihnen der „Richtungswinkel“ definiert, sind in dem allgemeinen Ausdruck $tg\alpha \cdot x + b$ $tg\alpha$ als „Richtungskonstante“, b als „Punktkonstante“ eingeführt, so können sie eine weitere Erkenntnis in die Worte fassen: Stimmen lineare ganze Funktionen in den Richtungskonstanten überein, so stellen sie eine Schar von parallelen Geraden dar; stimmen sie in der Punktkonstante überein, so bedeuten sie ein Büschel von Geraden, die durch denselben Punkt der Ordinatenachse gehen. — Ferner muss ihnen auf grund ihrer trigonometrischen Kenntnisse bewusst werden: Ist die Richtungskonstante positiv, so ist der Richtungswinkel spitz, ist sie negativ, so ist er stumpf. Auf grund dieser Erkenntnisse vermögen sie nun hinterher einen Ausdruck von der Form $tg\alpha \cdot x + b$ ohne jenes Schema, direkt unter dem Bewusstsein zu zeichnen, dass durch die Richtung und einen Punkt die gerade Linie vollständig bestimmt ist. — Dieses soll vorläufig für die Funktion der geraden Linie genügen.

2. Es kommen nun Ausdrücke von folgenden Formen zur Darstellung: x^2, x^3, $x^2 - 3x$ (ganze Funktionen), x^{-3}, x^{-1}, $\frac{x+4}{2x}$ (gebrochene Funktionen); $x^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{9 - x^2}$, $2\sqrt{25 - x^2}$, $\sqrt{2x + x^2}$ (irrationale Funktionen). Hier wäre wohl auch der Platz, die durch die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $tg x$, $ctg x$ ausgedrückten Kurven zeichnen zu lassen, — wofern die Zeit es gestattet. Praktische Anwendungen, wie z. B. Temperaturkurven brauchen den Schülern zur eigenen Zeichnung nicht vorgelegt zu werden; den Sinn und den Wert solcher Darstellungen übersehen sie ohne weiteres, wenn ihnen dergleichen bei dieser Gelegenheit aus Büchern fertig vorgezeigt wird. Und zwar sind in dieser Beziehung besonders lehrreich die Kurven, welche die säkularen Variationen der Häufigkeit der Sonnenflecken, der Häufigkeit der Polarlichter und der Tagesschwankungen des Erdmagnetismus in einer übersichtlichen Zusammenstellung zum Ausdruck bringen. — Überhaupt sollte im Sinne unseres Zieles nicht durch eine grosse Anzahl graphischer Darstellungen viel Zeit verbraucht werden. Es soll nur zur Einführung durch das jedesmalige Nebeneinandersetzen der Wertetabelle und der Zeichnung der gesetzmässige Zusammenhang eines algebraischen Ausdrucks und einer bestimmten Kurve zu einem Verständnis kommen. Und wichtig ist dabei sodann dieses, dass nach der Vollendung der Zeichnung immer, wie zu einer Zusammenfassung, die Funktion „diskutiert“, der Verlauf der Kurve für alle Werte der Variablen von $-\infty$ bis $+\infty$ verfolgt wird; dabei gelangen die Begriffe des Steigens und Fallens, des Maximums und Minimums, der imaginären Funktionswerte, der Begrenztheit oder Unbegrenztheit der Kurven zu einer Behandlung.

II.

Durch die Übungen bis hierher ist nun ein Interesse, vielleicht ein Bedürfnis für eine Umkehrung des Gedankenganges geweckt: Welche Funktion bringt eine Kurve von vorgeschriebener Eigenschaft zum Ausdruck, so dass dieselbe konstruiert werden kann?

1. Es seien zwei feste Punkte im Abstande $2e$ gegeben und dazu ein dritter Punkt. Für den letzteren hat die Summe seiner Abstände von den beiden ersten eine bestimmte Grösse: $r_1 + r_2 = 2a$. Und es wird noch mehr Punkte geben, für welche diese Grösse dieselbe ist. Es sei nun gefragt: Wie reihen sich diese Punkte zu einer Kurve zusammen? Zur Beantwortung der Frage werde — nachdem zuerst noch festgestellt ist, dass stets $2a > 2e$ — die Abscissenachse durch die beiden festen Punkte und die Ordinatenachse durch den Halbierungspunkt ihrer Verbindungsstrecke gelegt; so bedeutet die von unserm Punkte auf die erstere Achse gefällte Senkrechte den Funktionswert, welcher zu dem bis zu ihrem Fusspunkte gerechneten Werte von x gehört. Derselbe werde jetzt mit y bezeichnet und unter Verwertung der charakteristischen Gleichung $r_1 + r_2 = 2a$ aus x, a und e berechnet. Es ergibt sich dann unter der Einführung $a^2 - e^2 = b^2$ die Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

woraus sich die gesuchte Funktion $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ findet. Mit der Diskussion derselben soll nun eine Konstruktion wesentlicher Punkte der Kurve verbunden werden, — dieses Entstehensehen der Figur aus dem algebraischen Ausdruck möchte ich als besonders wichtig für die Schüler betonen —, also aus den gegebenen Stücken e und a; sie findet sich für die Schüler übersichtlich unter Anlehnung an das Schema:

x	f (x)
$0 \rightarrow$	$\pm b$
$\pm a$	$\leftarrow 0$
$\left.\begin{matrix} < -a \\ > +a \end{matrix}\right\}$	i...
$\pm e$	$\frac{b^2}{a}$ [= „p"! (Parameter.)

In der Wurzel liegt eine Symmetrie der Kurve gegen die X-Achse, in dem Gliede x^2 eine Symmetrie gegen die Y-Achse begründet. Beim Wachsen der Grösse x vom Werte 0 nach einer der beiden Richtungen bis auf die absolute Grösse a nimmt der Radikandus bis auf 0 ab und fällt die Funktion stetig, abgesehen vom Vorzeichen, von b auf 0. Die so entstandene und beschriebene Kurve heisst Ellipse.

Erst hiernach wäre die Fadenkonstruktion vorzuführen und die unmittelbar aus der Definition sich ergebenden Punktkonstruktionen zu berühren. Dann sind aber nach der Einführung des Begriffes der Excentricität einige Ellipsen aus zwei der Grössen a, b, e, ε mit jenen acht wichtigsten Punkten, bei $x = 0$, $x = \pm a$ und $x = \pm e$ zu konstruieren, — oder aus ε allein der Gestalt nach.

2. Es sei weiter ein fester Punkt und dazu im Abstande a ein zweiter Punkt gegeben; welche Funktion stellt den Ort aller der Punkte dar, welche mit dem letzteren von dem festen Punkte denselben Abstand a haben? Es ergibt sich die „Mittelpunktsgleichung“ $x^2 + y^2 = a^2$ und die Funktion $\sqrt{a^2 - x^2}$, deren Diskussion wie bei der Ellipse verläuft, von welcher die vorliegende Kurve, der Kreis, ein spezieller Fall ist: $b = a$! —

Durch Vergleichung der beiden Funktionen $\sqrt{a^2 - x^2}$ und $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, welche einen Kreis und eine Ellipse über derselben grossen Achse 2a darstellen, ergibt sich, dass für ein jedes bestimmt gewählte x der zugehörige Funktionswert der Ellipse den Bruchteil $\frac{b}{a}$ von demjenigen des Kreises ausmacht. Hierauf gründet sich eine weitere Konstruktion von Punkten der Ellipse und ferner die Berechnung ihrer Fläche, gleich πab.

3. Es sei wiederum zu zwei um die Strecke 2e von einander entfernten festen Punkten ein dritter Punkt gegeben, und es werde jetzt der Ort aller derjenigen Punkte gesucht, welche mit dem ersten die Bedingung $r_1 - r_2 = 2a$ erfüllen; — es ist in dieser Forderung zugleich die Bedingung $2a < 2e$ enthalten. Es ergibt sich, wenn wieder y aus a, e und x berechnet wird, unter Einführung der Bedingung $e^2 - a^2 = b^2$ die Gleichung

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} = 1$$

und damit die Funktion $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Die Diskussion derselben — welche wieder mit einer Konstruktion wesentlicher Punkte der Kurve aus a und e zu begleiten ist — ergibt sich wieder für die Schüler bequem unter Anlehnung an das Schema:

x	f (x)
$0 \rightarrow$	i...
$\pm a$	$\leftarrow 0$
$\left.\begin{matrix} < +a \\ > -a \end{matrix}\right\}$	i...
$\pm e$	$\pm \frac{b^2}{a}$ $\Big[=$ „p“!

Sodann ist wiederum mit der Quadratwurzel und dem Gliede x^2 eine doppelte Symmetrie der Kurve gegen die beiden Achsen begründet. Beim Wachsen von x vom Werte a bis ∞ wächst der Radikandus und damit die Funktion beständig, bis ins Unendliche. — Bei der Konstruktion des Funktionswertes für $x = \pm e$ war b aus $b^2 = e^2 - a^2$ zu konstruieren, was am schnellsten unter Benutzung des rechten Winkels zwischen den Achsen geschieht. Es entsteht so, entsprechend wie bei der Ellipse, eine Nebenachse 2b der Kurve, die als „imaginäre Achse“ bezeichnet wird und unmittelbar mit den Punkten derselben nichts gemein hat. Dieselbe hat aber trotzdem zu dem Verlauf unserer Kurve eine charakteristische Beziehung. Wie nämlich bei der Ellipse die Parallelen durch die Endpunkte von 2a und 2b zu diesen Achsen

selbst ein Rechteck bestimmen, welches mit seinen Seiten die Ellipse umschliesst, indem diese zu Scheiteltangenten derselben werden, so entsteht für unsere neue Kurve auf dieselbe Weise ein Rechteck, bei welchem jetzt die Diagonalen etwas Aehnliches leisten. — Die Funktionen, welche diese letzteren darstellen, werden als $\pm \frac{b}{a} x$ oder $\frac{b}{a} \sqrt{x^2}$ ohne weiteres erkannt; und da nun beim Vergleich derselben mit unserer Funktion $\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ bei einem bestimmten x sich jedesmal der zugehörige Funktionswert für die Kurve kleiner als für die Diagonale zeigt, jedoch diese Differenz bei wachsendem x abnimmt und für $x = \infty$ verschwindet, so ergibt sich damit eine eigenartig bestimmte Lage der Kurve zu den Diagonalen des Rechtecks aus 2a und 2b; ihre beiden Aeste verlaufen nämlich ganz innerhalb des einen Scheitelwinkelpaares dieser Diagonalen, denen sie sich nach einer stärkeren Krümmung beim Scheitel gewissermassen anzuschmiegen trachten. So ergibt sich die Bezeichnung der letzteren als Begleitenden oder Asymptoten. — Die so gefundene und beschriebene Kurve heisst eine Hyperbel.

Es lassen sich jetzt nach der Einführung des Begriffes der Excentricität aus zwei der Grössen a, b, e u. ε die Begleitenden und sechs wichtige Punkte der Kurve, bei $x = \pm a$ und $x = \pm e$, konstruieren und damit ihr wesentlicher Verlauf übersehen. Für die Schüler ist es eine aufklärende Uebung, hiernach bei einem Rechteck aus 2 a und 2 b einmal die dadurch bestimmte Ellipse und dann die Hyperbel zu konstruieren; ebenso zweckdienlich dürfte die Aufgabe sein, über einer gegebenen Strecke 2a derartige Kurven mit den Excentricitäten 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ . . . zeichnen zu lassen. Die Schüler kommen so zu der Erkenntnis: Bei wachsender Excentricität und übrigens unverändert bleibender Hauptachse sinkt die Ellipse von Kreisform zur Geraden zusammen und weitet sich die Hyperbel von einer Geraden zum gestreckten Winkel, in jedem ihrer Äste.

4. Es seien für eine neue Kurve eine Gerade und ein Punkt im festen Abstande p gegeben; dazu soll ein zweiter Punkt so gewählt werden, dass er von der Geraden und dem festen Punkte gleichweit entfernt ist. Es soll die Kurve, in welchen sich Punkte dieser Eigenschaft aneinanderreihen, durch die Aufstellung ihrer Funktion und deren Diskussion festgestellt werden. Es findet sich bei der bekannten Wahl des Koordinatensystems die „Scheitelgleichung" $y^2 = 2px$ oder die Funktion $\sqrt{2px}$. Bei ihrer Diskussion und gleichzeitigen Zeichnung zeigt sich, dass es für negative x keine Punkte der Kurve gibt, dass für $x = 0$ auch der Funktionswert 0 wird — sodass die Y-Achse zur „Scheiteltangente" wird —, dass beim Wachsen von x zwei gegen die Abscissenachse symmetrisch verlaufende Zweige sich bilden, wobei die Funktion, absolut genommen, bis ins Unendliche wächst und dass bei $x = \frac{p}{2}$ der Wert $y = \pm p$ wird. So sind ausser dem Scheitel zunächst noch zwei Punkte, die Endpunkte des „Parameters", bestimmt. Aus der Form $y^2 = 2px$ ergibt sich, dass bei einem beliebig gewählten x der zugehörige Funktionswert die mittlere Proportionale zwischen eben diesem x und 2p ist; hierauf gründet sich eine Konstruktion von Punkten unserer Kurve, der „Parabel". Dieselbe ist offenbar durch die einzige

Grösse p vollständig bestimmt. Die Funktion wächst nur proportional der Quadratwurzel aus der unabhängigen Variablen. — Hiernach können andere, unmittelbar aus der Definition hervorfliessende Punktkonstruktionen erörtert werden.

5. Zum Schlusse ist jetzt auch die Funktion, welche die gerade Linie darstellt, noch einmal allgemein zu entwickeln. Eine Gerade ist bestimmt durch einen Punkt und ihre Richtung oder durch zwei Punkte.

Ist der Punkt (0,b) und der Richtungswinkel α gegeben, so stellt sich ihre Funktionsgleichung, wenn man wieder zu einem beliebigen x das zugehörige y sucht, unter der Form dar: $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$.

Ist der Punkt $(x_1\, y_1)$ und der Richtungswinkel α gegeben: $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot (x - x_1) + y_1$.

Sind zwei Punkte $(x_1\, y_1)$ und $(x_2\, y_2)$ gegeben, so ist $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ mitgegeben, und es wird

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Die letzten beiden Formeln sind mit einigen Zahlenbeispielen einzuüben.

III.

Es kommt nun einiges Zusammenfassende über die neuen Kurven zur Behandlung.

1. Lässt man durch Verlegung der Ordinatenachse die Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und der Hyperbel in die Form der Scheitelgleichungen übergehen, so erhält man

für die Parabel $y^2 = 2px$,

für die Ellipse $y^2 = 2px - \dfrac{p}{a}x^2$,

für die Hyperbel $y^2 = 2px + \dfrac{p}{a}x^2$,

woraus sich die Erklärung der Namen herleitet.

Sodann ist die gemeinsame Bezeichnung als Kegelschnitte an einem Modell zu erklären und wenigstens für eine von den Schnittlinien der geometrische Nachweis zu liefern, — es muss für die Verhältnisse am Gymnasium ja unausgesetzt Bedacht genommen werden, wie Zeit zu gewinnen ist — dass sie die in der Definition geforderte Eigenschaft hat.

2. Werden die Koordinatenachsen für unsere Kurven durch Parallelverschiebung in solche Lage gebracht, dass der Mittelpunkt, bezw. bei der Parabel der Scheitel durch die Koordinaten (a′, b′) gegeben ist, so nehmen die Gleichungen die Form an

für die Parabel $(y - b')^2 = 2p\,(x - a')$,

für die Ellipse $\dfrac{(x - a')^2}{a^2} + \dfrac{(y - b')^2}{b^2} = 1$,

für den Kreis $(x - a')^2 + (y - b')^2 = a^2$,

für die Hyperbel $\dfrac{(x - a')^2}{a^2} - \dfrac{(y - b')^2}{b^2} = 1$.

Hier sind einige Aufgaben der bekannten Art aus den Aufgabensammlungen anzuschliessen, bei welchen aus den gegebenen Zahlen der Gleichungen auf die Lage der Kurven und die Grösse ihrer Achsen zu schliessen ist und dieselben zu konstruieren sind.

3. Speziell für die Hyperbel, die bei den graphischen Darstellungen mehrfach aus gebrochenen Funktionen gewonnen wurde, ist — wofern die Zeit es gestattet — zu wünschen, dass auch ihre Asymptotengleichung zur Besprechung kommt. Es ist auch die dabei eröffnete Aussicht auf die Möglichkeit der Benutzung schiefwinkliger Koordinatensysteme nicht wertlos.

Ist der Winkel zwischen den Asymptoten 2φ und sind die Koordinaten eines Punktes in Bezug auf das neue System mit x' und y' bezeichnet, so ergibt sich

$$x = x' \cos\varphi + y' \cos\varphi$$
$$y = x' \sin\varphi - y' \sin\varphi$$

oder, wenn beachtet wird, dass $\cos\varphi = \frac{a}{e}$, $\sin\varphi = \frac{b}{e}$:

$$x = (x' + y')\,\frac{a}{e}$$
$$y = (x' - y')\,\frac{b}{e}\,.$$

Dies in der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel eingesetzt, ergibt:

$$b^2(x'^2 + 2x'y' + y'^2)\cdot\frac{a^2}{e^2} - a^2(x'^2 - 2x'y' + y'^2)\cdot\frac{b^2}{e^2} = a^2b^2, \text{ oder}$$
$$4x'y' = e^2$$
$$y = \frac{e^2}{4}\cdot x^{-1}.$$

Ist in speziellem Falle die Hyperbel „gleichseitig“, $a = b$, so bilden auch die Asymptoten ein rechtwinkliges Achsenpaar, und es ist $e^2 = 2a^2$:

$$y = \frac{a^2}{2}\cdot x^{-1}.$$

Hiermit ist dann also dieselbe Kurve ausgedrückt, die — wie bisher — auf ihre eigenen Achsen als Koordinatenachsen bezogen die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ bezw. die Funktion $\sqrt{x^2 - a^2}$ liefert, — jedoch in einer neuen Lage, nämlich um 45^0 gedreht.

Ist wiederum in speziellem Falle die Halbachse $a = \sqrt{2}$, so ergibt sich eine gleichseitige Hyperbel von der Funktion x^{-1}.

So erhalten die Schüler in einem einzelnen Beispiele einen Einblick in den Zusammenhang einiger der zuallererst mechanisch mit Hülfe von Wertepaaren konstruierten Ausdrücke, nämlich der gebrochenen Funktionen, mit den hinterher systematisch entwickelten Funktionen. —

Nebenher kann hier aus der obigen Gleichung $xy = \frac{e^2}{4}$ der Satz von der Konstanz des Inhalts der durch die einzelnen Hyperbelpunkte und die Asymptotenrichtungen bestimmten Parallelogramme hergeleitet werden.

4. Wird mit dem Ausdruck $y = \sqrt{2px}$ der andere $y = \sqrt{-2px}$ verglichen, so bedeutet derselbe offenbar eine zur ersteren symmetrisch liegende Parabel, mit der Öffnung zum negativen Unendlichen der X-Achse hin. Entsprechend bedeuten

$\sqrt{2py}$ und $\sqrt{-2py}$ dieselbe Parabel in abermals neuen Lagen, nämlich solchen, bei denen ihre Achse mit der Y-Achse zusammenfällt, und zwar das erstere Mal mit der positiven, das andere Mal mit der negativen Richtung derselben. Hier ist jetzt y als die unabhängige Variable und x als die abhängige, als die Funktion betrachtet.

Es sind die vier Parabeln unter bestimmter Grösse von p zu konstruieren.

5. Entwickelt man aus der Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ nicht y als Funktion von x, nämlich: $y = \sqrt{2px}$, sondern umgekehrt x als Funktion von y: $x = \frac{1}{2p} \cdot y^2$, so ist hiermit dieselbe Parabel dargestellt; es sind in diesem Falle nur zuerst auf der Y-Achse bestimmte Werte von y abgetragen zu denken und dann in der Richtung senkrecht hierzu jedesmal der zugehörige Wert von x als Funktionswert. Die beiden Funktionen stellen dieselbe Kurve dar, sie sind aber von verschiedener Art, die neue nämlich ist rational, während die frühere irrational war. Entsprechend geht die Funktion $y = \sqrt{-2px}$ in die Form über: $x = -\frac{1}{2p} \cdot y^2$.

Denken wir nun an die beiden anderen obigen Parabeln $x = \sqrt{2py}$, und $x = \sqrt{-2py}$, so nehmen diese jetzt die Form an: $y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$ und $y = -\frac{1}{2p} \cdot x^2$. Soll dann zum Schluss x als unabhängige Veränderliche überall festgehalten werden, so haben wir mit den Funktionen $\sqrt{2px}$, $\sqrt{-2px}$, $\frac{1}{2p}x^2$, $-\frac{1}{2p}x^2$ dieselbe Parabel in vier verschiedenen, bestimmten Lagen ausgedrückt.

6. Derselbe Gedanke werde nun für die allgemeinere Form der Parabelgleichung durchgeführt, bei welcher der Scheitel durch die Koordinaten a und b bestimmt ist! Die beiden Gleichungen

$$(y - b)^2 = 2p(x - a) \text{ und}$$
$$(y - b)^2 = 2p(a - x)$$

liefern zunächst die Funktionen

$$1)\ y = \sqrt{2p(x-a)} + b \text{ und}$$
$$2)\ y = \sqrt{2p(a-x)} + b.$$

Entsprechend lauten die Gleichungen für die Lage der Parabel mit der Achse parallel zur Y-Achse:

$$(x - a)^2 = 2p(y-b) \text{ und}$$
$$(x - a)^2 = 2p(b-y).$$

Und diese liefern die Funktionen:

$$3)\ y = \frac{1}{2p} x^2 - \frac{a}{p} x + \frac{a^2}{2p} + b \text{ und}$$
$$4)\ y = -\frac{1}{2p} x^2 + \frac{a}{p} x - \frac{a^2}{2p} + b.$$

Wiederum ist hier die Parabel in der neuen Lage durch eine rationale Funktion ausgedrückt.

Das Charakteristische bei allen Ausdrücken für die Parabel bleibt dieses, dass die eine der beiden variablen Grössen nur linear, die andere quadratisch oder unter einer Quadratwurzel auftritt. Es wächst eben die Parabel in der Dimension parallel zur Achse quadratisch im Verhältnis zu der hierzu senkrechten Dimension.

Die neue Funktion kann in allgemeinen Zeichen geschrieben werden:

$$c\,x^2 + dx + e, \text{ wobei } c = \pm \frac{1}{2p}.$$

Hier müssen die Schüler beachten und merken, dass das Vorzeichen des quadratischen Gliedes einer derartigen Funktion darüber entscheidet, ob die Oeffnung der Kurve in die positive oder in die negative Richtung der Y-Achse gewendet ist, und dass der absolute Wert des Koefficienten dieses Gliedes den reciproken Wert des Parameters angibt. — Die andern konstanten Grössen der gegebenen Funktion gestatten, die Koordinaten a und b des Scheitels zu bestimmen; sie bleiben aber, damit nicht das Gedächtnismaterial unnötig anwächst, besser unbenutzt, da der Scheitel anders — siehe das folgende Beispiel! —, besonders auch als Maximum oder Minimum bestimmt werden kann, — siehe Beispiel 5 im Schlusskapitel!

Jedenfalls ist mit diesen ganzen rationalen Funktionen wieder eine Anknüpfung an frühere graphische Darstellungen erzielt, und zugleich ist die Grundlage für ein Verständnis weiterer Uebungen gelegt. Es soll — um ein bestimmtes Beispiel zu behandeln — die Lage der Parabel $x^2 + 2x - 8$ bestimmt werden! Das quadratische Glied hat positives Vorzeichen, also liegt die Oeffnung der Parabel nach der positiven Richtung der Y-Achse hin gewendet. Die Funktion verschwindet für $x_1 = 2$ und $x_2 = -4$; und hiermit müssen zwei Punkte symmetrisch zur eigenen Achse der Parabel bestimmt sein; sodass ihre Achse in der Mitte zwischen ihnen verläuft und durch $x = -1$ bestimmt ist. Der Scheitel hat jetzt also die Koordinaten $-1, -9$. Wird auf diese Achse nun einer jener beiden Schnittpunkte der X-Achse bezogen, so ist sein Abstand von derselben $y = 3$, und gemäss der Parabelgleichung $y^2 = 2p\,x$ entsteht $3^2 = 2p \cdot 9$ oder $2p = 1$, d. h. der Parameter ist gleich 1, was auch aus jener obigen Bestimmung hervorgeht, da der Koeffizient des quadratischen Gliedes in unserem Beispiel 1 ist: $1 = \frac{1}{2p}$, $2p = 1$! Nun ist also $p = \frac{1}{2}$, $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}$. So hat der Brennpunkt die Koordinaten $-1, -8\frac{3}{4}$; die Gleichung der Leitgeraden lautet $y = -9\frac{1}{4}$. — So ist die Funktion, die früher nur mechanisch durch das Aufsuchen von Wertepaaren dargestellt werden konnte, jetzt systematisch zeichenbar.

7. Versucht man in derselben Art, wie es im vorigen Paragraphen für die Parabel durchgeführt wurde, die Vertauschung der beiden Veränderlichen auch bei den Gleichungen der Ellipse, des Kreises und der Hyperbel vorzunehmen, so erhält man unvermeidlich wiederum irrationale Ausdrücke, weil stets die beiden veränderlichen Grössen in quadratischen Gliedern vorhanden sind. Dass man auch hier die Ellipse und die Hyperbel in neuer Lage erhält, ist leicht zu zeigen; aber es ist für die Schüler kaum erspriesslich, nach dieser Richtung hin Zeit aufzuwenden. Ein kurzer Hinweis genügt.

IV.

Es soll sich jetzt in unserm Gedankengange einer fortschreitenden Funktionsbehandlung darum handeln, einen Weg zu dem Begriffe des Differentialquotienten und ein Verständnis für seine Beziehungen zur Funktion anzubahnen.

1. Nimmt man auf einer Geraden irgend zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) an, so wird stets

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha ,$$

an welcher Stelle und in welcher Entfernung von einander die beiden Punkte auch gewählt sein mögen. Liegen die beiden Punkte sehr nahe bei einander, so dass der zweite Punkt durch die Koordinaten $x_1 + \delta$, $y_1 + \eta$ bezeichnet ist, wobei δ und η sehr kleine Grössen sind, so wird wieder

$$\frac{\eta}{\delta} = \operatorname{tg}\alpha .$$

Werden diese beiden Zuwachsgrössen unendlich klein gedacht, so hat man für sie die Schreibweise dx und dy und bezeichnet sie als Differential von x bezw. y. Der zweite Punkt heisst also $(x_1 + dx_1\,,\ y_1 + dy_1)$. Wiederum bleibt der Quotient

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha ,$$

für jeden Punkt der Geraden, oder für jeden Wert x der Funktion $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$. So kommt der Schüler zu den Sätzen:

Die lineare algebraische Funktion hat einen konstanten Differentialquotienten, wie die durch sie dargestellte Gerade eine konstante Richtung hat; derselbe ist die Richtungskonstante.

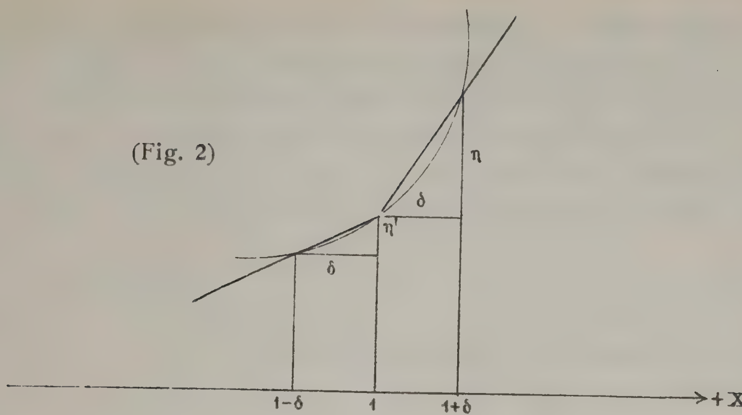
Ist der Differentialquotient oder die Richtungskonstante einer linearen Funktion positiv, so ist sie mit wachsendem x steigend und der Richtungswinkel der durch sie dargestellten Geraden (gegen die positive Richtung der X-Achse) ein spitzer; ist der Differentialquotient oder die Richtungskonstante negativ, so verläuft die Funktion mit wachsendem x fallend, der Richtungswinkel ihrer Geraden ist ein stumpfer.

2. Sobald es sich nun aber nicht mehr um die gerade Linie, sondern um eine Kurve handeln soll, ist die Richtung nicht mehr konstant. Die Kurve hat in jedem neuen Punkte eine neue Richtung, und für die Gewinnung derselben können nicht mehr zwei beliebig von einander entfernte, sondern nur noch zwei unendlich nahe zusammenliegende Punkte zur Bestimmung einer Geraden gewählt werden, welche letztere alsdann die Tangente der Kurve an dieser Stelle darstellt. — Die Richtungskonstante $\operatorname{tg}\alpha$ der Kurven-Tangente wäre wieder durch den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmt, der jedoch nun in jedem Punkte der Kurve einen neuen Wert bedeuten müsste. Wie dies möglich ist, werde an einem Beispiele klar gemacht.

Es möge eine einfache Funktion, $\frac{1}{6}\,x^2$, gewählt und einige Punkte derselben gezeichnet werden (S. Fig. 3 S. 17!). Es soll nun die Richtung der Kurve in einzelnen dieser Punkte, also jedesmal der Wert $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ festgestellt werden. Dem Werte der unabhängigen Variablen $x = 1$ entspricht der Funktionswert $\frac{1}{6}$; einem ein wenig grösseren Werte $1 + \delta$ der Funktionswert $\frac{1}{6}\,(1 + 2\,\delta + \delta^2)$. Es wird also die Differenz beider $\eta = \frac{1}{3}\,\delta + \frac{1}{6}\,\delta^2$ und daher — siehe die schematisch entworfene Figur 2! —

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\,\delta .$$

(Fig. 2)



Dies wäre zunächst noch immer die Richtungskonstante einer Sekante, die durch den Punkt $(1, \frac{1}{6})$ verlaufend eine, wenn auch nur kleine, Sehne in der Kurve hätte; mit kleiner werdendem δ würde diese Sekante sich drehen und die Sehne in der Kurve zwischen den Schnittpunkten noch kleiner werden.

Es sollen nun mit demselben Wertepaare $x = 1$, $y = \frac{1}{6}$ ein neuer, ein wenig kleinerer Wert $x = 1 - \delta$ und der dazugehörige Funktionswert $\frac{1}{6}(1 - 2\delta + \delta^2)$ verglichen werden. Es wird jetzt $\eta' = \frac{1}{3}\delta - \frac{1}{6}\delta^2$ und also

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta'}{\delta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\delta.$$

Wiederum wäre dies eine durch unsern Punkt $(1, \frac{1}{6})$ verlaufende Sekante. Bei kleiner werdendem δ würde diese jetzt eine Drehung im umgekehrten Sinne, wie die vorige, beschreiben; beide aber würden in dem Momente $\delta = 0$ zur Tangente in unserem Punkte werden und beide zugleich den Wert

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}$$

annehmen.

Wie die beiden gedrehten Sekanten sich der Tangente als einer Grenzlage nähern, so bildet der Differentialquotient $\frac{1}{3}$ einen Grenzwert zwischen den beiden Reihen $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\delta$ und $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\delta$. — Bei einer solchen ein erstes Mal von beiden Seiten her durchgeführten Annäherung an den Grenzfall, meine ich, kommt der Schüler voller zu dem Bewusstsein, dass es sich bei den Werten dx und dy wirklich um Null handelt. — Hinterher ist nun auseinanderzusetzen, dass es in einem schnelleren Verfahren genügt, den einen der beiden Fälle zu verfolgen. Wenn für einen benachbarten späteren Punkt festgestellt war, dass $\frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\delta$, so konnte schon hier zum Grenzfalle geschritten werden, indem δ und damit η immer kleiner angenommen und zum Verschwinden gebracht wurden, womit sich schon

$$\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$$

ergab.

3. Den Schülern ist es überraschend und befremdend, dass hier ein Bruch $\frac{0}{0}$ einen bestimmten Wert annimmt, und dass derselbe Bruch, wie sie schon hier über sehen, für jeden anderen Punkt der Kurve einen anderen bestimmten Wert annehmen muss. Man muss wohl bei diesem neuen und so ungemein bedeutungsvollen Ge danken einen Augenblick verweilen und ihn durch Beispiele von anderer Seite he beleuchten. Dies kann in den folgenden Formen geschehen. Lässt man in der Ausdrücken

$$\frac{3-1}{3-1} = 1, \quad \frac{3^2-1^2}{3-1} = 3+1, \quad \frac{3^3-1^3}{3-1} = 3^2+3\cdot 1+1^2$$

überall 3 bis auf 1 abnehmen, so erhält man zuletzt

$$\frac{0}{0} = 1, \quad \frac{0}{0} = 2, \quad \frac{0}{0} = 3.$$

Es nimmt also der Quotient $\frac{0}{0}$ je nach seiner Entstehungsweise verschiedene Werte und jedesmal einen bestimmten Wert an. — Oder anders:

Es ist

$$\begin{aligned} 7a - 3b &= 7a - 3b, \text{ oder} \\ 7a - 7a &= 3b - 3b, \text{ oder} \\ 7(a-a) &= 3(b-b), \text{ oder} \\ 7\cdot 0 &= 3\cdot 0, \quad \text{ oder} \\ 0 &= \frac{3}{7}\cdot 0. \end{aligned}$$

Die 0 auf der einen Seite ist nicht gleichwertig mit der 0 auf der andern Seite sondern beträgt einen bestimmten Bruchteil von ihr. — Wäre man von andern Zahlenkoeffizienten ausgegangen, so hätte man ein anderes Verhältnis der beiden Nullen erhalten, etwa:

$$\begin{aligned} 5a - 2b &= 5a - 2b, \\ 5\cdot 0 &= 2\cdot 0 \\ 0 &= \frac{2}{5}\cdot 0. \end{aligned}$$

Es besteht also für eine Zahl 0 ein besonderer Wert im Verhältnis zu andern Zahlen 0, je nach ihrer Entstehungsweise. Und dies ist ein Gegenstück zu dem, was den Schülern längst bekannt ist: dass die Zahl ∞ die verschiedensten Werte annehmen kann im Verhältnis zu andern Zahlen ∞. Es mag hier an das Beispiel erinnert werden, dass man aus der Ellipse in einem speziellen Falle die Parabel hervorgehen lassen kann, wenn man sich vorstellt, dass der zweite Brennpunkt sich ins Unendliche bewegt, wobei dann unvermeidlich auch der Mittelpunkt zugleich ins Unendliche rückt. Es bildet sich hier offenbar der Quotient $\frac{\infty}{\infty} = 2$. —

4. Nach einer derartigen eingefügten Betrachtung ist nun der Gedanke aufzunehmen, dass wir oben die Beziehung gewonnen hatten:

$$\left.\operatorname{tg}\alpha\right)_{x=1} = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}.$$

Wenn nun auch für einige weitere Werte $x = 2$, $x = 3$ u. s. f. der Differentialquotient unserer Funktion $\frac{1}{6}x^2$, bezw. für einige weitere Punkte unserer Kurve die Richtungs-

konstante der Tangente festgestellt werden soll, so möchte ich hierfür im Nachstehenden ein schematisches Verfahren in Vorschlag bringen, wie es mir didaktisch vorteilhaft zu sein scheint und wie es sich an das bisher benutzte Schema anschliesst.

$$\begin{array}{c|l} x & \frac{1}{6}x^2 \\ \hline 2 & \frac{2}{3} \\ 2+\delta & \frac{1}{6}(4+4\delta+\delta^2) \\ \cline{2-2} & \eta = \frac{2}{3}\delta + \frac{1}{6}\delta^2 \end{array}$$

$\frac{\eta}{\delta} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\delta$; Grenzübergang, δ nimmt ab bis auf 0:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = \frac{2}{3} \left[= \operatorname{tg}\alpha_2.\right.$$

$$\begin{array}{c|l} x & \frac{1}{6}x^2 \\ \hline 3 & \frac{3}{2} \\ 3+\delta & \frac{1}{6}(9+6\delta+\delta^2) \\ \cline{2-2} & \eta = \delta + \frac{1}{6}\delta^2 \end{array}$$

$\frac{\eta}{\delta} = 1 + \frac{1}{6}\delta$; Grenzübergang:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} = 1 \left[= \operatorname{tg}\alpha_3.\right.$$

$$\begin{array}{c|l} x & \frac{1}{6}x^2 \\ \hline 4 & \frac{8}{3} \\ 4+\delta & \frac{1}{6}(16+8\delta+\delta^2) \\ \cline{2-2} & \eta = \frac{4}{3}\delta + \frac{1}{6}\delta^2 \end{array}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6}\delta$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = \frac{4}{3} \left[= \operatorname{tg}\alpha_4.\right.$$

Nun nachträglich auch noch:

$$\begin{array}{c|l} x & \frac{1}{6}x^2 \\ \hline 0 & 0 \\ 0+\delta & \frac{1}{6}\delta^2 \\ \cline{2-2} & \eta = \frac{1}{6}\delta^2 \end{array}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{6}\delta$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 \left[= \operatorname{tg}\alpha_0.\right.$$

Es ergibt sich so für den Schüler der Satz: Der Differentialquotient einer Funktio hat für jeden Wert der Variablen seine besondere bestimmte Grösse, entsprechend wi die Tangente in jedem Punkte der Kurve ihre besondere Richtung hat.

5. Hinterher ist der Differentialquotient nun auch allgemein aufzustellen:

$$\begin{array}{c|l}
x & \frac{1}{6}x^2 \\
\hline
x & \frac{1}{6}x^2 \\
x+\delta & \frac{1}{6}(x^2+2x\delta+\delta^2) \\
\hline
 & \eta = \frac{1}{3}x\delta + \frac{1}{6}\delta^2
\end{array}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\delta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x = \left[\ \operatorname{tg}\alpha.\right.$$

Hieraus lassen sich dann die obigen besonderen Werte alle kurz ableiten:

x	$\frac{dy}{dx}$ oder tg α
0	0
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3}$
3	1
4	$\frac{4}{3}$
:	:
— 1	$-\frac{1}{3}$
— 2	$-\frac{2}{3}$
⋮	⋮

So ergibt sich für den Schüler ein neuer Satz: Wie die Funktion eine all-gemeine Form hat, welche für jeden Wert der unabhängigen Veränderlichen einen besonderen Wert annimmt, so gibt es auch für den Differentialquotienten der Funk-tion eine allgemeine Form, welche für jeden Wert von x einen besonderen Wert annimmt.

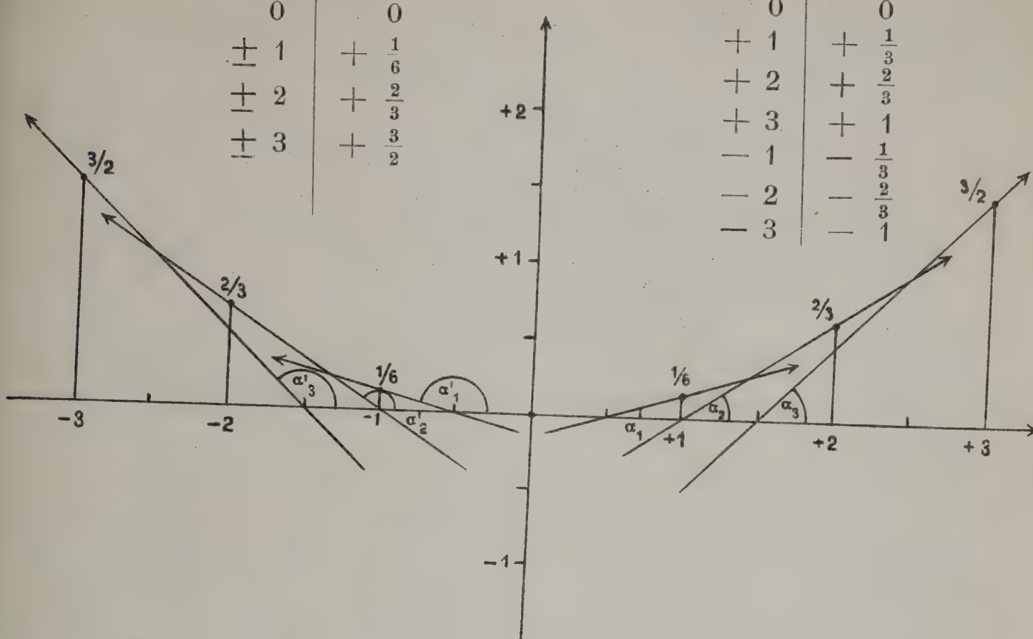
Es sind nun die Tangenten in den behandelten Punkten nachträglich ein-zuzeichnen; vergleiche Figur 3!

Ich glaube, dass der hier beschriebene Weg zur Gewinnung dieser Einsichten aus einem konkreten Beispiele für den Anfänger der angemessene ist und dass er jedenfalls für das Gymnasium ausreichen muss. Bei einer erneuten Durchführung des Gedankenganges an einem anderen Beispiele gehen den Schülern diese Vor-stellungen schnell in Fleisch und Blut über.

Figur (3)

x	$\frac{1}{6}x^2$
0	0
± 1	$+\frac{1}{6}$
± 2	$+\frac{2}{3}$
± 3	$+\frac{3}{2}$

x	$\operatorname{tg}\alpha$
0	0
$+1$	$+\frac{1}{3}$
$+2$	$+\frac{2}{3}$
$+3$	$+1$
-1	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{2}{3}$
-3	-1



6. Bevor nun weitere Zusammenhänge zwischen der Funktion und ihrem Differentialquotienten aufgesucht werden, möchte ich empfehlen, diese Bezeichnung „Differentialquotient" jetzt eine Reihe von Unterrichtsstunden hindurch zurücktreten zu lassen und sie durch „Richtungstangente" zu ersetzen. Es liegt für den Schüler tatsächlich in jener abstrakten Bezeichnung eine Erschwerung für die Eingewöhnung in den Umgang mit dem neuen Begriff, der ihm an und für sich gar keine Schwierigkeit bereitet. Dagegen bietet ihm das Wort „Richtungstangente" eine Anknüpfung an altgewöhnte Vorstellungen. Dasselbe ist an und für sich ja lediglich in trigonometrischem Sinne zu nehmen, um etwas Numerisches zu bedeuten; aber es hält mit seinem Klange gleichzeitig die Vorstellung der geometrischen Berührungsgeraden der Kurve wach und kommt so den Vorstellungsreihen für den Schüler erleichternd zu Hülfe. Er denkt an den analytischen Ausdruck und seine geometrische Bedeutung zugleich. —

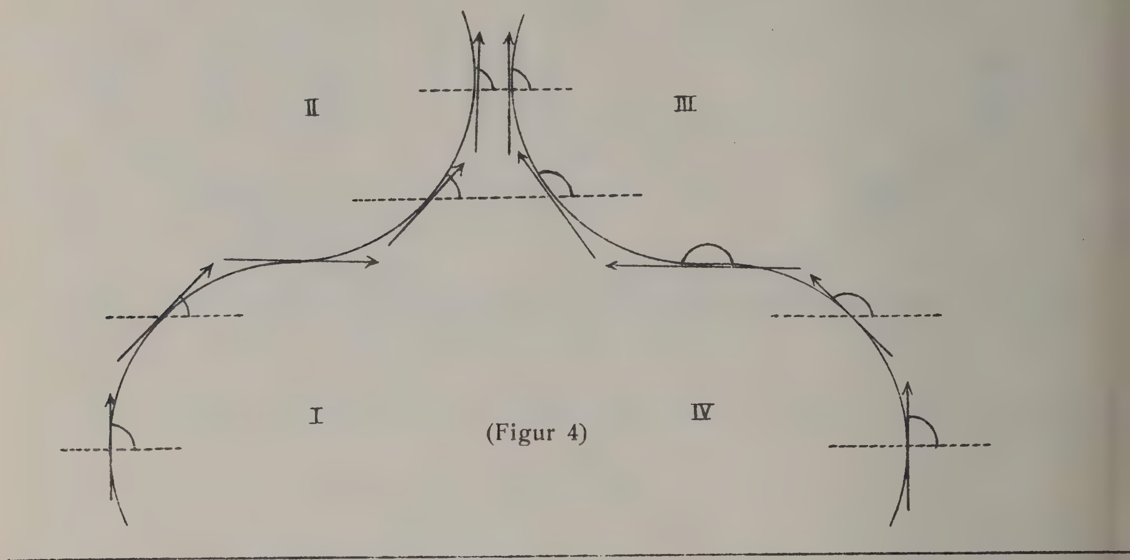
7. Es ergeben sich ohne weiteres die Einsichten:

Solange der Differentialquotient oder die Richtungstangente mit wachsendem x positiv, der Richtungswinkel also spitz bleibt, ist die Funktion steigend; solange die Richtungstangente negativ, der Richtungswinkel also stumpf bleibt, ist die Funktion fallend.

Aus der umstehenden schematischen Figur 4 ist dann noch zu erkennen:

Solange bei wachsendem x der Richtungswinkel w ä c h s t — der spitze von 0^0 auf 90^0 und damit die Richtungstangente von 0 auf ∞ (II. Quadrant der Figur!), der stumpfe von 90^0 auf 180^0 und damit die Richtungstangente von $-\infty$ auf 0 (III. Quadrant!) —: ist die Kurve nach o b e n offen; solange bei wachsendem x der

Richtungswinkel abnimmt — der spitze von 90° auf 0° und damit die Richtungstangente von ∞ auf 0 (I. Quadrant!), der stumpfe von 180° auf 90° und damit die Richtungstangente von 0 auf $-\infty$ (IV. Quadrant!) —: ist die Kurve nach unten offen.



(Figur 4)

Wo der Richtungswinkel 0° oder 180° beträgt und damit die Richtungstangente gleich ± 0 ist; liegt ein „ausgezeichneter Punkt" der Kurve; es gibt hier einen Wechsel in der Lage der Kurvenöffnung, Wende- und Rückkehrpunkte, oder einen Wechsel im Steigen und Fallen, Maximum und Minimum.

Dass es auch da, wo der Richtungswinkel 90° beträgt und damit seine Tangente gleich ∞ ist, einen ausgezeichneten Punkt der Kurve in einem gewissen Sinne geben muss, sollte nicht unbeachtet bleiben, bedarf indessen nicht einer weiteren Ausführung.

Die Schüler gelangen zur vollen Beherrschung dieser neuen Erkenntnisse und ihrer Bedeutung durch die Übungen des nächsten Abschnittes.

V.

Es kann jetzt die Aufgabe behandelt werden, vermittelst des Differentialquotienten oder der Richtungstangente für die Kegelschnitte in einem jeden Punkte ihre Richtung zu bestimmen, bezw. die Gleichung der Tangente aufzustellen.

1. Zuerst werde für die Funktion der Parabel $\frac{1}{2p} \cdot x^2$ die Richtungstangente in ihrer allgemeinen Form entwickelt:

x	y
x	$\frac{1}{2p} \cdot x^2$
$x + \delta$	$\frac{1}{2p} \cdot (x^2 + 2x\delta + \delta^2)$

$$\eta = \frac{1}{2p} \cdot (2x\delta + \delta^2)$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{2p} \cdot (2x + \delta)\,; \quad \text{Grenzübergang:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}\,.$$

Hierauf gründet sich nun eine neue Betrachtung über den Verlauf der Kurve. Es wird $\frac{dy}{dx}$ oder $\operatorname{tg}\alpha$ für negative Werte von x negativ, die Kurve muss hier also stumpfe Richtungswinkel haben, fallend sein; und wenn dabei genauer die Richtungstangente mit wachsendem x von $-\infty$ bis 0 wächst, so muss das Fallen der Kurve in solcher Weise geschehen, dass der Richtungswinkel von 90^0 auf 180^0 wächst, d. h. dass sie nach oben offen ist und im negativen Unendlichen eine Tangente senkrecht zur X-Achse im Punkte 0 eine Tangente, die mit der X-Achse zusammenfällt, besitzt. Von hier ab, also für positive Werte von x ist die Richtungstangente positiv, hier steigt die Kurve in demselben Sinne, wie sie vorher fiel; die positive Richtungstangente wächst von 0 bis ∞, der spitze Richtungswinkel also von 0^0 bis 90^0, d. h. die Kurve ist fortgesetzt nach oben offen und besitzt im positiven Unendlichen wieder eine Tangente senkrecht zur X-Achse.

2. Nun werde ebenso die Parabelfunktion $\sqrt{2px}$ untersucht:

x	y
x	$\sqrt{2px}$
$x + \delta$	$\sqrt{2p(x+\delta)}$

$$\eta = \sqrt{2p(x+\delta)} - \sqrt{2px}\,,$$

dies mit der Summe der beiden Wurzeln erweitert:

$$\eta = \frac{2px + 2p\delta - 2px}{\sqrt{2p(x+\delta)} + \sqrt{2px}}\,, \text{ oder}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{2p}{\sqrt{2p(x+\delta)} + \sqrt{2px}}\,; \quad \text{Grenzübergang:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}\,.$$

Es wird $\frac{dy}{dx}$ oder tg a für negative Werte von x imaginär, hier gibt es also keine Tangenten; für $x = 0$ wird es gleich ∞, die Tangente steht hier senkrecht auf der Abscissenachse und fällt also mit der Ordinatenachse zusammen. Für positive x

gewinnt die Quadratwurzel und damit auch $\frac{dy}{dx}$ einen positiven und einen negativen im übrigen gleichen Wert, die Kurve muss hier also zwei Zweige besitzen, einen steigenden und einen fallenden, und zwar in einem symmetrischen Verlaufe, weil die beiden Richtungswinkel beständig Supplementwinkel sind. In dem einen Zweige wird $\operatorname{tg}\alpha$ oder $+\frac{p}{\sqrt{2px}}$ mit wachsendem x immer kleiner und fällt von ∞ auf 0, es muss also auch der Richtungswinkel fallen, und zwar von 90^0 auf 0^0, so dass der Zweig nach unten hohl ist und im Unendlichen eine Tangente parallel zur X-Achse besitzt. In dem anderen Zweige wird $\operatorname{tg}\alpha$ oder $-\frac{p}{\sqrt{2px}}$ mit wachsendem x immer grösser und steigt von $-\infty$ auf 0, es muss also der Richtungswinkel von 90^0 auf 180^0 wachsen, so dass dieser Zweig nach oben hohl ist und im Unendlichen gleichfalls eine Tangente parallel zur X-Achse besitzt. Die gesamte Kurve ist mit ihrer Oeffnung nach der positiven Richtung der X-Achse gewendet.

3. Dasselbe Verfahren wird nun für den Kreis durchgeführt:

x	y
x	$\sqrt{r^2 - x^2}$
$x + \delta$	$\sqrt{r^2 - (x+\delta)^2}$

$$\eta = \sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta^2 - \delta^2} - \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\eta = \frac{-2x\delta - \delta^2}{\sqrt{r^2 - (x+\delta)^2} + \sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{-2x - \delta}{\sqrt{r^2 - (x+\delta)^2} + \sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Dies liefert reelle Werte nur, solange x innerhalb der Grenzen $-r$ und $+r$ bleibt; bei diesen Grenzfällen wird $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$, die Kurve hat hier senkrechte Tangenten gegen die X-Achse. Für Werte x zwischen $-r$ und 0 gibt es wegen des doppelten Quadratwurzelzeichens zwei Werte, die wieder auf einen steigenden und einen fallenden Zweig unter symmetrischem Verlaufe hinweisen. Aehnlich weiter für $x = 0$ und $x \leqq r$.

4. Für die Funktion der Ellipse wird ebenso:

x	y
x	$\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$
$x+\delta$	$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x+\delta)^2}$

$$\eta = \frac{b}{a}\left[\sqrt{a^2-x^2-2x\delta-\delta^2} - \sqrt{a^2-x^2}\right]$$

$$\eta = \frac{\frac{b}{a}\left[-2x\delta-\delta^2\right]}{\sqrt{a^2-(x+\delta)^2}+\sqrt{a^2-x^2}}$$

Hier durch δ dividiert und den Grenzübergang vollzogen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Wiederum lässt sich hierauf eine Diskussion über den Richtungsverlauf der Kurve begründen.

Eine gleiche Betrachtung gilt für die Hyperbel, deren Funktion $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ die Richtungstangente liefert:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

5. Mit Hülfe der in dem Vorstehenden entwickelten Richtungstangenten der Kegelschnitte lassen sich jetzt ohne weiteres die Gleichungen der geometrischen Tangenten derselben aufstellen. — Die Gleichung einer jeden Geraden, die durch den Punkt (x_1, y_1) verläuft, lautet

$$y = \operatorname{tg}\alpha\,(x-x_1) + y_1.$$

Soll nun (x_1, y_1) ein Punkt der Parabel $\frac{1}{2p}x^2$ sein, so gilt für die Tangente in diesem Punkte die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_1}{p}.$$ Entsprechend

für die Parabel $\sqrt{2px}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{\sqrt{2px_1}} = \frac{p}{y_1}$,

für den Kreis $\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{x_1}{\sqrt{r^2-x_1^2}} = -\frac{x_1}{y_1}$,

für die Ellipse $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x_1}{\sqrt{a^2-x_1^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$,

für die Hyberbel $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}\cdot\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$.

Und man erhält nun durch Einsetzen dieser Werte in jene Gleichung die Gleichungen der Tangenten für diese Kurven:

Parabelfunktion I: $y = \frac{x_1}{p}(x - x_1) + y_1$ oder

$$y = \frac{xx_1}{p} - \frac{x_1^2}{p} + y_1; \quad \text{es gilt}$$

$$\frac{x_1^2}{p} = 2y_1, \quad \text{also}$$

$$y = \frac{xx_1}{p} - y_1, \quad \text{oder}$$

$$y + y_1 = \frac{1}{p} \cdot xx_1;$$

Parabelfunktion II: $yy_1 = p(x + x_1)$;

Kreis: $xx_1 + yy_1 = a^2$,

Ellipse: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$,

Hyperbel: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

6. So wäre auf diesem Wege die Grundlage für die übliche Behandlung des bekannten hier einschlagenden Aufgabengebietes der analytischen Geometrie gewonnen. Indessen könnten dabei jetzt nach den voraufgegangenen Übungen die Gleichungen der Tangenten gegen die Formeln der Richtungstangenten der Kurven zurücktreten.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern!

a) Die Ellipse $\frac{1}{3}\sqrt{45 - x^2}$, für die also $a^2 = 45$ und $b^2 = 5$, und der Kreis $\sqrt{13 - x^2}$ schneiden sich in vier gegen die beiden Achsen symmetrisch liegenden Punkten; für den im ersten Quadranten liegenden von ihnen wird durch Gleichsetzen der beiden Funktionen erhalten: $x = 3$, $y = 2$.

Nun ist

$$\left.\operatorname{tg}\alpha\right)_{\text{Ell.}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\left.\operatorname{tg}\alpha\right)_{\text{Kr.}} = -\frac{x_1}{y_1} = -\frac{3}{2}.$$

Also gilt für den Schnittwinkel φ der beiden Kurven:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{15}.$$

Sollen die Gleichungen der berührenden Geraden noch besonders aufgestellt werden, so gilt allgemein:

$$y = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_1) + y_1, \text{ also}$$

für die Ellipse: $y = -\frac{1}{6}(x - 3) + 2$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{2},$$

für den Kreis: $y = -\frac{3}{2}(x - 3) + 2$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}.$$

b) Es sollen von dem Punkte (2,5) an die Parabel $\sqrt{12x}$ die Tangenten gelegt werden! — Die durch den Punkt (2,5) gehende Gerade hat allgemein die Gleichung:

$$y = \operatorname{tg}\alpha\,(x-2)+5\,.$$

Ihr soll nun auch der Berührungspunkt (x', y') genügen:

$$y' = \operatorname{tg}\alpha\,(x'-2)+5\,.$$

Ausserdem ist die Richtungstangente der Parabel in diesem Punkte:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{y'} = \frac{6}{\sqrt{12x'}}\,,$$

also ergibt sich zur Bestimmung von x':

$$\sqrt{12x'} = \frac{6}{\sqrt{12x'}}(x'-2)+5 \quad \text{oder}$$

$$12x' = 6x' - 12 + 5\sqrt{12x'}$$

$$6(x'+2) = 5\sqrt{12x'}\,, \text{ oder umgeformt:}$$

$$x'^2 - \frac{13}{3}x' + 4 = 0. \text{ Und dies liefert die Werte:}$$

$$x_1 = 3 \qquad\qquad x_2 = \frac{4}{3}$$

$$y_1 = \pm\sqrt{12\cdot 3} = \pm 6 \qquad\qquad y_2 = \pm 4\,.$$

Von den Vorzeichen kann nur das positive Geltung haben, wie aus der Lage des gegebenen Punktes hervorgeht. So wird

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{p}{y_1} = 1 \qquad\qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{p}{y_2} = \tfrac{3}{2}\,.$$

Die beiden Tangenten schliessen einen Winkel ein, für welchen gilt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{2}-1}{1+\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{5}\,.$$

Und ihre Gleichungen selbst lauten, falls es ihrer bedarf:

$$\text{I. } y = (x-2)+5 \text{ oder} \qquad\qquad \text{II. } y = \tfrac{3}{2}(x-2)+5 \text{ oder}$$

$$y = x+3\,. \qquad\qquad y = \tfrac{3}{2}x+2\,.$$

7. So dürfte denn erst hier der geeignete Platz sein, wo die kleinen Formeln für das Schneiden zweier Linien, den Schnittwinkel und die Länge der Sehne, einzuführen sind, um dann vielseitig in Aufgaben über die Kegelschnitte benutzt zu werden. — Für den Hauptsatz über die Tangente der Kegelschnitte brauchte der Beweis jetzt nicht nach der synthetischen Methode, die den Primanern genugsam vertraut ist, gegeben zu werden, sondern er wäre analytisch zu bieten, indem die Winkel, welche die Tangente mit den beiden Leitstrahlen bildet, einzeln berechnet werden. Es ist z. B. bei der Ellipse

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}\,, \text{ für die Leitstrahlen gilt}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1-e} \text{ bezw. } \operatorname{tg} a_2 = \frac{y_1}{x_1+e}\,,$$

so dass sich für jene beiden Winkel ergibt:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-\dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1} - \dfrac{y_1}{x_1 - e}}{1 - \dfrac{b^2 x_1}{a^2 (x_1 - e)}} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 + e} + \dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}{1 - \dfrac{b^2 x_1}{a^2 (x_1 + e)}},$$

welche Ausdrücke denselben Wert, $\frac{b^2}{ey_1}$, liefern. — Es blieben hier dann noch einige wenige hiermit zusammenhängende Eigenschaften der Kegelschnitte zu erörtern.

VI.

Nachdem im vorigen Abschnitt der Wert des Differentialquotienten einer Funktion für die Richtungsbestimmung der Kurve an den Beispielen der schon bekannten Kegelschnitte für den Schüler eine Art von Probe bestanden hat, kann nun der hier vorgeschlagenen Entwickelung des Funktionsbegriffes ein krönender Abschluss angefügt werden mit einer Verwendung des Differentialquotienten zur Feststellung ausgezeichneter Punkte. Und zwar dürfte das hier vorgeschlagene Verfahren nicht nur den Vorzug der Kürze besitzen, sondern es bietet auch zugleich ein Mittel, ohne Mühe zu entscheiden, von welcher Art der ausgezeichnete Punkt ist. Es sei erlaubt, ein paar einführende Beispiele hierherzusetzen; und zwar zunächst solche, die sich auf früher gezeichnete Kurven beziehen.

1. Besitzt die Funktion x^2 ein Maximum oder ein Minimum? — Durch unser Verfahren erhalten wir

$$\begin{array}{c|l} x & x^2 \\ x+\delta & x^2 + 2x\delta + \delta^2 \\ & \eta = 2x\delta + \delta^2 \end{array}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = 2x + \delta$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\,.$$

Dies wird gleich 0 für $x = 0$, sodass an dieser Stelle ein Maximum oder ein Minimum liegen muss. Und nun bedarf es der Feststellung, ob die Kurve in den folgenden und vorhergehenden Punkten fällt oder steigt. Es ist

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0+\delta} = 2\delta, \quad \text{also positiv, und}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0-\delta} = -2\delta, \quad \text{also negativ}\,.$$

Die Kurve ist also unmittelbar hinterher steigend, vorher fallend; es liegt ein Minimum vor. — Es ist so bei dieser Behandlungsweise die Frage, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, entschieden, ohne dass dem Schüler noch der neue Begriff des

zweiten Differentialquotienten zum Bewusstsein kommt. Wohl aber liegt in dieser Art eine weitere Übung zur Befestigung des Begriffes des Differentialquotienten überhaupt.

2. Entsprechend für x^3! Es wird

$$\begin{array}{c|l} x & x^3 \\ x+\delta & x^3+3x^2\delta+3x\delta^2+\delta^3 \\ & \eta=3x^2\delta+3x\delta^2+\delta^3 \\ & \dfrac{\eta}{\delta}=3x^2+3x\delta+\delta^2 \\ & \dfrac{dy}{dx}=3x^2\,. \end{array}$$

Und dieses wird 0 für $x=0$. Nun ist wieder das Verhalten der Kurve vor und nach diesem Punkte zu untersuchen.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0+\delta}=3\delta^2 \text{ und}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0-\delta}=3\delta^2\,.$$

Dies ist in beiden Fällen positiv, die Kurve ist sowohl vorher wie hinterher steigend, während bei $x=0$ selbst eine Tangente von der Richtung der X-Achse liegt; es besteht hier ein Wendepunkt, — daher der Name „Wendeparabel". —

Nun eine Bemerkung über die Ausführung des Verfahrens! Dasselbe wird kürzer, wenn die Schüler erkennen, dass Glieder mit einem Faktor δ^2, δ^3, die ohnehin gegen δ^1 sehr klein sind, beim Grenzübergang verschwinden, sodass sie besser von vornherein vernachlässigt werden. Die obige Ausführung wird dann kurz:

$$\begin{array}{c|l} x & x^3 \\ x+\delta & x^3+3x^2\delta \\ & \eta=3x^2\delta \\ & \dfrac{dy}{dx}=3x^2\,. \end{array}$$

3. Ebenso für $x^{\frac{3}{2}}$! Wir erhalten durch unser Verfahren:

$$\begin{array}{c|l} x & \sqrt{x^3} \\ x+\delta & \sqrt{(x+\delta)^3} \\ & \eta=\sqrt{x^3+3x^2\delta}-\sqrt{x^3} \text{ oder} \\ & \eta=\dfrac{3x^2\delta}{\sqrt{x^3+3x^2\delta}+\sqrt{x^3}} \end{array}$$

$$\frac{\eta}{\delta}=\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+3x^2\delta}+\sqrt{x^3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,.$$

Dies wird 0 bei $x=0$. Und nun zeigt sich

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0+\delta} = \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{\delta} \quad \text{und}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0-\delta} = \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{-\delta}\,.$$

Da der letztere Wert imaginär ist, so hat die Kurve vor unserem Punkte (0,0) keine Tangenten, keine Punkte; hinterher ist sie mit einem Zweige steigend, mit einem symmetrisch dazu fallend. Dabei ist hier aber, wie sich aus dem Wert der Richtungstangente für $x=0$ ergibt, im Punkte 0 selber die Abscissenachse eine Tangente beider Zweige: es handelt sich um einen Rückkehrpunkt, — daher „Rückkehrparabel". Für $x=\infty$ wird die Richtungstangente ∞; hier ist eine Tangente für beide Zweige senkrecht zur X-Achse zu denken.

4. Es sind bisher Funktionen untersucht, die früher bereits graphisch dargestellt waren; es soll jetzt ohne voraufgehende Konstruktionsausführung der ausgezeichnete Wert der Funktion x^2-8x-1 festgestellt werden.

x	y
x	x^2-8x-1
$x+\delta$	$(x+\delta)^2-8(x+\delta)-1$

$$\eta = 2x\delta - 8\delta$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-4)\,.$$

Dies wird 0 für $x=4$; es ist positiv für $x>4$, hier steigt die Kurve; es ist negativ für $x<4$, hier fällt die Kurve: bei $x=4$ liegt ein Minimum.

5. Es soll die Kurve $\frac{3}{5}x^2+6x-2$ in ihrem Hauptverlaufe konstruiert, auch die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen hinzugefügt werden.

Die Kurve ist eine Parabel mit der Achse parallel zur Y-Achse. Zur Bestimmung des Scheitels, des höchsten bezw. tiefsten Punktes, kann der Differentialquotient dienen:

$$\begin{aligned} f(x+\delta) &= \tfrac{3}{5}(x+\delta)^2+6(x+\delta)-2 \\ f(x) &= \tfrac{3}{5}x^2+6x-2 \\ \hline \eta &= \tfrac{6}{5}x\delta+6\delta \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{6}{5}x+6\,.$$

Dies wird 0 für $x=-5$. Und dazu wird $f(x)=y=-17$. Also sind -5 und -17 die Koordinaten des Scheitels.

Ferner wird

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-5+\delta} = \tfrac{6}{5}(-5+\delta)+6 = +\tfrac{6}{5}\delta\,.$$

Dies ist positiv und damit der Scheitel als ein Minimum bestätigt; die Öffnung der Parabel liegt in der positiven Richtung der Y-Achse.

Zur Bestimmung des Parameters dient die bekannte Beziehung für den Koefficienten des quadratischen Gliedes:

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{2p}\,, \quad 2p=\frac{5}{3}\,, \quad p=\frac{5}{6}\,, \quad \frac{p}{2}=\frac{5}{12}\,.$$

So hat der Brennpunkt die Koordinaten -5 und $-16\frac{7}{12}$, die Leitgerade die Gleichung $y=-17\frac{5}{12}$.

Die Kurve schneidet die Y-Achse im Punkte $y=-2$. Die Richtung der Tangente ist hier bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 6\ .$$

Die Funktion verschwindet für $x_1=-2{,}1$ und $x_2=-7{,}9$. Für diese Punkte wird

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2{,}1} = -\tfrac{6}{5}\cdot 2{,}1+6, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -2{,}5+6 = 3{,}5$$

$$\text{und}\quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-7{,}9} = -\tfrac{6}{5}\cdot 7{,}9+6 \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = 9{,}5+6 = -3{,}5\ .$$

Hiernach kann die Zeichnung der Kurve in ihrem wesentlichen Verlaufe vorgenommen werden.

6. Es soll untersucht werden, ob der Ausdruck $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-4$ ein Maximum oder Minimum hat.

x	y
x	$\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-4$
$x+\delta$	$\frac{1}{3}(x+\delta)^3-\frac{5}{2}(x+\delta)^2+6(x+\delta)-4$
	$\eta=\frac{1}{3}\cdot 3x^2\delta-\frac{5}{2}\cdot 2x\delta+6\delta$
	$\frac{dy}{dx}=x^2-5x+6\ .$

Dies gleich Null gesetzt, ergibt zwei ausgezeichnete Punkte, in denen die Tangente parallel zur X-Achse verläuft, bei $x=2$ und $x=3$. — Zunächst soll für den ersteren Punkt das Verhalten der Kurve unmittelbar hinter- und vorher festgestellt werden:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=2+\delta} = (2+\delta)^2-5(2+\delta)+6; \quad \text{hierin ist}$$

$$2^2-5\cdot 2+6=0\ , \quad \text{also}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=2+\delta} = -\delta+\delta^2\ . \quad \text{Entsprechend wird}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=2-\delta} = \delta+\delta^2\ .$$

Der erstere Wert ist negativ, der letztere positiv: bei $x=2$ liegt ein Maximum.

Für $x=3$ wird:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=3+\delta} = (3+\delta)^2-5(3+\delta)+6 \quad \text{und da}$$

$$3^2-5\cdot 3+6=0\ ,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=3+\delta} = \delta+\delta^2; \quad \text{entsprechend}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=3-\delta} = -\delta+\delta^2\ .$$

Es handelt sich bei $x=3$ um ein Minimum.

7. Es soll für die Funktion $x^3+2x^2-11x-12$, welche für drei ganzzahlige reelle Werte der unabhängigen Veränderlichen verschwindet, diejenige Grösse derselben festgestellt werden, für welche sie den grössten, und ebenso diejenige, für welche sie den kleinsten Wert annimmt. In dem hierdurch begrenzten Gebiete soll nun der eine von jenen drei Werten, welche die Funktion zum Verschwinden bringen, aufgesucht und danach die beiden andern berechnet werden.

Die durch diese Funktion dargestellte Kurve geht dreimal durch die X-Achse, sie muss also in den beiden Gebieten zwischen den drei Schnittpunkten einmal einen höchsten und einmal einen tiefsten Punkt besitzen. Zur Bestimmung derselben ist der Differentialquotient zu bilden:

$$f(x+\delta)=(x+\delta)^3+2\cdot(x+\delta)^2-11(x+\delta)-12$$
$$fx=x^3+2x^2-11x-12$$
$$\overline{\eta=3x^2\delta+4x\delta-11\delta}$$
$$\frac{dy}{dx}=3x^2+4x-11\ .$$

Dieser Ausdruck ist gleich 0 zu setzen:

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}=0\ ,$$

woraus sich ergibt, dass die beiden ausgezeichneten Punkte bei $x'=1{,}4$ und $x''=-2{,}7$ liegen müssen.

Es kann nun zugleich entschieden werden, von welcher Art dieselben sind. Es ist

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=1,4}=3\cdot1{,}4^2+4\cdot1{,}4-11=0 \quad \text{und}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=1,4+\delta}=3(1{,}4^2+2\cdot1{,}4\delta+\delta^2)+4(1{,}4+\delta)-11$$
$$=8{,}4\delta+3\delta^2+4\delta\ .$$

Dies ist positiv, also liegt bei $x=1{,}4$ ein Minimum. Da es nämlich aus dem Sachverhalt hervorgeht, dass es sich nur um ein Minimum oder ein Maximum handeln kann, so genügt diese Bestimmung des Vorzeichens der Richtungstangente nach der einen Richtung hin.

Entsprechend wird

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2,7}=3\cdot2{,}7^2-4\cdot2{,}7-11=0 \quad \text{und}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2,7+\delta}=3(2{,}7^2-2\cdot2{,}7\delta+\delta^2)+4(-2{,}7+\delta)-11$$
$$=-16{,}2\delta+3\delta^2+4\delta$$
$$=-12{,}2\delta+3\delta^2\ .$$

Dies ist negativ, also gibt es bei $x=-2{,}7$ ein Maximum.

Es liegen nun zwischen diesen beiden ausgezeichneten Stellen die ganzzahligen Werte $-2, -1$, 0 und $+1$; und es ist durch Versuch festzustellen, durch welchen derselben die Funktion zum Verschwinden gebracht wird: es ist dies $x_1=-1$.

Nun muss unsere Funktion durch $x+1$ ohne Rest teilbar sein; und es zeigt sich:

$$(x^3+2x^2-11x-12):(x+1)=x^2+x-12,$$

so dass unsere Funktion nunmehr auch bei denjenigen beiden Werten von x verschwinden muss, für welche $x^2 + x - 12 = 0$ wird; das ist bei $x_2 = 3$ und $x_3 = -4$ der Fall. — Diese beiden neuen Werte könnten auch bequem auf Grund der drei Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koefficienten der kubischen Gleichung bestimmt werden.

Die Kurve schneidet die Y-Achse im Punkte -12. Die Funktion wird für $x = \infty$ selbst ∞, für $x = -\infty$ selbst $-\infty$; sie nimmt an den beiden ausgezeichneten Stellen, nämlich bei $x = 1,4$ und bei $x = -2,7$ die Werte $-20,7$ bezw. $+12,6$ an.

Es bleiben die Tangenten in den behandelten Punkten $(-4,0)$, $(-1,0)$, $(0, -12)$ und $(3,0)$ festzustellen: es ergibt sich aus dem allgemeinen Wert der Richtungstangente

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 11 :$$

$$\left.\operatorname{tg}\alpha\right)_{x=-4} = 21$$

$$\left.\operatorname{tg}\alpha\right)_{x=-1} = -12$$

$$\left.\operatorname{tg}\alpha\right)_{x=0} = -11$$

$$\left.\operatorname{tg}\alpha\right)_{x=3} = 28 .$$

Für die beiden ausgezeichneten Punkte $(-2,7,\ 12,6)$ und $(1,4,\ -20,7)$ ist $\operatorname{tg}\alpha = 0$. So können jetzt sechs endliche Punkte mit ihren Tangenten konstruiert werden, woraus sich der wesentliche Verlauf der Kurve übersehen lässt.

8. Einer Kugel soll der möglichst grösste Zylinder eingezeichnet werden! — Für einen beliebigen der vielen möglichen Zylinder sei der Radius x, dann wird — der Kugelradius gleich r gesetzt — die halbe Höhe $\sqrt{r^2 - x^2}$ und das Volumen $\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$. Es stellt sich das Volumen als eine Funktion von x dar, wobei x zwischen den Grenzen 0 und r variiert. Dass bei dem Wachsen von x von 0 her die Funktion von 0 an wächst und schliesslich bei $x = r$ wieder 0 wird und dass sie also bei einem gewissen mittleren x einen grössten Wert erreicht, ist leicht zu erkennen. Es gilt also, den Differentialquotienten der Funktion zu bilden und ihn gleich 0 zu setzen, um den gesuchten Wert von x zu erhalten.

Man kann aber auch die Höhe als die unabhängige Variable auffassen und mit x bezeichnen, dann wird der Zylinderradius $\sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ und das Volumen $\pi\left(r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) x$ oder $\pi r^2 x - \frac{\pi}{4} x^3$. Hier kann x zwischen o und 2r variieren, und die Funktion wird sowohl für $x = 0$, wie auch für $x = 2r$ selbst gleich 0, so dass also unter allen Zwischenwerten einer am grössesten sein muss.

Es werde nun zunächst diese letzte Funktion, die rational ist, behandelt. Es ist

$$f x = \pi r^2 x - \frac{\pi}{4} x^3$$

$$\frac{f(x+\delta) = \pi r^2 (x+\delta) - \frac{\pi}{4}(x^3 + 3x^2\delta)}{\eta = \pi r^2 \delta - \frac{3}{4}\pi x^2 \delta}$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \pi r^2 - \frac{3}{4}\pi x^2 \ .$$

Wird dies gleich 0 gesetzt, so ergibt sich

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r \ .$$

Und nun die andere Funktion:

$$f x = 2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\frac{f(x+\delta) = 2\pi (x^2 + 2x\delta) \sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta}}{\eta = 2\pi x \left[(x + 2\delta \sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta} - x\sqrt{r^2 - x^2} \right], \quad \text{oder}}$$

$$\eta = \frac{2\pi x}{(x+2\delta)\sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta} + x\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \left[(x^2 + 4x\delta)(r^2 - x^2 - 2x\delta) - x^2(r^2 - x^2) \right]$$

Hier der letzte Faktor zunächst allein behandelt:

$$r^2x^2 - x^4 - 2x^3\delta + 4r^2x\delta - 4x^3\delta - r^2x^2 + x^4 \quad \text{oder}$$

$$4r^2x\delta - 6x^3\delta \ .$$

So wird

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{2\pi x \cdot 2x(2r^2 - 3x^2)}{(x+2\delta)\sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta} + x\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{2\pi x (2r^2 - 3x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \ .$$

Dies wird 0 einmal für $x = 0$ — und damit wäre ein Minimum bezeichnet —, sodann für

$$x = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot r \ .$$

Diese aus den zwei Funktionen erhaltenen Ausdrücke sind beide für die Schüler leicht zu konstruieren und auch als auf dasselbe Ergebnis hinauskommend nachzuweisen.

9. Welches von allen gleichschenkligen Dreiecken, bei denen die Grundseite und die Höhe eine konstante Summe ausmachen, hat eine Schenkelseite von ausgezeichnetem Wert? (Aus Martus, Raumlehre II S. 192.) Für das Dreieck gibt es zwei Grenzfälle: entweder die Grundseite ist 0, dann wird die Schenkelseite gleich der konstanten Summe s; oder die Grundseite ist s, dann wird die Schenkelseite gleich $\frac{s}{2}$. Grösser als s, im ersteren Falle, kann dieselbe niemals werden: nimmt sie nun beständig ab, bis zu jenem Endwerte $\frac{s}{2}$, — oder gewinnt sie im Abnehmen einmal eine geringste Länge, von der sie dann wieder auf die Grösse $\frac{s}{2}$ ansteigt? — Aus der blossen Anschauung her ist dies nicht zu entscheiden.

Es werde der Differentialquotient der Funktion gebildet, welche die Schenkelseite darstellt. Es ist, wenn die Grundseite mit x bezeichnet wird,

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (s-x)^2} \text{ oder}$$

$$f(x) = \sqrt{\tfrac{5}{4} x^2 - 2sx + s^2}\ ,$$

$$f(x+\delta) = \sqrt{\tfrac{5}{4} x^2 + \tfrac{5}{2} x\delta - 2sx - 2s\delta + s^2}\ .$$

Die Differenz dieser beiden Wurzeln mit der entsprechenden Summe erweitert, gewinnt für den Zähler den Wert $\frac{5}{2} x\delta - 2s\delta$, so dass der Quotient entsteht

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{\frac{5}{2} x - 2s}{2\sqrt{\frac{5}{4} x^2 - 2sx + s^2}}\ .$$

Jnd dieser wird 0 für $x = \frac{4}{5} s$. Es gibt also tatsächlich in jenem Verlaufe einen usgezeichneten Punkt, und zwar kann hier bei der entwickelten Sachlage nichts nderes liegen als ein Minimum. — Die weitere Untersuchung des Differentialquotienten bestätigt dies: es ist die Frage, ob die Funktion nach diesem Punkte teigt oder ihr Differentialquotient positiv ist. Setzt man in dem obigen Ausdruck esselben $x = \frac{4}{5} s + \delta$ ein, so bleibt der Radikandus positiv und die Wurzel reell, vie sie das in dem behandelten Gebiete auf jeden Fall tun muss, da sie an sich die chenkelseite bedeutet. Aus demselben Grunde ist ihr Vorzeichen aber auch von vornerein nur positiv gerechnet. So ist der Zähler $\frac{5}{2}\left(\frac{4}{5} s + \delta\right) - 2s$ allein massgebend. Jnd dieser ist $+\frac{5}{2}\delta$, so wie er zu einem unmittelbar voraufgehenden Werte $-\frac{5}{2}\delta$ wird: ie ausgezeichnete Schenkelseite ist eine kürzeste.

Zur Feststellung ihrer Länge ist in der Funktion $x = \frac{4}{5} s$ einzusetzen; sie wird lsdann $\sqrt{(\frac{2}{5} s)^2 + (\frac{1}{5} s)^2}$ oder $\frac{s}{5}\sqrt{5}$, d. i. 0,447 s, also weniger als $\frac{s}{2}$! Die Schenkelnge sinkt, während die Grundseite von 0 auf s wächst, nicht direkt von der Grösse auf $\frac{s}{2}$, sondern sie sinkt, bis sie bei einer bestimmten Länge der Grundseite, $\frac{4}{5}$ s, e Grösse 0,447 s angenommen hat, um dann hinterher wieder bis auf $\frac{s}{2}$ zuzunehmen

---

Die vorstehenden Entwickelungen bedeuten einen Versuch, den Schülern ein erständnis der Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten mitzugeben, ne die bestehenden Lehrpläne anzutasten, allein durch eine geänderte Einführungseise der Elemente der analytischen Geometrie. Gewiss wäre es leicht, von der er vorgeschlagenen Art, welche beständig konkrete Einzelübungen vornimmt, zu ner allgemeinen Behandlung des Differenzierens den Übergang zu machen, aber die Verhältnisse des Gymnasiums mag es doch richtiger sein, wenn man sich rein fügt, auf ein Weitergehen verzichten zu müssen. Es scheint mir das Drängen unserer Zeit, den mathematischen Standpunkt der Prima beständig heben und n dem, was uns Freude bereitet, immer mehr auch den Schülern bieten zu wollen, ncherseits zu weit zu gehen. Es darf hier nicht vergessen werden, dass seit 1892

bereits die Elemente der analytischen Geometrie und der sphärischen Trigonometrie mit umfangreichen Aufgabengebieten, seit 1902 auch „eine Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde“ dem Lehrplane eingefügt sind, ohne dass eine Erweiterung der Unterrichtszeit stattgefunden hätte! Und wenn auch einzelne Gebiete der Schulmathematik sich noch kürzer behandeln lassen mögen, andere vielleicht, wie die Kombinatorik, auch ganz ausgeschieden werden können, so dürfte es doch im Interesse der übergrossen Mehrzahl der Schüler angezeigt sein, in weitergehenden Forderungen masszuhalten. — Bei einer Behandlungsart, wie der vorstehenden elementaren, gewinnen die Schüler einen Einblick in eine Grundvorstellung der Infinitesimalrechnung und lernen sie zugleich in dem Gebiete der Maximalaufgaben bereits eine den Anfänger überraschende, wertvolle Anwendung derselben kennen. Damit kann es für eine allgemeine Bildung genug sein! Andererseits hat die kleinere Anzahl derer, die wegen des späteren Berufes an eingehenderen Kenntnissen nach dieser Richtung ein Interesse haben, in den hier angeregten Übungen eine wesentliche Grundlage für ein weiteres Verständnis mitbekommen; damit müsste es im allgemeinen auch genug sein! Indessen ist damit ja nicht ausgeschlossen, dass der Lehrer einzelnen für dieses Lehrfach besonders interessierten Schülern auf ihren Wunsch mit Ratschlägen und Hilfen zu eigener Beschäftigung zur Hand geht; nur sollte dies auf die Gestaltung des gemeinsamen Arbeitens in der Klasse keine Rückwirkung ausüben. Für das Gymnasium muss es die eigentliche Aufgabe bleiben, seinen Zöglingen eine systematische und eindringliche Schulung auf bestimmt umgrenztem Gebiete zu gewähren. Mit je grösserem Erfolge diese Aufgabe erfüllt ist, um so leichter und um so sicherer werden sich die jungen Leute hinterher in die Entfaltung der freieren und selbständigeren und umfassenderen Tätigkeit hineinfinden, die auf der Universität nötig ist.

Wenn endlich den Realien auf der Oberstufe des Gymnasiums noch Zeit zugewiesen werden könnte, so müsste auch der Mathematiker dafür stimmen, dass dieser Gewinn einer anderen Seite zugute käme, nämlich den Naturwissenschaften.

JAHRESBERICHT

DES

NICOLAIGYMNASIUMS

IN

LEIPZIG

ALS EINLADUNGSSCHRIFT

ZUR FEIERLICHEN

ENTLASSUNG DER ABITURIENTEN

FREITAG DEN 20. MÄRZ

SOWIE ZU DEN

ÖFFENTLICHEN KLASSENPRÜFUNGEN

MITTWOCH DEN 25. MÄRZ

IM NAMEN DES LEHRERKOLLEGIUMS

HERAUSGEGEBEN VON

PROF. DR. OTTO KAEMMEL

REKTOR.

Inhalt:

LEIPZIG 1896

DRUCK VON C. GRUMBACH.

gr. Nr. 551.

Über die Begründung der Infinitesimalrechnung

durch Newton und Leibniz.

Im Jahre 1684 war zu Leipzig die Abhandlung: »Nova methodus pro maximis et nimis etc.« erschienen, in der ihr Verfasser, Gottfried Wilhelm Leibniz, der gelehrten Welt ner Zeit die Grundzüge seiner neun Jahre früher gemachten Entdeckung der Differentialhnung angedeutet und damit eine neue Epoche der Mathematik und der gesamten exakten ssenschaften eingeleitet hatte. Das Unendlichkleine, die Infinitesimalgröſse, von den Geotern des Altertums mit Bedacht gemieden und umgangen, aber seit Kepler sich immer und ner wieder in die Spekulationen der Mathematiker eindrängend, hatte durch Leibniz schlieſs- die Gesetze, Einschränkungen, Rechnungsregeln und Bezeichnungen vorgeschrieben bekommen, er deren Einhaltung sie erst das volle Bürgerrecht im System der wissenschaftlichen Begriffe Mathematik erlangte. Trotz der Geringschätzung und des geheimen Miſstrauens, das ihr angs viele, darunter die bedeutendsten Mathematiker, wie Huygens, entgegenbrachten, trotz offenen Fehde, die ihr die Cartesianer und andere boten, hatte sie sich seit 1684 im Reiche Mathematik und Physik nicht nur behauptet, vielmehr schien sie sich schon sehr bald diesen ssenschaften unentbehrlich gemacht zu haben durch die ungeahnten Bereicherungen, die diese nach kurzer Zeit verdankten und durch die neuen Gebiete, die sie ihnen eröffnet hatte.

Aber solcher Leistungen ungeachtet geschah es just bei Gelegenheit des hundertjährigen iläums ihrer Einführung durch Leibniz, daſs die Infinitesimalgröſse noch einmal einer peinen Musterung ausgeliefert wurde, die nichts Geringeres bezweckte, als sie, wenn möglich, z aus dem Bereiche strenger Mathematik auszuweisen. 1784 erlieſs die Königl. Preuſsische demie der Wissenschaften zu Berlin die folgende Preisaufgabe*):

»L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'eſtime qu'on a pour elles, et l'honorable mination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juſte titre, sont dues à la té de leurs principes, à la rigueur de leurs démonſtrations et à la préciſion de leurs théorèmes. r aſſurer à cette belle partie de nos connoiſſances la continuation de ces précieux avantages, lemande

une théorie claire et préciſe de ce qu'on appelle ***Infini*** *en Mathématiques.*

On ſçait que la haute Géometrie fait un uſage continuel *des infiniment grands* et *des iiment petits.* Cependant les Géometres, et même les Analyſtes anciens, ont évité ieuſement tout ce qui approche de l'Infini; et de grands Analyſtes modernes avouent que ermes *grandeur infinie* sont contradictoires.

*) Karstens Mathematische Untersuchungen, Halle, 1786.

L'Académie ſouhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vr d'une ſuppoſition contradictoire, et qu'on indique un principe ſûr, clair, en un mot vraim mathématique, propre a être ſubſtitué à *l'Infini*, ſans rendre trop difficiles, ou trop longu les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière ſoit traitée avec to la généralité, et avec toute la rigueur, la clarté et ſimplicité poſſibles.«

L'Huilier, ein Schweizer, errang den Preis mit der Dissertation: »Exposition élémenta des principes des calculs supérieurs.« Die Akademie der Wissenschaften zu Berlin muſs dal wohl durch diese Arbeit zufriedengestellt worden sein. War aber in dem Begriff des Lim wie ihn l'Huilier behandelte, ein sicheres, klares, wahrhaft mathematisches, widerspruchsfre Princip, propre à être substitué à l'infini, gegeben? Nein! Denn sonst hätte nicht der fruc barste und abstrakteste Mathematiker jener Zeit, Lagrange, sich veranlaſst gesehen, 13 Jal später, 1797, ein gröſseres mathematisches Werk zu veröffentlichen unter dem Titel: »Théorie fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, degagés de ***toute*** *co sidération d'infiniment petits* ou *d'évanouissans*, de ***limites*** ou de *fluxions*, et reduits l'analyse algébrique des quantités finies«, und damit zu bekunden, daſs, um Erfolg zu haben, Infinitesimalgröſsen und Infinitesimalbetrachtungen mit schärferen Mitteln, als denen, die l'Huili angewandt hatte, zu bekämpfen wären.

Und heute? Hundert Jahre sind vergangen, seitdem Lagrange seine scharfen Streic gegen toute considération d'infiniment petits etc. führte, aber die Leibnizischen d und $\int$, „Differenzen" und „Summen", die Infinitesimalgröſsen der verschiedenen Ordnungen beherrsch gleichwohl noch die höhere Analysis. Wer sich heute an der exakten Naturforschung beteilig will, wer in der Mathematik, Physik, Chemie, in irgend einem Gebiete der erklärenden Natu wissenschaften, in der Psychophysik und Philosophie aufsteigen will »*ad problemata sublimior* oder wer in seinem Drange nach Erkenntnis des Zusammenhanges zwischen den Ursachen u Wirkungen der Dinge und des Geschehens durchdringen will »*ad fontes profundiores*«, muſs si das Verständnis der Zeichen d und $\int$ erschlossen haben. Sie sind Charakteristika der math matischen Weltsprache geworden, wie es die Zeichen $+$ und $-$ schon lange vorher ware

Oder sind es etwa bloſs die Zeichen, die sich erhalten haben, und ist der Sinn, d man heute mit ihnen verbindet, ein anderer als der, den ihr genialer Urheber in sie legte Erklärt es sich aus dieser Wandlung ihrer Bedeutung, daſs sie die auf ihre Beseitigung abziele den Arbeiten von l'Huilier und Lagrange überdauert haben? Und wenn nicht, woran lag dann, daſs noch 100 Jahre nach ihrer Einführung die wissenschaftliche Welt das Bedürfn empfand, sich ihrer zu entledigen, und was hat sich seitdem in dem Verhältnis der Anschauung und Denkweise der Gelehrten zu dem Begriffe der Infinitesimalgröſse geändert, daſs man heu jenes Bedürfnis nach Elimination dieses Begriffs aus der Wissenschaft nicht mehr hat?

Noch andere Fragen tauchen angesichts jener Preisaufgabe auf. »*Scientia infiniti*«, lautete der kühne Titel, mit dem Leibniz seine Schöpfung gern bezeichnet hatte. »Analyse *d infiniment petits*«, das ist der Titel des ersten Lehrbuchs der Differentialrechnung, das 1696, zw Jahre nach dem Tode seines Verfassers, des Marquis de l'Hôpital, des Schülers von Johan Bernoulli und Leibniz, gedruckt worden war. Man kann es verstehen, daſs die Ausdrücke »*infini* und »*Infinitus*« für eine Disciplin, deren Gegenstand dennoch nur in der Untersuchung endliche Gröſsen bestand, vielen als unzutreffend oder doch entbehrlich erscheinen mochte. Aber ungefä zehn Jahre früher als Leibniz hatte sich Newton eine analytische Methode geschaffen, durch d

das Kontinuum und die stetige Veränderung eines Kontinuums der exakten mathematischen echnung unterwerfen konnte. Und drei Jahre nachdem Leibniz seine Methode bekannt geacht hatte, 1687, hatte die Welt aus Newtons unvergänglichem Werke »Philosophiae naturalis incipia mathematica« erfahren, dafs Newton mit Hilfe der Begriffe des Moments einer Gröfse, s ersten Verhältnisses entstehender und des letzten Verhältnisses verschwindender Gröfsen sselbe leisten konnte wie Leibniz mit seinen Infinitesimalen. 1706 hatte Newton in seiner Quadratura curvarum« die Grundzüge seiner methodus fluxionum der Öffentlichkeit mitgeteilt d dabei ausdrücklich erklärt: Volui ostendere quod in methodo fluxionum *non opus* sit, figuras *finite parvas* in geometriam introducere, und dafs seine Methode der ersten und letzten Vertnisse entstehender oder verschwindender Gröfsen sich in Übereinstimmung befinde mit der ometrie der Alten. Nach seinem Tode war seine »Methodus fluxionum« in ihrem vollen nfange veröffentlicht worden, und der Ausdruck „Fluxio“ vermied das „Unendliche“ ebensogut e es Euklid und Archimedes vermieden hatten. Wenn nun 1784 die Akademie der Wissenaften zu Berlin nach einem principe sûr etc. propre à être substitué à l'Infini verlangte, rum fand sie es nicht in Newtons Fluxionen?

Es hat seit meiner Studienzeit einen grofsen Reiz auf mich geübt, mir auf diese Fragen e Antwort zu suchen. Sie nach allen Seiten hin in ihrem ganzen Umfange erschöpfend zu ntworten, dazu gehört neben voller Vertrautheit mit allen Gebieten der höheren Mathematik d Physik in ihrem gegenwärtigen Zustande auch ein tiefes Eindringen in die Probleme der ychologie und Erkenntnislehre und nicht minder die genaue Kenntnis und Beurteilungsfähigt aller geschichtlichen Wandlungen und Phasen in der mathematisch-naturwissenschaftlichen schauungs- und Denkweise der Menschheit in den letzten drei Jahrhunderten, ja in den letzten i Jahrtausenden, — ein vollständiges Leben in und mit der Wissenschaft nach ihrem innersten alt und ihren vollendetsten Formen. Eine solche wissenschaftliche Vertiefung und Ausbreitung von keinem zu erreichen, dessen Kräfte im praktischen Schul-Kleindienst zersplittert und eröpft werden. Daraus folgt aber nicht, dafs er in den wenigen Stunden wissenschaftlicher fse und Erhebung, die ihm bleiben, seine Aufmerksamkeit nicht auf Fragen allgemeiner ur richten und sich nach seinem Vermögen eine Antwort suchen könne. Ergiebt sich daraus h für die Wissenschaft im grofsen und ganzen keine gröfsere positive Förderung, als aus ähligen gedruckten Arbeiten, die mit dem Anspruch darauf an die Öffentlichkeit gelangen, ist doch für den, der sie leistet, jede wissenschaftliche Arbeit erspriefslich und fördernd und um auch dem Ganzen nicht verloren. Des allgemein wissenschaftlichen Interesses ermangeln von mir aufgeworfenen Fragen nicht, und auch für die Praxis des mathematischen Unterrichts n ihre Behandlung von allergröfster Bedeutung werden. Unter diesem Gesichtspunkte benutze dieses Programm dazu, einiges aus meinen Studien über die Begründung der Infinitesimalnung durch Newton und Leibniz zu fixieren. Dafs in dem engen Rahmen eines Schulgramms nur Bruchstücke, bez. nur die Anfänge dieser Untersuchungen Platz finden können, n letztere nicht oberflächlich sein sollen, ist selbstverständlich.

Ein Blick auf die höhere Mathematik des Altertums.

La »haute Géometrie«, heifst es in der Berliner Preisaufgabe von 1784, macht einen bedigen Gebrauch vom Unendlichgrofsen und Unendlichkleinen, aber die Mathematik des

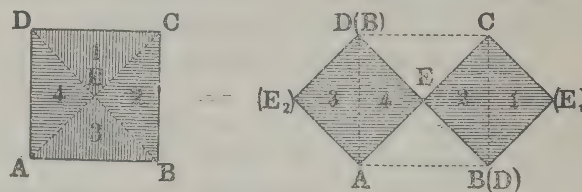
Altertums habe sorgsam vermieden »tout ce qui approche de l'infini«. Dabei hat natürlich Akademie den Teil der alten Geometrie im Auge, der zur »haute Géometrie« zu rechnen würde. Warum, so liest man zwischen den Zeilen, haben die neueren Geometer die stren und widerspruchsfreien Methoden der Alten verlassen und wie kann man den Weg zu je Methoden zurückfinden oder doch zu Methoden, die ebenso widerspruchsfrei sind? Es mufs daher daran gelegen sein, den Unterschied zwischen den Methoden des Altertums und denen Newton und Leibniz scharf zu erfassen.

Welche Probleme der alten Geometer sind nun derart, dafs die neueren sie mit Infinitesimalen lösen würden, während die Alten zu ihrer Lösung des Unendlichen nicht durften? Es sind zumeist spezielle Fälle des einen allgemeinen Problems, den Quotienten Gröfsen zweier geometrischen Gebilde zu finden, die so beschaffen sind, dafs es nicht mög ist, beide Gebilde durch Zerlegung in kleinere (aber endliche) Teilgebilde und durch andere ordnung der Teilgebilde zu je einer neuen Figur in neue Figuren solcher Art zu verwand dafs ihr Gröfsenverhältnis mit Hilfe kongruenter Teilfiguren unter Anwendung der Grundsä Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches u. s. w. gefunden werden kann.

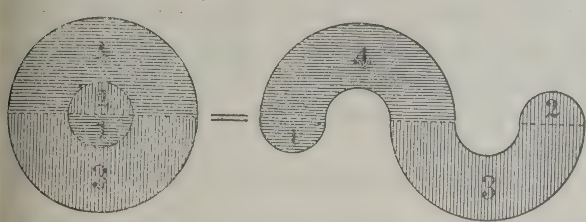
Alle Gröfsenvergleichungen und zahlenmäfsigen Gröfsenangaben fufsen auf dem Beg der Gröfsengleichheit. Für die Grundgröfsen aller Geometrie, die Strecke und den von z Geraden gebildeten Winkel, fällt das Kennzeichen der Gleichheit mit dem der Kongruenz zusamm Zwei Strecken oder zwei Winkel sind einander nur dann gleich, wenn sie kongruent sind. das Verhältnis ungleicher Strecken ermittelt werden, so findet sich das allgemeinste und ra nellste Verfahren hierzu im 10. Buche von Euklids Elementen angegeben. Es ist identisch dem, was wir im Unterrichte Kettendivision nennen. Ist durch Kettendivision das gröf gemeinschaftliche Mafs zweier Strecken gefunden, so können die Glieder des Verhältnisses Gröfsen einfach abgezählt werden. Ist das Verhältnis der vorliegenden Gröfsen in Zahlen (sind bei Euklid nur ganze Zahlen) angebbar, so besteht die Kettendivision in einer endlich Anzahl von Operationen; und umgekehrt, findet die Kettendivision bei einer bestimmten Anz von Partialdivisionen oder richtiger Partialmessungen ihren Abschlufs, so ist das Verhältnis zu vergleichenden Gröfsen in Zahlen angebbar. Zwei Gröfsen können aber ein solches Verhä nis zu einander haben, dafs die Kettendivision zwischen beiden nie zum Abschlufs gelan Hier ist eine Stelle, in der der Unendlichkeitsbegriff in die Mathematik einsetzt. Beim Studi der Leibnizischen Schriften kann man sehen, welche Bedeutung der Unendlichkeitsbegriff gera an dieser Stelle bei Leibniz für die Ausbildung mathematischer Begriffe gewinnt. Aber Eukl vermeidet das Unendliche; daraus, dafs die Kettendivision entweder eine endliche oder ei unendliche Anzahl von Operationen erfordert, folgt für ihn weiter nichts als eine der Zwe teilung in endlich und unendlich entsprechende Zweiteilung der Verhältnisse der Gröfsen na einem positiven Begriff und seiner Negation, nämlich in die, dafs zwei Gröfsen gleicher A entweder kommensurabel oder inkommensurabel zu einander sind. Aber zu Problemen, d zur höheren Geometrie gerechnet werden könnten, ergiebt sich hieraus für ihn kein Anlafs.

Das wird anders bei Vergleichung solcher Gröfsen, deren Gleichheit nicht mehr ih Kongruenz zur Voraussetzung hat; bei Flächen- und Raumgröfsen. Flächen können einand gleich sein, ohne kongruent zu sein. Die Erkenntnis der Gleichheit nicht kongruenter Figur stützt sich aber entweder auf die Kongruenz von Teil- und Hilfsfiguren oder sie stützt si

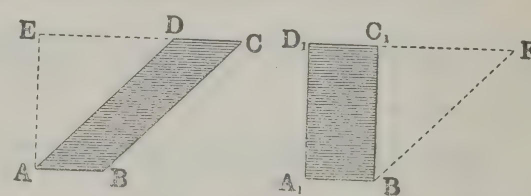
icht darauf; d. h. es ist entweder möglich, jede der miteinander zu vergleichenden Figuren n solche Teilfiguren zu zerschneiden oder zu solchen Hilfsfiguren zu ergänzen, dafs durch ine andere Anordnung derselben neue Figuren entstehen, die untereinander kongruent ind, oder aber eine solche Analysis nd darauf folgende Synthesis durch ongruente Hilfsfiguren (endlicher Gröfse) ;t nicht möglich.



So ergiebt eine einfache Änderung ı der Anordnung der vier Teildrei- cke 1, 2, 3 und 4, in die ein Quadrat urch seine Diagonalen zerfällt wird, den pythagoräischen Satz für das gleichschenklig-recht- inklige Dreieck. Die Fläche eines Kreises erweist sich als gleich mit der Fläche der schlangenförmigen Figur, weil beide sich als Summen kongruenter Teile darstellen lassen. Der Fundamentalsatz für alle Flächenvergleichung geradlinig begrenzter Figuren, dafs zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander gleich sind, wenn sie in einer Seite ($AB = A_1B_1$) und der entsprechenden Höhe übereinstimmen, wird als



chtig erkannt durch Ergänzung der Parallelogramme zu untereinander kongruenten Trapezen BCE und $A_1B_1FD_1$, da sich dann die Parallelogramme als Differenzen erweisen, in ɪnen sowohl die Minuenden ($ABCE$ ≅ $A_1B_1FD_1$) als auch die Subtrahenden $.DE \cong B_1FC_1$) einander kongruent sind. agegen ist es, so lange unendlich eine Gröfsen und Figuren nicht zuge- ssen werden, nicht möglich, die Fläche ıes Kreises und die eines Quadrats, berhaupt die Fläche einer von Kurven .d die einer von geraden Linien begrenzten Figur analog wie oben in untereinander ngruente Elementargebilde aufzulösen und dadurch die Gleichheit beider Figuren zu erkennen. ll die Gleichheit von zwei derartigen Figuren bewiesen oder das Verhältnis ihrer Gröfsen er- ttelt werden, so hat man ein Problem der »haute Géometrie« vor sich.



Fragen wir jetzt, nach welchen Methoden die Alten bei Behandlung solcher Probleme rfuhren, so ist zunächst zu konstatieren, dafs sie allgemeine Methoden überhaupt nicht rgestellt haben. Man mufs sich diese aus ihren Darstellungen einzelner Fälle abstrahieren. Man lt sie, ob zutreffend oder nicht, unter dem Namen der Exhaustionsmethoden zusammengefafst.

Allgemeine Charakteristik des Exhaustionsverfahrens von Euklid.

Die Exhaustionsmethode Euklids läfst sich, soviel ich aus seinen Elementen entnehmen ınn, in das folgende allgemeine Schema fassen.

Es seien zwei Figuren A und B von solcher Art vorgelegt, daſs es nicht möglich ist, Gröſsenverhältnis auf kongruente Elementargebilde zurückzuführen oder eine von ihnen in solc Teile zu zerlegen, daſs durch stetige und geeignete Aneinanderfügung der Teile eine oder me rere der andern Figur kongruente Figuren entstünden. Es wird gleichwohl verlangt, das V hältnis der Gröſsen A und B zu bestimmen.

Auflösung: Man konstruiere zwei Hilfsfiguren X und Y, die folgenden Bedingung genügen: 1) $X < A$, $Y < B$. — 2) Die Formen der Figuren Y und X müssen sich gege seitig bestimmen, so daſs mit der Form der einen auch die Form der andern gegeben ist, u daſs jede Formänderung der einen eine bestimmte Formänderung der andern bedingt. — 3) I Gröſsen von X und Y müssen bei aller Veränderung ein konstantes Verhältnis $X : Y = a$ einhalten. — 4) Es muſs möglich sein, die Gröſse von X durch Anfügung neuer Teile od sonst wie so zu ändern, daſs die Gröſsendifferenz $A - X$ so klein gemacht werden kann, man will, und ebenso die Gröſse von Y so zu ändern, daſs $B - Y$ so klein gemacht werd kann, als man will. — 5) Wenn man X so ändert, daſs $A - X$ kleiner wird als eine gegebe Gröſse, so soll sich die Gröſse von Y so ändern, daſs die Bedingung (1) nicht verletzt wird; u gekehrt, wenn man Y so ändert, daſs $B - Y$ kleiner als eine gegebene Gröſse wird, so soll sich so ändern, daſs immer $X < A$ bleibt. — Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das g suchte Verhältnis $A : B$ kein anderes als das von $X : Y = a : b$.

Beweis. Wäre $A : B$ nicht gleich $a : b$, so könnte nur einer der folgenden vier Fäl eintreten: 1) $\frac{a}{b} = \frac{A}{\eta}$ und entweder α) $\eta < B$ oder β) $\eta > B$. — 2) $\frac{a}{b} = \frac{\xi}{B}$ und entwed γ) $\xi < A$ oder δ) $\xi > A$. — Es wird bewiesen, daſs alle vier Fälle infolge der erfüllten B dingungen unmöglich sind.

Beweis der Unmöglichkeit des Falles α. Wäre $\frac{a}{b} = \frac{A}{\eta}$ und $\eta < B$, so könnt man Y so ändern, daſs $\eta < Y < B$. Dann wäre (Bed. 3) $\frac{X}{Y} = \frac{a}{b} = \frac{A}{\eta}$ und gleichzeitig $X < A$ un $Y > \eta$. Das ist absurd.

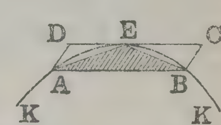
Beweis der Unmöglichkeit des Falles γ. Wäre $\frac{a}{b} = \frac{\xi}{B}$ und $\xi < A$, so könnt man (Bed. 4) X so ändern, daſs $\xi < X < A$. Dann wäre wegen (5) $Y < B$, mithi $\frac{X}{Y} = \frac{a}{b} = \frac{\xi}{B}$ und gleichzeitig $X > \xi$ und $Y < B$. Das ist absurd.

Beweis der Unmöglichkeit des Falles β. Wäre $\frac{a}{b} = \frac{A}{\eta}$ und $\eta > B$, so könnt man sich eine neue Hilfsfigur Z denken, deren Gröſse bestimmt ist durch $Z : B = A : \eta$. Dan wäre $Z < A$ und daher $Z : B = a : b$ und gleichzeitig $Z < A$, d. h. es wäre der Fall (γ) mög lich. (γ) ist aber unmöglich, also auch (β).

Beweis der Unmöglichkeit des Falles δ. Wäre $\frac{a}{b} = \frac{\xi}{B}$ und $\xi > A$, so denke man sich eine Hilfsfigur Z, die der Proportion $\xi : B = A : Z$ genügt. Dann wäre $Z < B$, und daher $a : b = A : Z$ und gleichzeitig $Z < B$, d. h. es wäre (α) möglich. (α) ist aber unmöglich, also auch (δ).

In diesem allgemeinen Schema könnten natürlich an Stelle der Bedingungen (1) auch liese treten: $X > A$ und $Y > B$. Bedingung (5) wäre dann entsprechend zu ändern. — Der 3edingung (4) genügt Euklid auf Grund von Satz 1, Buch X seiner Elemente: Nimmt nan von einer Gröſse mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als essen Hälfte u. s. w., so kommt man irgend einmal auf einen Rest, der kleiner st als eine gegebene Gröſse. Wählt man also $X_0 > \frac{A}{2}$, dann $X_1 > \frac{1}{2}(A - X_0)$, dann $_2 > \frac{1}{2}(A - X_0 - X_1)$ u. s. w., und bezeichnet δ irgend eine noch so kleine gegebene Gröſse, ɔ ist irgend einmal $A - (X_0 + X_1 + X_2 + \ldots)$ oder $A - X < \delta$.

Als ein Beispiel einfachster Art zu diesem allgemeinen Schema diene der Beweis des atzes: Die Flächen zweier Kreise stehen zu einander im doppelten Verhältnis (verhalten sich ie die Quadrate) ihrer Durchmesser. A und B sind die Kreise, X und Y einander ähnliche en Kreisen einbeschriebene reguläre Vielecke, das Verhältnis dieser Vielecke ist konstant und leich dem Verhältnisse der Quadrate der Durchmesser; sie erfüllen alle Bedingungen (1) bis (5). ler Bedingung (4) wird genügt, weil, wenn AB eine Sehne der Kurve K, $)C$ die zu AB parallele Tangente (Berührungspunkt E) und $ABCD$ ein arallelogramm ist, alsdann Dreieck $ABE = \frac{1}{2}$ Parallelogramm $ABCD$, aber egment $ABE <$ Parallelogramm $ABCD$ und daher $\triangle ABE > \frac{1}{2}$ Segment ABE ist.



Allgemeine Charakteristik des Exhaustionsverfahrens von Archimedes.

Die Methoden von Archimedes lassen sich nicht unter ein einziges Schema bringen. Man ürde hier verschiedene allgemeine Fälle zu unterscheiden haben. Ein Schema allgemeinster :t ist das folgende:

Es seien A und B zwei Figuren von so verschiedener Form, daſs es nicht möglich ist, ə eine von ihnen durch Zerlegung in Teile und durch andere Anordnung der Teile in die orm der andern überzuführen. Es wird gleichwohl behauptet, Gröſse $A =$ Gröſse B. Man fordert n Beweis dieser Behauptung.

Schema I. Man konstruiere zwei Hilfsfiguren X und Y, die den folgenden Bedingungen nügen: 1) durch irgend eine vorgeschriebene, an beiden Figuren X und Y ausgeführte gesetzifsige Veränderung, z. B. wenn X und Y Vielecke sind, durch Verdoppelung der Seitenzahl, rd erreicht, daſs X zunimmt, aber Y abnimmt, doch so, daſs 2) immer $X < A < Y$ bleibt, d daſs gleichwohl 3) das Verhältnis $Y : X$ durch hinreichend häufige Ausführung jener ge:zmäſsigen Veränderung dem Verhältnis der Gleichheit beliebig nahe gebracht werden kann. Man konstruiere zwei weitere Hilfsfiguren X_1 und Y_1, welche zu B und zu einander in diebe Beziehung treten wie X und Y zu A und zu einander, also daſs 2′) $X_1 < B < Y_1$, das Verhältnis $Y_1 : X_1$ dem der Gleichheit beliebig nahe gebracht werden kann und daſs ıliefslich immer 4) $X_1 \geqq X$ und $Y_1 \leqq Y$ ist. — Lassen sich solche Hilfsfiguren konstruieren, ist sicher $A = B$.

Denn gesetzt, es wäre $A < B$, so kann man (Bed. 3) Y und X einander so nahe bring dafs $Y : X < B : A$; dann wäre (Bed. 4) $Y_1 : X < B : A$. Dies widerspricht aber den Vora setzungen $Y_1 > B$ (Bed. 2′) und $X < A$. Es ist also nicht $A < B$.

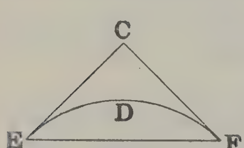
Wäre aber $A > B$, so kann man Y und X einander so nahe bringen, dafs $Y : X < A$: dann wäre (Bed. 4) auch $Y : X_1 < A : B$; dies widerspricht aber den Voraussetzungen $Y >$ und $X_1 < B$. Es ist also weder $A < B$, noch $A > B$; also ist $A =$

Anstatt mit Verhältnissen operiert Archimedes auch mit Differenzen. Bedingung (3) dann so zu formulieren: die Differenz $Y - X$ kann bei hinreichend häufiger Ausführung der setzmäfsigen Operation an X und Y kleiner als jede gegebene Gröfse gemacht werden.

Da es vielfach nicht nötig ist, zwei Paare von Hilfsfiguren X und Y sowie X_1 und zu konstruieren, sondern ein Paar, X und Y, hinreichend ist, so besitzt auch das folgende v einfachte Schema noch grofse Allgemeinheit.

Schema II. Es werden zwei von der Form der Figur A abhängige Hilfsfiguren X un konstruiert, die den Bedingungen genügen, 1) dafs immer $X < A < Y$ und auch 2) $X < B <$ bleibt und dafs gleichwohl 3) durch eine hinreichend häufig ausgeführte, einem bestimmten Ges unterliegende Veränderung an den Figuren X und Y ihr Gröfsenunterschied $Y - X$ kleiner als j gegebene Gröfse gemacht werden kann. — Können solche Figuren X und Y konstruiert werd so ist $A = B$. — Denn wäre $A > B$, so könnten X und Y einander so nahe gebracht werd dafs $Y - X < A - B$ wäre; dies stünde aber in Widerspruch mit den erfüllten Bedingung $Y > A$ und $X < B$. — Wäre aber $A < B$, so könnten X und Y einander so nahe gebra werden, dafs $Y - X < B - A$; das widerspräche aber den erfüllten Bedingungen $Y > B$ u $X < A$. Also ist $A = B$.

Ein einfaches Beispiel hierzu ist der Beweis des Satzes, dafs die Kreisfläche gleich einem Dreieck, dessen Basis gleich dem Kreisumfange und dessen Höhe gleich dem Kreisradi ist. Man setze für A die Kreisfläche, für B die Fläche des Dreiecks. X ist das dem Kre einbeschriebene, Y das umbeschriebene reguläre Polygon. Die gesetzmäfsige Operation, du die X und Y einander beliebig nahe gebracht werden können, ist die fortgesetzte Verdoppelu der Seitenzahl dieser Polygone. Dabei ist es bemerkenswert, dafs die Erfüllung der Bedingung $A < Y$ und $B < Y$ sich auf eine von Archimedes nicht bewiesene Annahme stützt, nämlic

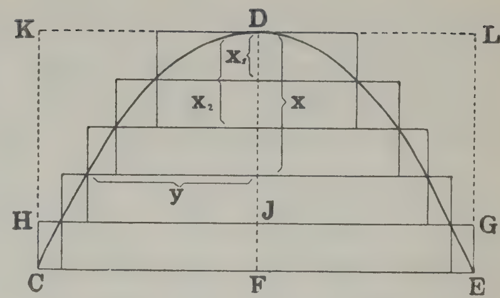


„Von andern als geraden Linien mit einerlei Endpunkten in ei Ebene sind je zwei solche ungleich, die nach einerlei Seite hohl sind, we deren eine entweder die andere ganz umschliefst oder nur zum Teil sie fällt. Die umschlossene ist die kleinere.*) Auf Grund dieser Annah ist $EC + CF >$ Bogen EDF und deshalb $A < Y$ und $B < Y$.

Als ein zweites Beispiel zu obigem vereinfachten Schema diene der Beweis des Satze Das Volumen eines Rotationsparaboloids CDE (Scheitel D, Achse DF) ist halb so grofs als d Cylinder über der Basis CE und mit der Höhe FD. — A ist das Volumen des Paraboloi Y die Summe der umbeschriebenen, X die Summe der inneren Cylinder, $Y - X$ wird glei dem letzten umbeschriebenen Cylinder $CEGH$ und kann durch Verkleinerung seiner Hö IF beliebig klein gemacht werden, so dafs der Bedingung (3) genügt wird. B ist die Häl des Cylinders über der Basis CE und mit der Höhe DF.

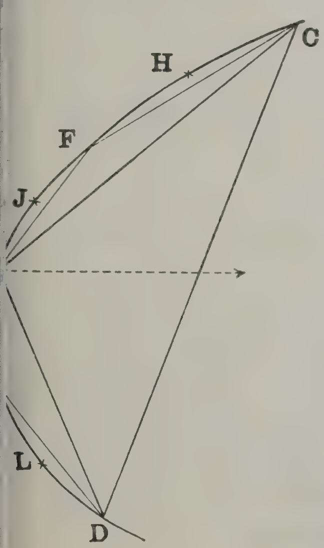
---

*) Vergl. Archimedes, Vorhandene Werke, aus dem Griechischen von E. Nizze, Stralsund 1824.



Dafs dieses B den Bedingungen (2) ge-
gt, erfordert einen Beweis. Man mache die Höhen
r inneren und äufseren Cylinder einander gleich
$=\frac{DF}{n}\Big)$; dann ist die Summe aller äufseren Cy-
ler (Y) proportional mit $y_1^2 + y_2^2 \cdots + y_n^2$,
auf Grund der Eigenschaft der Parabel pro-
tional mit $x_1 + x_2 + \cdot\cdot + x_n$; analog ist die
nme der inneren Cylinder (X) proportional mit
$+ x_2 + \cdot\cdot + x_{n-1}$. Da nun $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 3x_1$
. w., so ist $Y : X = (1 + 2 + 3 + \cdot\cdot + n) : (1 + 2 + 3 \cdots (n-1))$. Aber die Summe aller
eder einer arithmetischen Progression ist gröfser als die halbe Summe von ebensoviel Gliedern, deren
s gleich dem letzten Gliede der Progression ist; dagegen ist die Summe aller Glieder der Progression,
der das letzte Glied weggenommen ist, kleiner als jene halbe Summe $\left(\text{nämlich } \frac{(n-1)n}{2} < \frac{nn}{2}\right.$
$\left.\frac{n(n+1)}{2}\right)$. Das letzte Glied jener Progression entspricht aber dem untersten Cylinder $CEGH$,
die halbe Summe von n solchen Cylindern ist der halbe Cylinder CL, d. h. $= B$, also
$X < B < Y$.

Schema III. Auch mittels einer einzigen veränderlichen Hilfsfigur X kann der Beweis für
$=B$ erbracht werden. Man konstruiere dieselbe so, dafs den Bedingungen genügt wird: 1) $X < A$;
$X < B$; 3) durch hinreichend häufig ausgeführte, einem bestimmten Gesetze folgende Ver-
erung (Variation) der Figur X wird der Unterschied $A - X$, sowie auch $B - X$ kleiner als
nd eine gegebene Gröfse. Läfst sich eine solche Figur X konstruieren, so ist $A = B$. —
n wäre $A > B$, so könnte man X dem A so nahe bringen, dafs $A - X < A - B$; das
erspräche aber der erfüllten Bedingung $X < B$. Wäre aber $A < B$, so könnte man X dem
B so nahe bringen, dafs $B - X < B - A$; das widerspräche aber
der erfüllten Bedingung $X < A$. Also ist $A = B$.



Ein Beispiel hierzu ist der Beweis des Satzes, dafs das Parabelsegment über einer Sehne CD gleich $\frac{4}{3}$ des Dreiecks CDE ist, wenn E ein solcher Punkt der Parabel ist, dafs der durch ihn gelegte Parabeldurchmesser die Sehne CD halbiert. — Hierbei ist $A =$ Parabelsegment; $B = \frac{4}{3}$ Dreieck CDE. Das Gesetz, nach dem die Figur X konstruiert und variiert wird, besteht darin, dafs in gleicher Weise, wie $\triangle\, DCE$ über Sehne CD konstruiert worden ist, auch über jeder andern neu entstehenden Sehne das Dreieck konstruiert wird. X ist dann die Summe aller dieser Dreiecke, also anfangs das Dreieck CDE selbst, dann das Fünfeck $CFEGD$, dann ein Neuneck $CHFIEKGLD$ u. s. w. u. s. w. Aus der Natur der Parabel wird bewiesen, dafs die aufeinanderfolgenden Vergröfserungen der Figur X eine geometrische Progression mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$ bilden. Es wird ferner bewiesen, dafs die Summe aller Glieder einer solchen

Progression gleich ist $\frac{4}{3}$ des ersten Gliedes vermindert um $\frac{1}{3}$ des letzten Gliedes. $\frac{4}{3}$ des ers Gliedes ist aber B; also ist X gleich B vermindert um $\frac{1}{3}$ der Vergröfserung, die X bei der letz Variation erfahren hat. Daher ist immer $X < B$. Es ist aber auch immer $X < A$. Die B dingungen (1) und (2) sind also erfüllt. Nach Euklid X, 1 ist aber auch die Bedingung erfüllt. Denn es ist (vergl. Seite 7) $\triangle\ CDE > \frac{1}{2}$ Segment CDE u. s. w., also ist $A - X$ e Gröfse, die übrig bleibt, wenn man von A mehr als seine Hälfte, von dem Reste mehr dessen Hälfte wegnimmt u. s. w. Also kann $A - X$ kleiner gemacht werden als jede gegebe Gröfse. Da ferner $X = B - \frac{1}{3}$ des letzten Gliedes der Progression ist, deren Summe X i und dieses letzte Glied immer kleiner ist, als das dem vorangegangenen X entsprechende A — so folgt, dafs auch $B - X$ kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Gröfse. Also Bedingung (3) erfüllt; also ist $A = B$.

Die logischen Grundlagen des Exhaustionsverfahrens der Alten.

Versuchen wir jetzt, die Momente hervorzuheben, denen die soeben allgemein dargestellt Schlufsfolgerungen ihre Beweiskraft verdanken. Liegen sie in der deductio ad absurdum, sich bei jedem einzelnen Beweis in den Vordergrund drängt? Nach meinem Gefühl werd das logische Gewissen und das intellektuelle Bedürfnis nach Erkenntnis der Gründe für d Richtigkeit der jeweiligen Behauptung schon befriedigt, sobald man in jedem einzelnen Fa erkannt hat, ob den Bedingungen, auf deren Erfüllung sich die deductio ad absurdum stüt auch wirklich genügt wird, bez. genügt werden kann. Hat man erst eingesehen, dafs die B dingungen erfüllt werden können, so verzichtet man gern auf jede weitere Sicherung der sch vorhandenen Überzeugung von der Wahrheit der Behauptung durch die deductio ad absurdu Gilt es aber, sich von der Erfüllbarkeit der Bedingungen zu überzeugen, so ist eine ansehnlic Reihe von Begriffen und logischen Verkettungen derselben untereinander gleichzeitig im B wufstsein festzuhalten. Zuerst die Figuren A und B als fest und unveränderlich, gegebe nach Form und Eigenschaften, unbekannt nach dem Verhältnis ihrer Gröfsen zu einander; da die Hilfsfiguren und Hilfsgröfsen X, Y, X_1 und Y_1 als veränderlich; ferner der Verlauf d Veränderungen der X, $Y \cdots$ nach bestimmten Gesetzen und die Art der Abhängigkeit dieser G setze von der Natur der Figuren A und B; weiter der gesetzmäfsige Zusammenhang der vari belen Figuren X und Y u. s. w. untereinander, derart, dafs die Variation einer dieser Figur eine ganz bestimmt geartete Variation der übrigen Figuren zur Folge hat. Wir haben es al mit den Begriffen und logischen Beziehungen zu thun, die, fast zweitausend Jahre später, als ma infolge der Erweiterung der Geometrie durch die Arbeiten von Descartes, Fermat, Newto Leibniz und anderen immer und immer wieder auf sie geführt worden war, und als sie nac Verwendung bei ungezählten Problemen die hinreichende Klärung, Verallgemeinerung und B reicherung erfahren hatten, zu einem einzigen Begriff verdichtet wurden, — zu dem B griff, der allein das anscheinend Unmögliche, mit unendlichen, durch keine Zahl angebbaren Gröfse mit derselben Sicherheit wie mit endlichen Gröfsen zu operieren, möglich macht, und der eben de halb, sobald die Infinitesimalrechnung zu einer selbständigen mathematischen Disciplin aus gebildet war, die Grundlage der gesamten Analysis bilden mufste und seit Euler auch tha sächlich bildet: zu dem Begriffe der **Funktion veränderlicher Gröfsen.**

Das entscheidende Moment bei der Prüfung der Erfüllbarkeit der Bedingungen in dem ;eweisverfahren der alten Geometer liegt nun in der Frage, ob auf Grund des gesetzmäfsigen usammenhanges unter den Variabelen X, Y u. s. w. und den festen Gröfsen A und B nach inreichend häufig ausgeführter Variation der veränderlichen Gröfsen entweder das Verhältnis iner Veränderlichen zu einer anderen Veränderlichen oder zu einer festen Gröfse dem der leichheit beliebig nahe gebracht werden kann, oder ob die Differenz zwischen zwei Variabelen $'-X)$ oder die Differenz zwischen einer veränderlichen und einer festen Gröfse $(A-X)$ leiner gemacht werden kann, als irgend eine gegebene Gröfse. Die Überzeugung davon, dafs $=B$ ist, tritt ungeachtet der deductio ad absurdum erst dann ein, wenn man zugiebt, dafs .e Differenzen $Y-X$ und $A-X$ so klein gemacht werden können, dafs sie überhaupt keine röfse mehr haben. Dies ist aber nicht eher der Fall, als bis man die gesetzmäfsige Variation ı den variabelen Gröfsen unendlich oft ausgeführt hat, bez. ausgeführt denkt. So deckt sich ənn der Begriff desjenigen X, für das die Differenz $A-X$ wirklich kleiner ist — nicht erst einer gemacht werden kann — als jede gegebene Gröfse, vollständig mit dem Begriff der **ımme einer unendlichen konvergenten Reihe**, und A mit dem Begriffe des **Grenzwertes** eser Summe; und die Differenzen $Y-X$ und $A-X$ u. s. w. decken sich mit dem, was in athematischen Lehrbüchern des 19. Jahrhunderts als **unendlich kleine Gröfse** definiert wird. enn eine Differenz zweier variabelen Gröfsen y_1 und y wird unendlich klein genannt, wenn ese Gröfsen bei gleichzeitiger Befolgung einer vorgeschriebenen Gesetzmäfsigkeit so verändert erden können, dafs ihre Differenz kleiner wird als jede gegebene Gröfse.

Die Erkenntnis, dafs die Differenz $A-X$ kleiner als jede gegebene Gröfse wird, stützt :h, wie schon erwähnt, bei Euklid und Archimedes zumeist auf den Satz: Wenn von einer röfse AB die Hälfte oder mehr als die Hälfte, von dem Reste wieder die Hälfte oder mehr əggenommen wird u. s. w., so kommt man irgend einmal auf einen Rest, der kleiner ist als ıe gegebene Gröfse C.*) Dieser Satz wird von Euklid bewiesen. Der Beweis beginnt mit den 'orten: »Mache, was immer angeht, von C ein Vielfaches, das zunächst gröfser als AB ist.« ər in dieser Bemerkung enthaltene Grundsatz findet sich bei Archimedes so ausgesprochen**): Venn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um den der kleinere m gröfseren übertroffen wird, so oft zu sich selbst zu setzen, dafs dadurch jeder gegebene dliche Flächenraum übertroffen wird.« Hieraus kann man die Folgerung ziehen: Zwei Gröfsen eicher Art, die nicht einen solchen Unterschied haben, dafs er, mit einer hinichend grofsen Zahl multipliciert, irgend eine gegebene endliche Gröfse derselben :t übertrifft, wurden von Euklid und Archimedes als einander gleich erachtet. Diese lgerung ist für unsere Untersuchung deshalb wichtig, weil sich Leibniz mehrfach auf sie beft, um Einwürfe gegen die Wissenschaftlichkeit seiner Methode abzuwehren.

Handelt es sich aber um die Differenz $Y-X$, in der sowohl Minuend als Subtrahend riabel sind, so kann sich die Erkenntnis, dafs $Y-X$ schliefslich kleiner als jede gegebene öfse wird, nicht mehr auf den mehrfach angeführten Euklidischen Satz stützen. In dem Beiele vom Rotationsparaboloid ist $Y-X$ gleich dem untersten Teilcylinder $CEGH$. $Y-X$ rd hier deshalb kleiner als jede gegebene Gröfse, weil dieser Cylinder bei konstant bleibender sis durch Verkleinerung seiner Höhe kleiner gemacht werden kann, als jedes gegebene Volumen.

*) Euklid, Elemente X, 1. — **) Archimedes, a. a. O. S. 12.

Dieser unter alle Grenzen der Kleinheit sinkende Archimedische Cylinder unterscheidet sich ab in nichts von der Leibnizischen Infinitesimalgröfse dv in der Formel $v = \int dv$, wenn v das V lumen des Rotationsparaboloides bezeichnet.

Wir entnehmen dieser kurzen Betrachtung des Exhaustionsverfahrens der Alten das E gebnis, dafs in ihm zwar der Ausdruck des Unendlichen auf eine bewundernswert geschick Weise vermieden wird, dafs aber gleichwohl in ihm sowohl die Vorstellung unendlicher g setzmäfsig verlaufender Processe als auch die Idee unendlich kleiner Gröfsen wirl sam sind, ja das ausschlaggebende Moment bilden.

Newtons Methoden der Analysis kontinuierlich veränderlicher Gröfsen.

Um über die den Newtonschen Methoden zu Grunde liegenden Anschauungen ei sicheres Urteil zu gewinnen, genügt es nicht, nur seine »Methodus fluxionum« zu studierer man mufs auch die früher geschriebene Abhandlung: »Analysis per aequationes etc.«, sowie de späteren »Tractatus de quadratura curvarum« beachten und darf seine »Philosophiae natural principia mathematica« nicht vergessen.

An dieser Stelle kann nur ein Teil meiner Untersuchungen über diese Werke Newton zur Fixierung kommen.

Newtons »Analysis per aequationes numero terminorum infinitas.«

(Geschrieben zwischen 1660 und 1670; veröffentlicht 1711.)*)

Was Newton in dieser Schrift geben wollte, deutet er am Eingange mit den Worter an: »Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Serien mensuranda olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonstratam habes.«

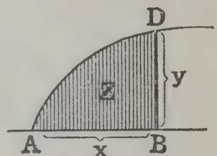
Das Problem, um das es sich hier handelt, ist ein Problem der »haute géometrie« nämlich das der Ermittelung des Verhältnisses von Gröfsen, für die auf elementar-geometrische Weise ein beiden homogenes gemeinschaftliches Mafs nicht gefunden werden kann. Zunächst handelt es sich um Flächenräume. Es wird das Verhältnis einer von Strecken und Kurventeilen begrenzten ebenen Fläche zur Fläche des Quadrats über der Streckeneinheit gesucht. Das Problem der Quadratur ist aber bei Newton ein allgemeines, nicht mehr, wie bei den Geometern des Altertums, jeweils auf eine bestimmte Figur beschränkt. Nicht mehr die Quadratur einer einzelnen Kurve soll ermittelt werden, sondern eine methodus generalis zur Quadratur aller möglichen Kurven, deren Natur durch eine Relation zwischen rechtwinkeligen Koordinaten x und y ihrer Punkte gegeben ist. Die Mannigfaltigkeit der möglichen Relationen zwischen x und y ist unbegrenzt. Wie in der elementaren Geometrie zwei Flächen, bevor für sie ein gemeinschaftliches Mafs gefunden werden kann, bei Festhaltung ihrer Gröfse verwandelt werden müssen in andere Figuren, z. B. in Rechtecke, so müssen die Gleichungen zwischen x und y bei Festhaltung der durch sie ausgedrückten Relation und Abhängigkeit zwischen x und y trans-

*) Newtoni Opuscula etc., Ausgabe Castillioneus 1744.

ormiert werden in Gleichungen anderer Form. Die Grundform, auf die Newton jede gegebene ›leichung transformiert, ist diese: $y = a x^{\alpha} + b x^{\beta} + c x^{\gamma} +$ etc., wo α, β, γ . . . rationale ›ahlen bedeuten. Die Zahl der Glieder der rechten Seite wird im allgemeinen unendlich grofs.)ies begründet den Titel der Abhandlung.

So interessant und für einen Lehrer der Mathematik insbesondere lehrreich die Methoden ınd Wege sind, auf denen Newton mit den damals beschränkten analytischen Hilfsmitteln seine ›ransformationen durchführt, und wie sehr sie auch geeignet sind, die erstaunliche Divinations- ›abe des bei Abfassung der Schrift kaum mehr als zwanzigjährigen Newton bewundern zu lassen, o gestattet der für diese Notizen zugelassene Raum doch nicht, jene Methoden und Wege hier ıäher zu verfolgen. Eines aber mufs auch hier festgestellt werden. Wir haben bei Besprechung es Exhaustionsverfahrens der Alten gesehen, dafs die Gröfsen X zufolge der Art ihrer Bildung benfalls die Summe einer unendlichen Anzahl von Gliedern $X = X_0 + X_1 + X_2 + \dots$ *ohne* ›*nde* bedeuteten, dafs aber von den Alten in jedem Falle der Beweis erbracht wurde, dafs (mit ›enützung der heutigen Schreibweise) $\operatorname{Lim}\{A - (X_0 + X_1 + X_2 + \dots)\}$ kleiner als jede egebene Gröfse wird. Auch Newton mufste, wenn er streng wissenschaftlich verfahren wollte, ›desmal, nachdem er eine Gleichung $f(x, y) = 0$*) in die Form $y = a x^{\alpha} + b x^{\beta} + \dots +$ *ohne* ›*nde* transformiert hatte, sich die Frage vorlegen, ob überhaupt und für welche Werte von x in bestimmter Wert y existiert, dergestalt, dafs $\operatorname{Lim}\left\{y - (a x^{\alpha} + b x^{\beta} + c x^{\gamma} + \dots \textit{ ohne Ende})\right\}$ leiner wird als jede gegebene Gröfse. Newton unterläfst es, diese Frage in der seinen Methoden ntsprechenden Allgemeinheit zu beantworten, obgleich er, nach Analogie mit den unendlichen ›ecimalbrüchen, nur konvergente Reihen im Auge hat. Er begnügt sich damit, sein Trans- ›rmationsverfahren durch Hinweis auf Euklids Konvergenzsatz (vergl. S. 7) zu rechtfertigen.

Newton giebt für die Quadratur der Kurven drei Regeln.



Curvarum simplicium quadratura.

Regula I.

$$\text{Si } a x^{\frac{m}{n}} = y, \text{ erit } \frac{an}{m+n}\, x^{\frac{m+n}{n}} = \text{Areae } ABD.$$

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

Regula II.

Si valor ipsius y ex pluribus istiusmodi terminis componitur, area etiam componetur ‹ areis quae a singulis terminis emanant.

Aliarum omnium quadratura.

Regula III.

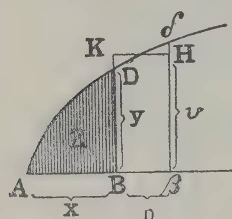
Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus terminus sit praecedentibus magis compositus, in rminos simpliciores reducendus est, operando in literis ad eundem modum quo Arithmetici in ımeris decimalibus dividunt, radices extrahunt, vel affectas aequationes solvunt; et ex istis rminis quaesitam Curvae superficiem per praecedentes regulas deinceps elicies.

---

*) Die Ausdrucksweise $y =$ einer Funktion von x und die Bezeichnung $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ u. s. w. b es bei Newton und Leibniz noch nicht. Ich bediene mich ihrer in geeigneten Fällen der Kürze wegen.

Ist die Gleichung $f(x, y) = 0$ transformiert in die unendliche Reihe $y = a x^{\alpha} +$ … $+ \ldots$, so ist Fläche $ABD = z = \dfrac{a}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + \dfrac{b}{\beta + 1} x^{\beta + 1} + \ldots$ *ohne Ende.* N… mehr wie oben vermifst man hier den Nachweis, dafs wirklich ein z existiert, für … $\operatorname{Lim}\left\{z - \left(\dfrac{a}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + \dfrac{b}{\beta + 1} x^{\beta + 1} + \ldots\right)\right\}$ kleiner als jede gegebene Gröfse wird.

Wir fragen jetzt nach der Begründung dieser Regeln. Newton giebt eine sol… nur für die Regel I, und zwar erst am Ende der Abhandlung. Übrigens beweist er ni… die Regel I, sondern ihre Umkehrung: Ist Fläche z ($= ABD$ der Kurve AD) $= \dfrac{na}{m+n} \cdot x^{\frac{m\,…}{…}}$



so ist die Endordinate y ($= BD$) $= a x^{\frac{m}{n}}$; denn es sei $\mathfrak{o} = B\beta$ e… beliebige Verlängerung der Abscisse $AB = x$*), ferner $v = BK$ so la… dafs Rechteck $\beta K = v \cdot \mathfrak{o}$ gleich der Fläche $BD\delta\beta$ wird. Zur Abkürzu… wird gesetzt $\dfrac{an}{m+n} = c$ und $m + n = p$, dann ist $z = c \cdot x^{\frac{p}{n}}$, fo… lich $z^n = c^n \cdot x^p$ und $(z + v\,\mathfrak{o})^n = c^n (x + \mathfrak{o})^p$; daher $n z^{n-1} \cdot$ … $+ M \cdot v^2 \mathfrak{o}^2 + \ldots = c^n p\, x^{p-1} \cdot \mathfrak{o} + N \cdot \mathfrak{o}^2 + \ldots$, und nach Division durch $\mathfrak{o}$,

$$n z^{n-1} \cdot v + M \cdot v^2 \mathfrak{o} + \ldots = c^n p\, x^{p-1} + N \cdot \mathfrak{o} + \ldots$$

»Si jam supponamus**) *$B\beta$ in infinitum diminui et evanescere, sive $\mathfrak{o}$ esse nihil,* erunt v et… aequales, et termini per $\mathfrak{o}$ multiplicati evanescent, quare restabit« $n z^{n-1} y = c^n p x^{p-}$… oder (zufolge der Bedeutung von z, c und p) $y = a x^{\frac{m}{n}}$; was zu beweisen war.

Diese Schlufsweise, obgleich von den fruchtbarsten Mathematikern vor und nach Newto… von Fermat und Euler vielfach angewandt, hat immer den Widerspruch der strengen Log… herausgefordert, weil die logische Strenge und Konsequenz, weil der oberste Grundsatz all… Logik, dafs beim Übergange von den Prämissen zum Schlufssatze die Begriffe ihre Bedeutu… nicht wechseln dürfen, durchbrochen werden durch Anwendung des »$\mathfrak{o}$ esse nihil« auf eine Gleichun… deren Giltigkeit nur unter der Voraussetzung eines von 0 verschiedenen $\mathfrak{o}$ erwiesen worden i… Diesem Widerspruche ist auch von hervorragenden Denkern Ausdruck verliehen worden. D… irische Bischof und Philosoph Berkeley bekämpfte obige Art zu schliefsen in seiner Schri… »*The Analyst or a discourse addressed to an infidel mathematician,* London 1734.« An die Spitz… seiner vernichtenden Kritik stellte er (Article XII) das folgende Lemma:

»If with a view to demonstrate any proposition a certain point is supposed, by virtu… of which certain other points are attained; and such supposed point be itself afterwards destroye… or rejected by a contrary supposition; in that case all other points attained thereby and consequen… thereupon must also be destroyed or rejected, so as from thenceforward to be no mor… supposed or applied in the demonstration. This is so plain as to need no proof.«

*) Newton schreibt o, vielleicht um die Kleinheit dieser Gröfse anzudeuten. Ich schreibe das deutsche … um der Verwechselung mit Null vorzubeugen.

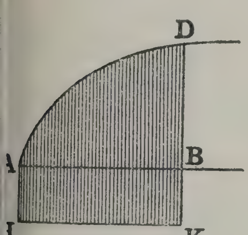
**) Opuscula Newtoni I, S. 25 f.

Lagrange, der ja 1784 Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften war, bemerkt n seinen »*Leçons sur le calcul des fonctions*« in der 18. Vorlesung mit Bezug auf obige Schlufs-veise: »On voit que Fermat a ouvert la carrière par une idée très-originale, *mais un peu obscure,* qui consiste à introduire dans l'équation une indéterminée qui doit être nulle par la nature de la question, mais qu'on ne fait évanouir qu'après avoir divisé toute l'équation par cette même quantité. Cette idée est devenue le germe des nouveaux calculs qui ont fait faire tant de progrès à la géometrie et à la mécanique; *mais on peut dire qu'elle a porté aussi son obscurité sur les principes de ces calculs.*

Wir stehen hier thatsächlich vor einem logischen Widerspruche gegen eine mathematische Beweisführung. Denn von den Forderungen der formalen Logik ausgehend, ist nichts sicherer, als as Berkeleysche Lemma. Dafs diesem Lemma aber, wenn es sich um den hier in Betracht ommenden Fall handelt, dennoch die Spitze abgebrochen werden kann, liegt in der besonderen latur des materiellen Inhalts der Vorstellungen und Begriffe des Kontinuums, der kontinuier-ichen Veränderung und des kontinuierlichen Überganges, um die es sich hier handelt. Iierauf näher einzugehen, geben uns erst die Ausführungen von Leibniz Anlafs. Hier notieren vir uns nur die Thatsache, dass Newton mit der Null wie mit einer Gröfse rechnet, dafs das eichen o bei ihm bald die Bedeutung einer Gröfse, bald die von keiner Gröfse hat, ohne dafs r es für nötig hält, dies besonders zu begründen oder als eine in der Natur der Sache be-ründete Forderung besonders zu formulieren.

ewtons Analogieschlüsse. Analyse seines Begriffs des Momentes einer veränderlichen Gröfse.

Newton behandelt in dieser Abhandlung nicht nur das Problem der Quadratur, sondern ıch das der Rektifikation. Auch dieses ist ein Problem der höheren Geometrie, insofern, als es ıch den Begriffen der Elementargeometrie ein gemeinsames Mafs zwischen einer Strecke und ner Kurve gar nicht geben kann; insofern als es, wenn man nicht zu unendlich kleinen Gröfsen eifen will, gar nicht möglich ist, die Länge einer Kurve durch eine Strecke zu messen oder e als Summe von Strecken zu betrachten, und daher das Verhältnis der Gröfse ihrer Länge ır Gröfse einer Strecke auf elementar-geometrische Weise zu ermitteln. Wir bringen daher der rt, wie Newton seine zunächst nur für Quadraturen gegebenen und bewiesenen Regeln zu lchen für Rektifikationen erweitert, von vornherein ein erhöhtes Interesse entgegen.



Newton sagt:*) »Sit ABD curva quaevis, et $AHKB$ rectangulum, cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, *areas* ABD *et* AK *describere;* et quod BK (1) sit *momentum, quo* AK (x), *et* BD (y) *momentum, quo* ABD *gradatim augetur;* et quod ex momento BD perpetim dato, possis, per praedictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum area AK (x) momento 1 descripta conferre.

Jam, qua ratione superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per praecedentes regulas elicitur, eadem *quaelibet alia quantitas ex omento suo* sic dato elicietur.«

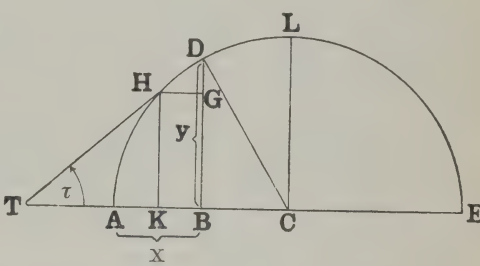
*) Opuscula Newtoni I, S. 18.

Als wichtig und neu tritt hier der Begriff des Moments auf. Aber eine klare unzwe deutige Definition dieses Begriffs fehlt. Die wahre Bedeutung des Moments ist die einer I finitesimalgröfse, der unendlich kleinen Zunahme, um die die variabele Fläche bei unendli kleiner Verrückung der Ordinate wächst. Diese Deutung stimmt zusammen mit dem: momentum e quo ABD gradatim augetur; sie stimmt aber scheinbar nicht zusammen damit, dafs das Mome von AK gleich 1, und das Moment von ABD gleich BD, also jeweils erstens eine endlich Gröfse und zweitens eine Länge sein soll. In Wahrheit ist aber das Moment von AK nic $= 1$ und das Moment von ABD nicht $= BD$, sondern beide Momente **verhalten** sich zu ein ander wie $BK : BD$, nach dem Satze: Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten sich w ihre Höhen. Die beiden unendlich kleinen Flächenzunahmen von AK und ABD stehen ebe auf gemeinsamer, aber unendlich kleiner Basis und werden beide als Rechtecke mit den Höhe BK und BD aufgefafst. Das Moment von ABD ist nicht BD, sondern die Gröfse $v \cdot \mathfrak{o} = y$ im Beweis zu Regel I, um die z wächst. Im übrigen aber sind es von Leibniz, nicht vo Newton ausgesprochene Ideen, durch die die Klarstellung des Momentbegriffs möglich wir Vorausgesetzt, dafs jemand von Infinitesimalrechnung nichts wüfste und diese Abhandlun studierte, so würde er schwerlich aus dem Wortlaut Newtons über den Begriff des Moments z einer klaren, mathematisch definierbaren Ansicht kommen. Buchstäblich genommen ist da Moment der Fläche nach Newtons Darstellung eine Strecke, nämlich die Ordinate, durch di die Fläche beschrieben wird. Daran müssen wir uns einstweilen halten.

Newton sagt also: Ich besitze eine Regel, um aus der gegebenen Beziehung zwische der Ordinate y und der Abscisse x die zwischen x und y und dem Kurvenstück $\widehat{AD}$ gelegen Fläche aus der Länge x zu berechnen. x und y bedeuteten bisher nichts anderes als Strecken bez. Mafszahlen von Strecken. Nun aber wird die Bedeutung von x geändert. An Stelle vo x tritt das Produkt $1 \cdot x$, worin 1 nicht als Zahlencoefficient, sondern als Strecke AH, als Läng der Mafseinheit angesehen wird. Das Zeichen x hat also einmal die Bedeutung einer Strecke ein andermal die Bedeutung einer Fläche (AK). Durch parallele Verschiebung der 1 (BK wird die Fläche x beschrieben; in gleicher Weise wird die Fläche ABD beschrieben durc parallele Verschiebung von BD $(= y)$. 1 funktioniert also in Beziehung auf Fläche AK gerad so wie y in Beziehung auf ABD. In dieser Funktion aufgefafst sind beide einundderselbe Be griff, den Newton mit Moment bezeichnet. Nach den gegebenen Regeln erzeugt das Moment 1 die Fläche x, und das Moment $a . x^{\frac{m}{n}}$ die Fläche $\frac{a\,n}{m+n}\, x^{\frac{m+n}{n}}$.

Wie nun, wenn nicht die Fläche, sondern die Länge der Kurve, deren Natur durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten x und y ihrer Punkte gegeben ist, als Funktion von x dargestellt werden soll? Die Regel wird diese sein: Das konstante Moment 1 einer Kurvenlänge erzeugt die Länge x, und das variabele Moment ax^α erzeugt die Länge $\frac{a}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$. Nicht die Ordinate y ist daher in diesem Falle auf die Form $a x^\alpha + b x^\beta + c x^\gamma + \ldots$ zu bringen, sondern diejenige Gröfse, die als Moment der Kurvenlänge zu gelten hat. Bezeichnen wir sie mit λ, so wird auf Grund der gegebenen Gleichung der Kurve zwischen x und y das Moment λ durch x dargestellt und auf die Form $\lambda = a x^\alpha + b x^\beta + \ldots$ gebracht; dann ist $\frac{a}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + \frac{b}{\beta+1} \cdot x^{\beta+1} + \frac{c}{\gamma+1} \cdot x^{\gamma+1} + \ldots$ die Länge $\widehat{AD}$ der Kurve.

Dieser Gedankengang ist von Anfang bis zu Ende eine Analogie. Wir stehen nun vor der Frage: Was ist dieses λ, dieses Moment der Kurvenlänge? Führen wir die Analogie weiter, so ist die einzige Antwort diese: ein Etwas, das, während es bewegt wird, die Kurvenlänge beschreibt. Also ein Punkt! Wenn aber λ nur einen Punkt bezeichnet, wie kann es da die Gröfse $ax^{\alpha} + b\,x^{\beta} + \cdots$ haben, worin x doch Mafszahl einer Strecke AB ist? Niemand wird leugnen, dafs die Klarheit und Evidenz, die man mathematischen Deduktionen sonst nachrühmt, hier getrübt ist. Wir suchen das, was sich aus der allgemeinen Regel nicht mit Eindeutigkeit ergiebt, aus den Anwendungen, die Newton macht, zu gewinnen. Wir folgen seiner Rektifikation des Kreises.*)



»Sit $ADLE$ circulus, cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducta tangente DHT et completo *indefinite parvo* rectangulo $HGBK$, et posito $AE = 1 = 2AC$; erit, ut BK, sive GH, momentum basis AB (x), ad HD momentum arcus $AD :: BT : DT :: BD\left(\sqrt{x-xx}\right) : DC\left(\frac{1}{2}\right) :: 1\,(BK) : \frac{1}{2\sqrt{x-xx}}\,(DH)$. Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ sive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ est momentum arcus AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} +$ etc. Quare, per regulam secundam, longitudo arcus AD est $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \ldots$ etc.«

Das Fundament dieser Herleitung besteht 1) darin, dafs eine unendlich kleine Figur einer bez. zwei endlichen Figuren ähnlich erachtet und die Verhältnisse der Seiten der unendlich kleinen Figur dementsprechend den Verhältnissen homologer Seiten der endlichen Figuren gleich gesetzt werden; 2) darin, dafs das Zeichen 1 einmal die Längeneinheit im Gebiete endlicher Strecken, ein andermal die Längeneinheit im Gebiete unendlich kleiner Strecken bedeutet, — denn es ist sowohl $AE = 1$ als auch die unendlich kleine Strecke $BK = 1$; 3) darin, dafs Newton stillschweigend ein unendlich kleines Stück DH der Kurvenlänge identisch setzt einem unendlich kleinen Stück einer geraden Linie, nämlich der Tangente des Kreises im Punkte D. Zufolge (1) ist $\frac{\text{Dreiecksseite } DH}{\text{Dreiecksseite } GH} = \frac{DT}{BT} = \frac{CD}{DB} = \frac{1/2}{y}$; aber die Gleichung des Kreises lautet $y = \sqrt{x(1-x)}$; folglich ist $\frac{DH}{GH}$ oder $\frac{DH}{BK} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

Zufolge (2) ist dann weiter die unendlich kleine Strecke $DH = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$; endlich zufolge (3) der unendlich kleine Kurvenbogen $\widehat{DH}$ dasselbe wie die unendlich kleine geradlinige Strecke $\overline{DH}$. Dieser unendlich kleine Bogen ist aber das wahre Moment λ der Kurvenlänge. λ ist also eine variabele Infinitesimalgröfse, gemessen an einer konstanten, innerhalb des Gebietes der unendlich kleinen Gröfsen als Einheit angenommenen zweiten

*) Opuscula I, S. 19.

Infinitesimalgröſse; die Gleichung $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ hat durchaus nur die Bedeutung
Proportion: Wie sich die Einheit im Gebiete endlicher Strecken (hier der Kreisdurchmess zu der aus der Strecke x $(= AB)$ und 1 $(= AE)$ gemäſs dem Ausdruck $2\sqrt{x(1-x)}$ gebilde Strecke verhält, so verhält sich der unendlich kleine Zuwachs λ der Bogenlänge zu dem e sprechenden innerhalb des Gebietes unendlich kleiner Strecken als Einheit betrachteten unendl kleinen Zuwachs der Länge x.

Um aber auf die Gleichung $\lambda \left(= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} + \ldots$ die Regel anwenden zu können, muſs man deren rechte Seite und folglich auch die linke als Zahl auffass Die Zahl rechter Hand ergiebt sich, wenn man an Stelle von x überall die Quotienten $\frac{x}{AE}$, d. die Maſszahl von x unter der Voraussetzung, daſs der Maſsstab $= AE$ ist, setzt; λ ist dann al der Quotient $\frac{DH}{BK}$, d. h. die Maſszahl der unendlich klein zu denkenden Länge DH unter d Voraussetzung, daſs der Maſsstab die unendlich klein zu denkende Länge BK ist.

So tritt uns der Begriff des Moments in dreifach verschiedener Auffassung entgege

1) Das Moment der Fläche ABD war die Strecke BD, also eine der Fläche heteroge Gröſse, von nur einer Dimension, wo die Fläche eine Gröſse von zwei Dimensionen ist. A Gründen der Analogie ist dann das Moment einer Länge ein Punkt. Aber Punkte haben kei Gröſse mehr; zwei Punkte können in keine Gröſsenvergleichung zu einander gebracht werde Deshalb erscheint nun da, wo es sich um Längen handelt.

2) das Moment nicht mehr als etwas mit dem, wovon es das Moment ist, Heterogen sondern es ist homogen mit ihm. Aber nur homogen der Art nach, nicht homogen der Gröſ nach. Das Moment der Länge ist zwar auch eine Länge, aber eine unendlich kleine Länge; der Pun ist, sofern er Moment einer Länge ist, nicht mehr ausdehnungslos, sondern heiſst nun *punctu sive linea infinite parva.* Eine endliche und eine unendlich kleine Länge sind aber der Gröſ nach heterogen, weil sie nicht mit einem gemeinschaftlichen Maſse verglichen werden könne Nimmt man den Maſsstab endlich, so wird die Gröſse der endlichen Länge durch eine Za ausgedrückt; es giebt aber keine Zahl, die bei demselben Maſsstabe die Gröſse einer unendlic kleinen Länge darstellen könnte. Soll aber eine Gröſse in die Analysis, in die Rechnung ei geführt werden können, so muſs sie sich durch eine Zahl darstellen lassen; also muſs als Ma der unendlich kleinen Linie, des Moments der Länge, wieder eine unendlich kleine Lin genommen werden. Daher erscheint

3) das Moment als Verhältnis zweier unendlich kleinen Strecken DH und BK. Bedien man sich, vorgreifend, der Leibnizischen Sprache, und nennt die Länge der Kurve s, so erschein in der dritten Auffassung das Moment von s als das Differentialverhältnis $\frac{ds}{dx}$.

Will man von diesem Begriff des Moments ausgehen und von der Rektifikation durc Analogie zur Quadratur gelangen, so darf das Moment von Fläche ABD nicht als eine Strecke, d. h. al etwas mit der Fläche Unvergleichbares, sondern es muſs als ein unendlich kleiner Flächenzuwachs bez. als Quotient eines variabelen unendlich kleinen Flächenincrements zu einer anderen, konstanten

innerhalb des Gebietes unendlich kleiner Flächengröfsen als Einheit betrachteten unendlich kleinen Fläche angesehen werden.

Hierauf könnte jemand entgegnen, dafs mit dieser Auffassung die Newtonsche Erklärung des Moments der Fläche ABD gleich der Ordinate $BD = y$ vollständig übereinstimme; denn wenn z die Fläche bezeichne, so sei ja $\frac{dz}{dx} = y$. Es ist aber zweierlei, ob man $\frac{dz}{dx} = y$ als eine Folgerung aus der Definition des Moments der Fläche als eines Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ ableitet, oder ob man y schlechthin dieses Moment nennt. $\frac{dz}{dx}$ und y werden zwar durch gleiche Zahlen dargestellt, sind aber dennoch ganz verschiedene Begriffe. y ist das Verhältnis zweier Längen, der Länge von y zur Längeneinheit 1; $\frac{dz}{dx}$ ist das Verhältnis zweier Flächen, des Flächenelementes dz zum Flächenelement dx oder $1 \cdot dx$. Dafs beide Zahlen einander gleich sind und man hinterher die Zahl $\frac{dz}{dx}$ als Strecke y deuten kann, liegt darin, dafs jede Flächenzahl als Produkt zweier Längenzahlen angesehen werden kann, die auf zwei verschiedene Dimensionen, Länge und Breite, zu beziehen sind. Indem man nun dz als das Produkt der Strecken y und dx, das Flächenelement dx aber als das Produkt der Längen 1 und dx ansehen mufs, folgt $\frac{dz}{dx} = \frac{y \cdot dx}{1 \cdot dx} = \frac{y}{1} = y$.

Indem Newton schlechthin y als das Moment der Fläche ABD bezeichnet, unterdrückt er von vornherein den Kürzungsfaktor dx in dem Differentialquotienten und verschleiert dadurch die wahre Bedeutung des Begriffs. Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen beim Beweis zu Regel I ist der wahre Begriff des Flächenmoments nach Auffassung (3) der Quotient (vergl. Fig. S. 14 u. 15) $\frac{BD \cdot \mathfrak{o}}{BK \cdot \mathfrak{o}} = \frac{BD}{BK} = \frac{BD}{1} = BD = y$; also ist nur scheinbar das Moment der Fläche dasselbe wie y.

Für das Moment einer Länge läfst sich eine ähnliche Kürzung des Differentialquotienten durch einen unendlich kleinen Faktor nicht ausführen. Im Verhältnis $\frac{ds}{dx}$, wo s eine Länge bedeutet und daher ds und dx von nur einer Dimension sind, giebt es in Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen homogenen Faktor mehr, der sich durch Division entfernen liefse. Das verhindert aber nicht, ebensogut wie beim Flächenmoment andere Gröfsen anzugeben, die dem Kurvenmoment dem Zahlenwerte nach gleich sind. So ist in dem vorliegenden Falle $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2y}$, d. h. die doppelte Länge von y ist das Reciproke des Kurvenmomentes; im allgemeinen ist (Fig. S. 17) $\frac{ds}{dx} = \frac{DT}{TB} =$ secans des Winkels, den die Richtung des Kurvenelementes mit der Richtung der x-Achse bildet; aber von vornherein sagen zu wollen, das Moment der Kurvenlänge sei secans (BTD), würde unverständlich erscheinen, weil es ohne Erläuterung unverständlich wäre zu sagen, die Kurve $\widehat{AD}$ wird beschrieben, wenn die Sekante des Winkels BTD bewegt wird. Und doch wäre das so wenig sinnlos, wie wenn Newton y das Moment von Fläche ABD nennt. Die Kurve AD wird nämlich beschrieben von dem bewegten Punkte D. Wie nun eine Ordinate y, wenn sie durch parallele Verschiebung die Fläche ABD beschreiben soll, in jedem Augenblick

eine andere aber bestimmte von x abhängige Gröfse haben mufs, so hat der Punkt D, währ er die Kurve AD beschreibt, zwar nicht in jedem Augenblick eine andere Gröfse — denn Punkt hat keine Gröfse, — wohl aber in jedem Augenblick eine andere von der Gröfse vo abhängige Bewegungsrichtung. Diese Richtung wird für jeden Wert von x durch Gleichung secans $(BTD) = \frac{HD}{KB} = \frac{ds}{dx}$, d. h. in unserem Beispiele $= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ gegeben. Da kann die Bewegung des Punktes D anstatt durch eine Relation zwischen seinen rechtwinkli Parallelkoordinaten $AB = x$ und $BD = y$ ebensogut durch eine Gleichung zwischen $AB = x$ secans $(BTD) = \sec\tau$ bestimmt werden. Ist für einen bestimmten Wert von x, z. B. für $x =$ die Länge von BD und damit der zu $x = 0$ gehörige Kurvenpunkt vorgeschrieben, so ist Kurve durch eine Gleichung zwischen x und $\sec\tau$ vollständig definiert. Bezeichnet man kurz mit η, so erhält man anstatt der Regel I diese: Ist $\eta = ax^{\frac{m}{n}}$ (z. B. $\eta = 3\sqrt[5]{1 : x^2} = 3x$ die Gleichung einer Kurve und P der zu $x = 0$ gehörige Kurvenpunkt, so ist $\frac{an}{m+n}x$ (z. B. $\frac{3 \cdot 5}{-2+5} x^{\frac{-2+5}{5}} = 5\sqrt[5]{x^3}$) die Länge dieser Kurve vom Punkte P bis zu dem Pun dessen senkrechte Projektion B auf die x-Achse durch $AB = x$ gegeben ist. Und mit demsel Rechte, mit dem Newton in Regel I y das Moment der Fläche nennt, könnte hier η das Mom der Länge genannt werden.

Die Gleichung des Kreises, der durch Punkt A geht und dessen Durchmesser $= 1$ Teil der x-Achse ist, würde dann nicht $y = \sqrt{x(1-x)}$, sondern $\eta = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ lauten. Es w dasselbe, als wenn man in Leibnizischer Sprache, wenn z die Fläche ABD und s die Länge $\widehat{AD}$ zeichnet, die Natur der Kurve ausdrückte durch (1) $dz = dx\sqrt{x(1-x)} = ydx$ oder durch (2) ds $\frac{dx \cdot 1}{2\sqrt{x(1-x)}} = dx \cdot \sec\tau$. Der Faktor von dx ist in der ersten Gleichung das Moment Fläche z, in der zweiten das Moment der Länge s. Wollte man y einführen, so hätte m an Stelle der zweiten Gleichung die Differentialgleichung $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$, die, we bestimmt ist, dafs die Kurve durch Punkt A gehen, d. h. dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ sein so mit der Gleichung $y = \sqrt{x(1-x)}$ gleichbedeutend ist.

Indem also Newton die Linie BD oder y als das Moment bezeichnete, quo ABD gradati augetur, verschleierte er die wahre Bedeutung des wichtigsten Grundbegriffs seiner Methoc den des Momentes einer stetig veränderlichen Gröfse, die von einer andern stetig veränderlich Gröfse abhängt. That er dies nur, um sich kurz zu fassen und um seine »*methodum generale breviter explicatam potius quam accurate demonstratam*« zu geben? Das ist unwahrscheinlich; der die Fassung des Ganzen, insbesondere der Übergang von der Quadratur zur Rektifikation wä nicht länger, sondern kürzer und zugleich bestimmter und allgemeiner geworden, wenn Newto die zum Beweis der Regel I doch nun einmal nötig gewordene und mit einem „literaler Zeichen versehene Gröfse o für eine unendlich kleine Vergröfserung von x und die in richtig Konsequenz hiervon bezeichnete Gröfse $y \cdot o$ für eine durch o bedingte unendlich kleine Ve

größerung der Fläche ABD durch alle geometrischen Betrachtungen hindurch beibehalten, d. h. wenn er als Moment der Länge x die unendlich kleine Länge o und als Moment der Fläche die unendlich kleine Fläche $y \cdot o$ bezeichnet hätte. — Oder war es die Scheu vor dem Unendlichkleinen, die Newton bei Abfassung dieser Abhandlung daran hinderte, eine konsequente und allgemein giltige Definition des Momentbegriffs zu geben, und die bei ihm das Unendlichkleine nur dann zum Ausdruck und zur Bezeichnung gelangen liefs, wenn es durch kein Mittel mehr zu verkleiden war? Denn wenn auch das Moment y mit einer Fläche nicht homogen ist, so hat es doch noch eine endliche Gröfse und kann mit einer anderen gleichartigen Gröfse, die bei ihrer Bewegung die Fläche x beschreibt und die als Einheit dient, verglichen werden, während $y \cdot o$ etwas Unendlichkleines sein würde. Aber gemäfs der Wendung: »*Supponamus* o *in infinitum diminui et evanescere sive* o *esse nihil*« ist „unendlich klein" und „nichts" einunddasselbe, also wäre auch $y \cdot o$ ein Nichts, und als die Einheit, an der $y \cdot o$ gemessen würde, müfste wieder ein Nichts genommen werden. Zieht auf Grund ähnlicher Erwägungen Newton vor zu sagen*): »*Notandum est, quod unitas ista, quae pro momento ponitur, est superficies cum de solidis, et linea cum de superficiebus, et punctum cum de lineis agitur.*«? Nun tritt aber, in folgerichtiger Analogie davon, als Moment einer Fläche die die Fläche beschreibende Linie zu setzen, als Moment einer Linie der diese beschreibende Punkt auf. Aber das Merkmal des Punktes ist es gerade, dafs er überhaupt keine Gröfse hat. Also kann er kein Moment sein; denn ein Moment mufs eine Gröfse, sogar eine veränderliche Gröfse haben können, die in ihrem Verlaufe, während die Linie beschrieben wird, mit einem anderen, gleichartigen, aber konstanten und als Einheit dienenden Momente verschiedene angebbare Zahlenverhältnisse bildet. Wie hilft sich Newton aus dieser Enge heraus? Mit Gewalt! Denn ein Gewaltakt ist es, wenn er gleich darauf erklärt: »*Nec vereor loqui de unitate in punctis.*« Gewaltsam wird damit der an sich ausdehnungslose Punkt zu einer Länge ausgestreckt, während vorher ohne zwingende Not der Raum zu einer Fläche, die Fläche zu einer Linie zusammengedrängt worden waren. Und mit dieser Gewaltthätigkeit gegen mathematische Begriffe, und mit dieser Inkonsequenz gegen sich selbst kapituliert Newton schliefslich doch noch vor der Infinitesimalgröfse, indem er obigen Worten hinzusetzt: »*punctis sive lineis infinite parvis.*« Und als ob er das Bedürfnis fühlte, sich zu decken, fährt er fort: »*Siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometrae, dum utuntur methodis indivisibilium.*« Darf man aus dieser Stelle schliefsen, dafs Newton, als er diese Abhandlung schrieb, noch so sehr in Cavalierischen Vorstellungen befangen war, dafs sich in seinem Geiste die volle Klärung des seine Methode beherrschenden Begriffs des Moments noch gar nicht vollzogen hatte? — Oder dachte er wie Leibniz**): »Es ist aber guth, dafs, wann man etwas würcklich *exhibiret*, man entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die *schliche* kommen.«?

Das »punctum sive linea infinite parva« erinnert an das o im Beweis zu Regel I, das ja auch in zwei einander ausschliefsenden Bedeutungen angewandt wurde. Diese schwankende Auffassung von Fundamentalbegriffen, die uns bei Newton mehrfach begegnet, veranlafste Berkeley zu dem Urteil, dafs Newton, um Widersprüche zu verdecken, mit einem Worte verschiedene ineinanderfliefsende Grundvorstellungen bezeichne und die Prinzipien verwirre.***) *The notion of fluxion is shifted: it is placed in various lights: points which should be clear as*

*) Opuscula I, S. 19. — **) Leibniz an den Freiherrn von Bodenhausen. — ***) The Analyst, X.

first principles are puzzled; and terms which should be steadily used are ambiguous.« Na
dem, was wir aus der eben besprochenen Abhandlung über die aus der Vorstellung der B
wegung entstehenden Grundbegriffe der Newtonschen Geometrie haben entnehmen können,
es uns nicht möglich, Berkeley zu widerlegen. Sehen wir zu, ob die schweren Vorwürfe die
Idealisten auch gegenüber Newtons anderen Darlegungen seiner Methoden berechtigt sind.

Newtons »Methodus fluxionum et serierum infinitarum.«

(Entstanden gegen 1670, zuerst veröffentlicht 1736.)*)

In der Einleitung, die 20 Seiten umfaſst, giebt Newton, wie in der vorigen Abhandlu
seine Näherungsmethoden zur numerischen Auflösung von Gleichungen, d. h. zur Darstellu
der Wurzeln einer gegebenen Gleichung durch einen unendlichen Dezimalbruch, und in V
allgemeinerung dieses Verfahrens die Transformation einer zwischen zwei Variabeln x und
gegebenen Gleichung in die Form $y = a x^{\alpha} + b x^{\beta} + c x^{\gamma} + \dots$ etc. Diese Analysis will Newt
auf Probleme anwenden, die geeignet seien, über die Natur der Kurven mehr Licht zu ve
breiten. Alles, was bei Behandlung dieser Probleme Schwierigkeiten mache, lasse sich zurüc
führen auf folgende zwei Grundprobleme:

I. »*Longitudine descripti spatii semper (id est quovis temporis momento) data, inven
velocitatem motus tempore proposito.*«

II. »*Velocitate motus semper data, invenire longitudinem spatii descripti tempo
proposito.*«

Es handelt sich also um drei variabele Gröſsen: Zeit, Geschwindigkeit, Weg. 1. Proble
Gegeben der Weg als Funktion der Zeit; gesucht die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.
2. Problem: Gegeben die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit; gesucht der Weg als Funkti
der Zeit. Aber Newton meint damit keineswegs die Grundprobleme der Mechanik. Er w
sich nur des Bildes der Zeit, der Bewegung und der Geschwindigkeit bedienen, um anschauli
zu machen, daſs wenn von zwei Variabelen x und y, die durch eine Gleichung untereinand
verbunden sind, die eine, x, in gleichen Zunahmen kontinuierlich wächst, die andere, y,
ungleichen Zunahmen kontinuierlich wächst, bez. in ungleichen Verkleinerungen kontinuierli
abnimmt, — indem er von der Meinung ausgeht, daſs jene Abhängigkeit zwischen x und y oh
solche Veranschaulichung, ohne die Vorstellung gleichzeitiger Zu- oder Abnahmen (das si
eben hier die in Frage kommenden Geschwindigkeiten), schwer faſslich sein würde. »Hinc f
ut in sequentibus considerem quantitates tanquam genitas *continuo incremento,* ut spatium, qu
corpus aut quaelibet res mota describit.« Obgleich sich hier Newton der Grundform aller stetig
Veränderung und alles stetigen Verlaufes, der Vorstellung des gleichmäſsigen Zeitflusses bedien
so bemerkt er doch ausdrücklich, daſs ein Maſs der Zeit nur an etwas gewonnen werden könn
das selbst nicht Zeit ist, sondern sich in der Zeit verändert. Daher wird irgend eine variabe
Gröſse, zumeist die unabhängige Variabele, die bei Newton *quantitas correlata* heiſst, der Ze
substituiert. Jede abhängige Variabele heiſst *quantitas relata.***) »Cum autem hic *Tempus* tantu
considerandum veniat, tanquam expositum et mensuratum aequabili motu locali, et, praetere

*) Newtoni Opuscula I, S. 31 bis S. 199. — **) Opuscula I, S. 54 und S. 65.

um solae quantitates ejusdem generis invicem comparari valeant, ut et velocitates, quibus augentur ut minuuntur: idcirco in iis quae sequuntur, *tempus formaliter non considero*, sed suppono, quod na ex propositis quantitatibus *homogenea cum aliis* crescat *aequabili fluxu*, ad quam ceterae, ınquam ad tempus, referantur, quae ideo per analogiam non inconcinne dici potest *Tempus*.)uoties igitur vox *Tempus* in sequentibus invenietur, hoc verbum sumendum est, non quasi ımpus intellexissem in sua *formali* significatione, sed tanquam significans quantitatem illam a ımpore diversam, cujus aequabili incremento vel fluxu tempus exponitur et mensuratur.« — *Fluentes* vocabo quantitates has, quas considero tanquam gradatim et indefinite crescentes.« ie werden mit den letzten Buchstaben u, x, y, z des Alphabets bezeichnet zur Unterscheidung ɔn den quantitates cognitae et determinatae a, b, c etc. »At velocitates, quibus singulae fluentes ıgentur per motum generantem (quas velocitates appello *Fluxiones*, aut simpliciter *Velocitates* vel *eleritates*) exprimuntur iisdem litteris puncto auctis, sic $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$.«

Wie in der vorigen Abhandlung der Begriff des Moments einer mathematisch exakten efinition entbehrte, so hier der Begriff der Fluxion oder velocitas. Dort hieſs es, das Moment ner Gröſse z ist das, »quo z gradatim augetur« infolge der Bewegung einer andern Gröſse. ier heiſst es: *Velocitates* oder *Fluxiones* der Fluenten sind das, »*quibus fluentes augentur* *r motum generantem.*« Dürftiger kann wohl ein mathematischer Fundamentalbegriff nicht finiert werden. Wir werden daher die mathematische Definition des Fluxionsbegriffs aus den nwendungen, die Newton davon macht, zu abstrahieren haben.

Damit sind bei Newton die Grundprobleme I und II erledigt. Newton lieſs sich, wie ir schon bemerken konnten, vielfach von Analogien leiten: Die Einführung der beiden eben nannten Probleme hat denn auch für das folgende keine andere Bedeutung, als die des Hineises darauf, daſs zwei oder mehrere kontinuierlich veränderliche Gröſsen x, y, z, u etc., die ırch eine oder mehrere Gleichungen $f(x, y, \ldots) = 0$ voneinander abhängig gemacht sind, wie ihre entsprechenden (gleichzeitigen) Änderungen sich untereinander **analog** verhalten, wie e Zeit, die gleichzeitigen Wege und gleichzeitigen Geschwindigkeiten bewegter Körper in der echanik.

Newton geht nun ohne weiteres über zur Verwertung dieser Analogie bei der Lösung n 12 allgemeinen Problemen der analytischen Geometrie. Wir haben, da wir nicht oberchlich arbeiten wollen, hier nur noch Raum für die beiden ersten und wichtigsten dieser obleme.

Problema I.

»*Data relatione, quam invicem habent fluentes quantitates; determinare relationem, ae inter earum fluxiones intercedit.*«

Solutio.

»Aequationem, qua data relatio exprimitur, dispone juxta dimensiones alicujus ex fluenus quantitatibus, quas includit, puta x, et ejus terminos multipla per quancumque arithmeticam ɔgressionem, et deinde per $\frac{\dot{x}}{x}$: Hanc operationem seorsum perfice pro quavis fluenti quantitate; n fac aggregatum ex his omnibus factis aequale nihilo, et habebis petitam aequationem.«

Wir werden diese Solutio das Newtonsche Fluxionstheorem nennen. Wir le
Gewicht darauf, daſs dasselbe nicht auf eine Gleichung mit nur zwei Fluenten beschränkt
sondern sich wegen des »han c operationem perfice pro *quavis fluenti* quantitate« auf Gleichun
mit beliebig vielen Fluenten erstreckt, die vorher auf Null reduziert, d. h. auf die Fo
$f(x, y, z, u, \cdots) = 0$ gebracht worden sind. Das »dispone juxta dimensiones etc.« beweist, d
nur Gleichungen von der Form $\Sigma a x^p y^q z^r \cdots = 0$ gemeint sind, nicht solche, in denen Glie
von der Form $(a + bx)^p$, wo p irgend eine positive oder negative rationale Zahl ist, und ä
liche vorkommen. Das »multipla per *quancumque* arithmeticam progressionem« scheint uns
Deutlichkeit der Vorschrift nicht zu erhöhen. Aus den Exemplis ergiebt sich, daſs jedes
die Progression gemeint ist, die die Exponenten der betreffenden Fluente in den einzel
Gliedern bilden.

Beispiel:*) »Relatio quantitatum x, y et z exprimatur aequatione $2y^3 + xxy - 2c$
$+ 3yzz - z^3 = 0$.« »Relatio, quae est inter fluentium celeritates aut fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ exponi
per« $2xy\dot{x} + 6yy\dot{y} + xx\dot{y} - 2cz\dot{y} + 3zz\dot{y} - 3zz\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$. In den Opuscu
steht auffälligerweise »$4yy\dot{y} - \dfrac{z^3\dot{y}}{y} + 2yx\dot{x} - 3zz\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$«; d. h. die Glie
mit $\dot{y}$ sind falsch gebildet. Liegt hier ein Versehen Newtons oder des Herausgebers vor? Glei
viel, wir geben ihm keine Bedeutung.

Solutionis Demonstratio.**)

Fluentium quantitatum *Momenta* (videlicet earum *partes indefinite parvae*, quar
accessione in *indefinite exiguis partibus temporis* quantitates ipsae jugiter augentur) sunt
velocitates, quibus fluunt aut crescunt.

Quapropter, si momentum alicujus (puta x) repraesentatur facto ex ejus celeritate $\dot{x}$
quantitatem indefinite parvam (id est $\dot{x}o$) momentum aliarum u, y, z repraesentandum erit p
$\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, quia $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ et $\dot{z}o$ invicem habent eandem rationem quam $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$.

Jam, quia momenta, ex. gr. $\dot{x}o$ et $\dot{y}o$ sunt incrementa indefinite parva, quibus fluent
quantitates *x et y augentur per indefinite parva temporis intervalla,* ex eo sequitur has quantitat
x et y, *post indefinite parva temporis spatia evasisse* $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$. Aequatio vero, quae quibu
cumque temporibus indiscriminatim exprimit relationem fluentium quantitatum, aeque be
exprimet relationem quae intercedit inter $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$, ac eam quae est inter x et y, ita
in eadem aequatione ponere liceat $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$ pro x et y.

Quamobrem, sit aequatio $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, in ea substitue $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}$
ipsis x et y, obtinebis

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 \\ - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o \\ + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \ldots \\ \qquad + ax\dot{y}o \\ - y^3 - 3yy\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o + \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0.$$

*) Opuscula I, S. 56 (Exemplum II). — **) Ebenda S. 59.

Sed per hypothesin est $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$; expunge igitur hos terminos, eterosque divide per o et restabit

$$x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - \dot{y}^3oo = 0:$$

)um autem *finxerimus* o *quantitatem infinite parvam, ut exponere posset quantitatum momenta,* ermini in eam ducti *pro nihilo possunt haberi cum aliis collati;* eos igitur *negligo,* et superest

$$xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0.$$

Hic observandum venit, quod semper evanescunt, cum termini qui per o multiplicati non unt, tum ii, qui multiplicati sunt per o duarum aut plurium dimensionum; et quod reliqui ermini divisi per o, semper acquirunt formam, quam habere debeant secundum regulam superiorem.)uod erat ostendendum.

His autem demonstratis, facile sequentur reliqua, quae complectitur regula, ut quod equatio eadem complecti potest *plures fluentes quantitates* etc.«

Wodurch unterscheidet sich diese Beweisführung von der Seite 14 mitgeteilten Beründung der Regel I der vorigen Abhandlung? Zuerst dadurch, dafs die anschaulichen Untergen, durch die die abstrakten in die Rechnung eingehenden Gröfsen vorstellbar werden, nicht iehr von spezieller Natur, sondern derart sind, dafs sie allgemein jeder stetig veränderlichen röfse anhaften. In der vorigen Abhandlung hatten x, y, z ganz bestimmte Bedeutungen: x Abisse, y Ordinate, z Fläche. Gleichwohl wurde das auf Grund der besonderen Natur dieser röfsen x, y, z als richtig bewiesene Resultat, die nur für Quadraturen abgeleitete Regel, durch inführung eines in seiner Bedeutung schwankenden Begriffes, des Momentes, ohne Beweis, nur uf Analogie gestützt, auf Gröfsen und Operationen anderer Art, auf Rektifikationen und Kubaren übertragen. Hier aber sind x und y Gröfsen schlechthin, mit der Bestimmung, dafs sie etig veränderlich und durch eine oder bei mehr als zwei Fluenten durch mehrere Gleichungen vischen ihnen voneinander abhängig sein sollen, so dafs eine Änderung der einen nicht ohne estimmte Änderung der anderen eintreten kann. Anschaulich gemacht aber wird dieser Zummenhang durch die Vorstellungen von Zeitflufs und von gleichzeitigen Geschwindigkeiten r Fluenten. Sie dienen dazu, die Auffassung der Abhängigkeit der Veränderungen voneinander unterstützen, indem man sich vorstellt, dafs, während die eine Fluente sich mit einer bebigen Geschwindigkeit ändert, die Geschwindigkeiten, mit denen sich die anderen Fluenten den stetig aufeinander folgenden Augenblicken ändern, in jedem Augenblicke ein bestimmtes deres Verhältnis zur konstanten Geschwindigkeit der ersten Fluente haben.

Zweitens ist hier der Begriff des Momentes nicht mehr so unbestimmt wie dort. würde sich als ein ganz unzweideutig bestimmter Begriff darstellen, wenn überall »infinite« statt »indefinite« stünde. Durch dieses »indefinite« kommt wieder etwas Unsicheres in den ng der Vorstellungen in diesem Beweise. Man kann a priori nicht wissen, ob »indefinite rvum« soviel heifsen soll, als „kleiner wie jede gegebene Gröfse", im Sinne der Alten. o, die öfse, die, obgleich das nirgends direkt ausgesprochen ist, aber doch nach der Rolle, die Newton zuweist, die Zeitintervalle, die Zeitteile repräsentiert, in denen die aufeinander folgenden ränderungen der Fluenten geschehen, wird zuerst als indefinite parva eingeführt, wie alle ränderungen der Fluenten; aber »ut exponere posset quantitatum **momenta**«, wird zuletzt o *quantitas infinite parva* erklärt und damit alle übrigen partes et incrementa, quarum accessione partibus temporis (= o) oder per temporis intervalla (= o) fluentes augentur. Es heifst sogar:

»Cum *finxerimus* $\mathfrak{o}$ quantitatem infinite parvam«, als ob von Anfang an die Momente als unen
lich klein aufgefafst worden wären. Es ergiebt sich also, dafs schliefslich sicher die Momen
hier als *partes infinite parvae* aufzufassen sind. Übrigens ist dies auch schon eine Konseque
des ersten Satzes der demonstratio: »Fluentium quantitatum momenta sunt ut velocitates, quib
fluunt aut crescunt«. Da es sich aber um stetig fliefsende Gröfsen handelt, so gilt je
Proportionalität zwischen Momenten und Fluxionen in aller Strenge nur für die Zunahm
während unendlich kleiner Zeitteile, da während einer jeden anderen Zeit die Geschwindigk
der Fluente nicht einen bestimmten Wert hat, sondern unendlich viele Werte annimmt. Dara
schliefse ich: Das Moment einer Fluente ist aufzufassen als das unendlich klei
Stück, um das die Fluente bei ihrer stetigen Veränderung während eines unen
lich kleinen Zeitteiles zu- oder abnimmt, und eine Gröfse heifst *indefinite parva,* we
sie nicht nur kleiner gedacht werden kann, sondern kleiner gedacht werden mufs als je
gegebene Gröfse. Die »quantitas indefinite parva« bezeichnet im Grunde dasselbe, nur schüchtern
wie die »quantitas infinite parva«.

Dies vorausgeschickt, zeichnet sich dieser Beweis vor dem in der vorigen Abhandlu
drittens dadurch aus, dafs die Stetigkeit im Denken hier nicht durch einen Wechsel in der B
deutung von $\mathfrak{o}$ unterbrochen wird. Aus einer Gleichung von der Form 1) $a + b\mathfrak{o} + c\mathfrak{o}^2 + \cdot$
$+ k\mathfrak{o}^m = 0$ und aus 2) $a = 0$ folgt $b\mathfrak{o} + c\mathfrak{o}^2 + \cdots + k\mathfrak{o}^m = 0$, und nach Division mit
3) $b + c\mathfrak{o} + \cdots + k\mathfrak{o}^{m-1} = \frac{0}{\mathfrak{o}}$. Wenn nun 4) $\frac{0}{\mathfrak{o}} = 0$ ist, so folgt aus (3) die Gleichu
(5) $b + c\mathfrak{o} + \cdots + k\mathfrak{o}^{m-1} = 0$.

Nach dem Wortlaut der Beweisführung Seite 14 würde es von hier an weiter heifse
Si jam supponamus $\mathfrak{o}$ *esse nihil,* termini per $\mathfrak{o}$ multiplicati evanescent, und aus (5) folgt dahe
$b = 0$. Dieser Schlufs ist falsch, weil durch $\mathfrak{o} = 0$ die Gültigkeit von (4) und daher auch d
von (5) aufgehoben wird. Im vorliegenden Beweis wird aber dieser Fehler vermieden. Den
es heifst: Cum finxerimus $\mathfrak{o}$ quantitatem infinite parvam (nicht Null), termini in eam du
pro nihilo possunt haberi ***cum aliis collati*** (hier mit b), eos igitur *negligo,* et superest $b =$

In Konsequenz dieser Schlufsweise ergiebt sich, dafs die quantitas infinite parva $\mathfrak{o}$, d
in Vergleich mit einer endlichen Gröfse pro nihilo potest haberi, gleichwohl in Vergleich m
0 für unendlich grofs gehalten werden mufs, weil sonst (4) nicht bestehen würde, da e
Quotient nicht eher den Wert Null erreichen kann, als bis sein Divisor ein Unendlichvielfach
des Dividenden ist. Will man aber, weil 0 überhaupt keine Gröfse mehr ist, dem Zeichen
die Bedeutung eines eigentlichen Quotienten nicht mehr geben, so ist in Konsequenz von (4) z
sagen, dafs gegenüber 0 das Zeichen $\mathfrak{o}$ eine Gröfse bedeutet. Es wäre aber eine unerweislich
Behauptung, wollte man sagen, dafs Newton diese Konsequenzen gezogen hätte und diese Au
fassung von der quantitas infinite parva habe. Das ist vielmehr sehr unwahrscheinlich. Newto
läfst uns, wie früher über den Begriff des Momentes, so auch über den Begriff des Unendlich
kleinen im Unklaren. Dagegen gehört dieser Begriff des Unendlichkleinen, wie er sich soeben a
Konsequenz des Newtonschen Beweises ergab, zu den klar ausgesprochenen Grundanschauunge
von Leibniz.

Wenn es bei Newton ferner heifst: »Hic observandum venit, quod semper evanescun
cum termini qui per $\mathfrak{o}$ multiplicati *non sunt* (d. h. $a = 0$), tum ii qui multiplicati sunt per

duarum aut plurium dimensionum« (d. h. $c\mathfrak{o}^2 + d\mathfrak{o}^3 + \cdots + k\mathfrak{o}^m = 0$), so ist in Konsequenz von (2) und (4) zu konstatieren, dafs der Ausdruck *evanescunt* hier eine doppelte Bedeutung hat. In Bezug auf die Glieder, die mit $\mathfrak{o}$ nicht multipliziert sind und die in Gleichung (1) in a zusammengefafst sind, heifst „verschwinden" soviel als wirklich = Null sein, wegen (2), da $a = 0$ der analytische Ausdruck des Gesetzes ist, nach dem die Fluenten voneinander abhängen. Aber in Beziehung auf die Glieder $c\mathfrak{o}^2 + \cdots + k\mathfrak{o}^m$ heifst »evanescere« soviel wie pro nihilo posse haberi cum aliis ($b\mathfrak{o}$) collati. Auch diese Konsequenz hebt Newton nirgends hervor. Dagegen findet sie bei Leibniz ihren klaren Ausdruck in dem Begriff der »*quantitas incomparabilis*«, sowie in dem Begriffe der Infinitesimalgröfsen verschiedener Ordnungen, und auch in dem auf diesen Begriffen beruhenden Gesetze der Homogeneität der Differentialgleichungen.

Versuch einer Darstellung der Grundgedanken in Newtons Fluxionstheorem. Das Fluxionstheorem in seiner Abhängigkeit vom Begriff der Infinitesimalgröfse.

So beruht denn die Begründung der fundamentalsten Regel der Fluxionsrechnung auf der Idee unendlich kleiner Gröfsen, die Momente heifsen. Es giebt Momente der Zeit, der Länge, Momente einer jeden Gröfsenart. Das Eigentümliche der Momente besteht darin, dafs Momente einer und derselben Gröfsenart, obgleich alle unendlich klein, doch untereinander nicht gleich sind, sondern untereinander alle die Gröfsenverhältnisse bilden, wie endliche der Art nach homogene Gröfsen untereinander; dafs ferner irgend ein Vielfaches eines Momentes in Vergleich mit einer endlichen Gröfse derselben Art gleich 0 zu erachten ist, also die Bedeutung der Gröfse verliert, während es in Vergleich mit 0 den Charakter der Gröfse behält und der Quotient (0 : Moment) = 0 gilt. — Um zur Vergleichung der Momente der Fluenten untereinander zu gelangen, wird fingiert, dafs eine Fluente, die entweder, wie in der demonstratio, gar nicht bezeichnet ist und die in der zwischen den Fluenten gegebenen Gleichung nicht vorkommt, oder eine in der gegebenen Relation enthaltene Fluente, etwa x, während einer beliebigen aber bestimmten Zeitdauer stetig wachsend alle Werte durchlaufe, die das Kontinuum der Gröfsenart, zu der x gehört, von einem Anfangswerte x_0 bis zu einem Endwerte x_1 erfüllen. Die Zeitdauer, während der dies geschieht, wird in unendlich kleine untereinander gleiche Intervalle oder Teile (temporis intervalla, temporis partes, temporis spatia) zerlegt. Ein solches unendlich kleines Zeitintervall ist ein Zeitmoment und wird mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet. Die Gröfse der Zunahme, die x während eines Zeitmomentes erfährt, ist das in diesem erzeugte Moment von x. Die in den aufeinander folgenden Zeitmomenten erzeugten Momente von x brauchen einander nicht gleich zu sein, können es aber sein. Sind sie einander gleich, so sagt Newton, x wächst uniformiter. Sind sie einander *nicht* gleich, so kann man sich *endliche* Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen Art) denken, die sich untereinander verhalten wie die Momente untereinander. Solche Gröfsen heifsen Fluxionen. Auf die absoluten Werte dieser Fluxionen kommt es nicht an, nur auf ihre Vergleichung untereinander. Ebensowenig kommt es auf die absoluten Werte der Momente an, sondern nur auf ihre Vergleichung untereinander. Die aufeinander folgenden Fluxionen einer Fluente x sind dadurch **definiert**, dafs es endliche Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen Art) sind, die sich untereinander wie die aufeinander folgenden Momente von x verhalten.

Ist y_0 ein Wert von y, der die Gleichung zwischen x und y befriedigt, wenn dar $x = x_0$ ist, so durchläuft y, während x alle Werte von x_0 bis x_1 innerhalb seines Kontinuum durchläuft, alle Werte von y_0 bis zu einem Werte y_1, die das Kontinuum zwischen y_0 und hat; aber nicht mehr in freier, sondern in gebundener Weise, nämlich so, daſs zu jedem d aufeinander folgenden Momente von x ein bestimmtes Moment von y gehört. Irgend ein Mome von x und das gleichzeitige Moment von y sind im allgemeinen einander nicht gleich, i Verhältnis ist nicht das der Gleichheit. Man kann sich aber zwei endliche Gröſsen (irgend eine unter sich gleichen Art) denken, die sich untereinander verhalten wie jene gleichzeitigen Moment von x und y. Zwei solche endliche Gröſsen heiſsen gleichzeitige Fluxionen von und y und werden mit $\dot{x}$ und $\dot{y}$ bezeichnet. Ihre mathematische Bedeutung ist vol ständig dadurch definiert, daſs es zwei endliche Gröſsen (irgend einer unter sich gleiche Art) sind, die sich in einem jeden Zeitmoment oder richtiger während eines jede Zeitmoments zu einander verhalten wie die gleichzeitigen Momente der Fluente x und y. Keine von beiden Fluxionen hat für sich allein eine mathematische Be deutung, sondern jede immer nur in ihrem Verhältnis zur andern.

Das Verhältnis der Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zu einander ist flieſsend, wie das Verhältni gleichzeitiger Momente. Während eines jeden folgenden $\mathfrak{o}$ ist dies Verhältnis ein anderes, al während des vorhergehenden $\mathfrak{o}$. Zu jedem der gegebenen Relation zwischen x und y genügende Wertepaare x und y gehört ein bestimmtes Verhältnis von $\dot{x}$ zu $\dot{y}$. Der Sinn des Problems ist der, die Gleichung abzuleiten, aus der das jedem zusammengehörigen Wertepaare x und zugehörige Verhältnis von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ ermittelt, aus x und y berechnet werden kann. Um zu diese Gleichung zu gelangen, wird fingiert, die Momente der Zeit seien einander gleich, bez die Momente der die Zeit vertretenden Gröſse, der *quantitas a tempore diversa, cuju aequabili incremento vel fluxu tempus exponitur et mensuratur*, seien einander gleich un heiſsen $\mathfrak{o}$. Da die Fluxionen einer Fluente sich verhalten wie die entsprechenden Momente, s sind auch die aufeinander folgenden Fluxionen dieser Gröſse, der Urfluente, einander gleich Sie werden als Einheit der Fluxionen gesetzt. Folglich hat man, wenn m_x das Moment von x bezeichnet, die Proportion $m_x : \mathfrak{o} = \dot{x} : 1$ und daher $m_x = \frac{\dot{x}}{1} \cdot \mathfrak{o} = \dot{x}\mathfrak{o}$; analog $m_y : \mathfrak{o} = \dot{y} : 1$; daher $m_y = \dot{y}\mathfrak{o}$.*)

*) Ich weiſs sehr wohl, daſs man den Ausdruck $\dot{x}\mathfrak{o}$ auch anders herleiten kann. Man kann sagen: Die Fluxion $\dot{x}$ ist die Vergröſserung, die x während der auf einen bestimmten Zeitmoment folgenden Zeiteinheit erfahren würde, wenn von diesem Momente an das Wachstum der Fluente x gleichmäſsig erfolgte; $\mathfrak{o}$ ist eine so kleine Zahl, daſs sie sich zu 1 verhält, wie die Dauer eines Zeitmoments zur Dauer der Zeiteinheit, also eine unendlich kleine Zahl. Dann ist $\dot{x}\mathfrak{o}$ der unendlich kleine Zuwachs von x während eines Zeitmoments, also das Moment von x u. s. w. — Aber die dieser Ableitung zu Grunde liegende Definition von $\dot{x}$ hat Newton nirgends ausgesprochen, wenn sie auch dem, was er über Fluxionen sagt, nicht widerspricht. Zudem erklärt Newton an einer andern Stelle (vergl. Seite 37) die Fluxionen ausdrücklich für Gröſsen andrer Art als die Fluenten, während bei obiger Auffassung $\dot{x}$ mit x gleichartig wäre; die Fluxion einer Strecke wäre eine Strecke, die Fluxion einer Fläche wäre eine Fläche u. s. w., und es wäre der Fall denkbar, daſs eine Fluxion an einer Fluente gemessen werden könnte, daſs also z. B. $\dot{x} = y$ wäre, eine Auffassung, die, wie wir bei Besprechung von Problem II sehen werden, derjenigen von Newton zuwiderläuft und zu groben Miſsverständnissen Anlaſs gegeben hat. — Endlich würde auch jene Ableitungs-

Von nun an wird, um die gesuchte Gleichung abzuleiten, nicht mit Fluxionen, sondern mit Momenten gerechnet. In dem Aggregat von Gröfsen, das sich ergiebt, verschwinden die Glieder die keine Momente enthalten, von selbst zufolge der gegebenen Relation zwischen den Fluenten. Die Glieder, die zurückbleiben, sind in Bezug auf die Momente $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ teils vom 1. teils vom 2. Grade u. s. w. Nun wird jedes Glied durch o, durch das Moment der Urfluente, nicht durch $\dot{x}o$ oder $\dot{y}o$, dividiert unter der Voraussetzung $\frac{0}{o} = 0$. Die Glieder 1. Grades enthalten jetzt anstatt der Momente $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ die Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$; zuletzt werden alle übrigen Glieder, die noch volle Momente $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ enthalten, gegenüber den Gliedern, die keine Momente mehr enthalten, als Glieder ohne Gröfse angesehen und weggelassen. Das Ergebnis ist die gesuchte Gleichung, die das Verhältnis von $\dot{y}$ und $\dot{x}$ zu einander als Funktion von x und y bestimmt.

Wenn aber die Begründung der ersten Grundregel der Fluxionsrechnung eine Rechnung mit Momenten, d. i. mit Infinitesimalen zur Voraussetzung hat, und wenn die endlichen Gröfsen, die Fluxionen heifsen, ihre bestimmte mathematische Definition erst dadurch erhalten, dafs sie den Momenten ihrer Fluenten proportional sind, so sind die Gründe klar, weshalb 1784 die Akademie der Wissenschaften zu Berlin das gesuchte Prinzip, propre à être substitué à l'Infini, nicht in der Fluxionsrechnung finden konnte. Es entsteht vielmehr die andere Frage, wozu die Fluxionen überhaupt nützen, wenn man nur auf dem Umwege von den Fluenten zu den Momenten und von diesen zu den Fluxionen den Zusammenhang zwischen Fluenten und Fluxionen finden, zum vollen Verständnis ihrer mathematischen Bedeutung hindurchdringen und zu den ersten Rechnungsregeln mit Fluxionen gelangen kann? Ich verstehe daher nicht, wie man noch in diesem Jahrhunderte von mathematischer Seite urteilen konnte, Newton habe*) „das Rechnen mit unendlich kleinen Gröfsen, welche Null sein und doch noch einen von Null verschiedenen Wert besitzen sollen, auf die Weise auf das Glücklichste vermieden, dafs er im Zustande des Verschwindens (der momenta nascentia sive evanescentia) die Fluxionen, endliche und bestimmte (?) Gröfsen, gewissermafsen als Reserve an die Stelle der zum weiteren Dienst untauglich gewordenen Momente einrücken läfst." Und wenn andere sagen**), neben Lagrange habe auch Newton das „hypothetische Unendlichkleine nicht einmal als literalen Ausdruck in seine Formeln" aufgenommen, so kann dem nicht widersprochen werden bis auf das „nicht einmal", falls dies den Sinn haben sollte: nicht einmal als literalen Ausdruck in seine Formeln aufgenommen, geschweige denn bei seinen mathematischen Untersuchungen, Folgerungen und Beweisführungen benützt. Dieser Nachsatz, den man hinter dem „nicht einmal" zu vermuten geneigt ist, würde, wie aus obigen Darlegungen hervorgeht, der Wahrheit stracks zuwiderlaufen. Wenn aber die Fluxionen nur den Zweck hätten, in den Endformeln den literalen Ausdruck des Unendlichkleinen zu vermeiden, so wäre ihre Funktion ähnlich der der Umkleidung eines Kunstwerkes vor seiner

---

eise dem Geiste der damaligen Zeit widersprechen. Sie ist modern. Damals bewegte man sich noch durchweg Proportionen unter Festhaltung an der Euklidischen Erklärung (V, 4); „Eine ratio zu einander haben Gröfsen, elche vervielfältigt einander übertreffen können." Daran haben wir uns bei unserer Ableitungsweise streng gehalten. erade, um dieser Euklidischen Erklärung zu genügen, wird eben der Zeit eine mit den Fluenten homogene röfse substituiert.

*) Weifsenborn, Die Prinzipien der höheren Analysis etc. Halle 1856, S. 57.

**) P. du Bois-Reymond, Die allgemeine Funktionentheorie, Tübingen 1882, I, S. 84.

Enthüllung, oder der eines Uhrgehäuses, das zwar, indem es das Zifferblatt frei läfst, noch di Wirkung des im Gehäuse verborgenen Getriebes erkennen läfst, aber den organischen Zusammen hang der Teile verdeckt.

Der Gültigkeitsbereich des Newtonschen Fluxionstheorems.

Jedenfalls um nicht weitläufig zu werden giebt Newton die demonstratio solutioni nur an einem Beispiel, und an einem solchen mit nur zwei Fluenten und mit nur ganzen Exponenten.*) Aber der Wortlaut der Solutio ergiebt, dafs die Zahl der Fluenten in einer Gleichung nicht beschränkt sein soll. Im Exemplum II (vergl. S. 24) wendet Newton seine Regel au eine Gleichung mit drei Fluenten an. Die Demonstratio ist nur am Exemplum I durchgeführt »His autem demonstratis facile sequentur aliqua, quae complectitur regula, ut, quod aequati eadem complecti potest *plures fluentes quantitates* etc.« (Opuscula I, S. 61). In der That steh nichts im Wege, die Demonstration wörtlich auf eine Gleichung mit beliebig vielen Fluenten zu übertragen, weil kein Grund da ist, weshalb man sich nicht beliebig viele Fluenten, die durch eine oder mehrere Gleichungen von einander abhängig gemacht sind, in gleichzeitiger stetiger Veränderung, in gleichzeitigem Fluxus von solcher Art sollte vorstellen können, dafs der gegebenen Gleichung, bez. den gegebenen Gleichungen immer genügt wird. Die Fluxionen $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$, $\dot u$ sind dadurch definiert, dafs es endliche Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen und blofs unter sich vergleichbaren Art) sind, die sich in jedem Augenblick wie die entsprechenden gleichzeitigen Momente ihrer Fluenten verhalten. Ihre absoluten Werte sind ebenso *inassignabel*, wie die Leibnizischen Differenzen; sie werden gemessen an der sich immer konstant bleibenden Fluxion der Urfluente, von der o das sich immer gleiche Moment ist. Diese Fluxion der Urfluente ist die Einheit der Fluxionen, und man hat $m_x : o = \dot x : 1$; $m_y : o = \dot y : 1$; $m_z : o = \dot z : 1$; $m_u : o = \dot u : 1$ u. s. w., also $m_x = \dot x o$; $m_y = \dot y o$; $m_z = \dot z o$; $m_u = \dot u o$ u. s. w. Ist $f(x, y, z, u \cdots)$ $= 0$ eine der gegebenen Gleichungen zwischen den Fluenten, so ist auch $f(x + \dot x o,\ y + \dot y \cdot o,$ $z + \dot z \cdot o,\ u + \dot u o, \cdots) = 0$. Die linke Seite dieser Gleichung wird nach Potenzen der Momente geordnet; die Glieder zweiten und höheren Grades pro nihilo possunt haberi cum aliis (den Gliedern ersten Grades) collati und werden deshalb vernachlässigt; die Glieder ohne Momente zerstören sich von selbst; vorher noch oder nachher wird durch o dividiert; es folgt eine Gleichung von der Form

$$a\dot x + b\dot y + c\dot z + d\dot u + \cdots = 0,$$

wo $a, b, c, d, \cdots$ nur Fluenten und konstante Gröfsen, aber keine Fluxionen enthalten. Ist eine zweite Gleichung $\varphi(x, y, z, u, \cdots) = 0$ gegeben, so folgt eine zweite Fluxionsgleichung

$$a_1\dot x + b_1\dot y + c_1\dot z + d_1\dot u + \cdots = 0; \text{ u. s. w.}$$

Da alle diese Gleichungen nach den Fluxionen homogen sind, so kann man aus ihnen nie mehr als die Verhältnisse der Fluxionen zu einander, nie aber die Verhältnisse der Fluxionen zu den Fluenten berechnen. Mehr ist aber auch zufolge der mathematischen Definition der

*) Man ist deshalb aber doch nicht berechtigt zu sagen, Newton habe seine Regel ohne Beweis aufgestellt, wie es bei Weifsenborn a. a. O. S. 28 geschieht.

Fluxionen nicht möglich, nicht denkbar. Mit dem absoluten Werte einer Fluxion oder dem Verhältnisse einer Fluxion zu einer Fluente könnte man zufolge des Begriffes der Fluxionen gar nichts anfangen. Ich wiederhole: Nicht nur die Leibnizischen Differenzen, auch die Newtonschen Fluxionen sind trotz ihrer Endlichkeit *quantitates inassignabiles.* — Nur in einem Falle erhält man für die Fluxionen aus jenen Gleichungen absolute Werte; wenn nämlich soviele Gleichungen als Fluenten gegeben sind. Dann erhält man ebenso viele Fluxionsgleichungen, die nach den Fluxionen homogen und linear sind. Aus ihnen folgt dann $\dot x = \dot y = \dot z = \dot u = \cdots = 0$, d. h. die Fluenten wachsen nicht und nehmen nicht ab, sie fliefsen nicht, sie sind keine Fluenten mehr, sind konstant geworden, wie es bei der angenommenen Zahl von Gleichungen von vornherein klar war.

Liegt eine Gleichung mit mehr als zwei Fluenten vor, so sind nach Newton noch so viele andere Gleichungen hinzu zu denken, als nötig sind, um die Werte aller Fluxionen im Verhältnis zu einer unter ihnen zu bestimmen; d. h. zu einem Problem mit n Fluenten gehören $n-1$ Gleichungen. Zu Exemplum II (vergl. S. 24), mit drei Fluenten, heifst es (Opuscula I, S. 56): »Cum autem in hoc exemplo tres sint fluentes quantitates x, y et z, *habeatur oportet altera aequatio,* qua prorsus determinari possit relatio inter fluentes x, y et z, earumque Fluxiones. Suppone, ex. gr., quod $x + y - z = 0$, hinc invenietur altera relatio inter fluxiones $\dot x + \dot y - \dot z = 0$. Jam istam cum superiore aequatione compara, exterminando aliquam ex tribus illis quantitatibus et fluxionibus; et inde exsurget aequatio plene determinans relationem ceterarum.«*)

Was nun die Frage nach den zulässigen Exponenten anlangt, für welche die Newtonsche Fluxionsregel gilt, so beruht der rechnerische Teil der Beweisführung auf der Entwickelung

$$1)\ (x + \dot x o)^n = x^n + n x^{n-1} (\dot x o) + M (\dot x o)^2 + N (\dot x o)^3 + \cdots,$$

worin über M, N u. s. w. weiter nichts zu wissen nötig ist, als dafs sie endlich sind; sie setzt in der gegebenen Gleichung

$$2)\ \Sigma a x^p y^q z^r \cdots = 0$$

überall $x + \dot x o$, $y + \dot y o$, $z + \dot z o$ u. s. w. an die Stelle von $x, y, z \ldots$, entwickelt, führt die nötigen Multiplikationen aus und ordnet das entstehende Aggregat nach Dimensionen der Momente $\dot x o$, $\dot y o$ u. s. w. Die Glieder, die keine Momente haben, verschwinden wegen (2) von selbst. Jetzt

*) Dafs die Zahl der Fluenten in dem Fluxionstheorem von Newton selbst als unbeschränkt angesehen wird, ist eine so nahe liegende Folgerung aus seinem Vortrag über sein Problem I, dafs ich mit Befremden in einer deutschen Darstellung der Newtonschen Fluxionslehre, die von vielen Schriftstellern als Quelle angeführt wird (Weifsenborn a. a. O.), Stellen wie die folgenden gelesen habe: „Endlich erhält man darüber, wie eine Gleichung mit mehr als drei Fluenten zu behandeln sei, durchaus keinen (?) Aufschlufs" (S. 30). — „Aus dem vorigen ist klar, dafs nur die Fluxionen von zwei Fluenten gesucht werden können etc." (S. 29). — Die Fluxionen können überhaupt nicht gesucht werden, sondern nur Verhältnisse von je zwei Fluxionen zu einander! — „Nichtsdestoweniger stellt sich Newton die Aufgabe, das Verhältnis der Fluxionen $\dot x$ und $\dot y$ auch aus Gleichungen zu finden, die drei Variabele enthalten" (S. 29). — Diese Aufgabe stellt sich Newton, soweit ich sehen kann, in dieser Form nirgends. Die Newtonsche Aufgabe heifst: Gegeben eine Gleichung zwischen beliebig vielen Fluenten; gesucht die Relation zwischen ihren Fluxionen. Natürlich kann die gefundene Relation (Gleichung) nach dem Verhältnis $\frac{\dot y}{\dot x}$ aufgelöst werden, wie nach jedem andern Verhältnis $\frac{\dot z}{\dot u}$, $\frac{\dot x}{\dot z}$ von irgend zwei Fluxionen, weil jede Fluxionsgleichung homogen

wird jedes Glied durch o dividiert, und schliefslich werden alle Glieder, die vor der Divisi vom zweiten und höheren Grade in Beziehung auf die Momente waren und daher nach d Division durch o diese Gröfse noch enthalten, als unendlich klein gegenüber den Gliedern erst Grades vernachlässigt, so dafs erhalten wird

$$\Sigma apx^{p-1}y^q z^r \cdots (\dot{x}) + \Sigma aqx^p y^{q-1} z^r \cdots (\dot{y}) + \Sigma arx^p y^q z^{r-1} \cdots (\dot{z}) + \cdots = 0,$$

was mit der Newtonschen Regel

$$\Sigma apx^p y^q z^r \cdots \left(\frac{\dot{x}}{x}\right) + \Sigma aqx^p y^q z^r \cdots \left(\frac{\dot{y}}{y}\right) + \Sigma arx^p y^q z^r \cdots \left(\frac{\dot{z}}{z}\right) + \cdots = 0$$

übereinstimmt. Die Newtonsche Fluxionsregel gilt also auf Grund der von Newt gegebenen »*demonstratio*« für Gleichungen zwischen beliebig vielen Fluenten v der Form $\Sigma ax^p y^q z^r \cdots = 0$ und für solche Exponenten $p, p, r \ldots$, für welche d Entwickelung (1) gilt.

Ableitung der Fluxionsgleichung aus Fluentengleichungen mit gebrochenen und irrationalen Ausdrücken.

Die Fluxionsregel ist nicht ohne weiteres anwendbar auf Glieder, in denen zwei- od mehrgliederige Ausdrücke der Fluenten einen Nenner oder Radikanden bilden, also z. B. nic mehr auf $\frac{a}{b+cx}$ oder $\sqrt{b+cx}$. Da aber die Zahl der Fluenten in einer gegebenen Fluente gleichung nicht beschränkt ist, so reicht die nur für Glieder von der Form $ax^p y^q \cdots$ gegebe Regel auch aus, um die Fluxionen gebrochener oder irrationaler Ausdrücke zu finden, ohne da Hilfsmittel ihrer Entwickelung in unendliche Reihen von der Form $ax^\alpha + bx^\beta + \cdots$ nötig z haben. Die Ermittelung der Fluxionen gebrochener und irrationaler Ausdrücke geschieht dahe durch Einführung von Hilfsfluenten und durch ein Verfahren, das im Grunde nicht verschiede ist von dem, dessen wir uns noch heute bedienen und das sich im einfachsten Falle in de Regel ausspricht: Wenn y eine Funktion von v und v eine Funktion von x ist, so ist $\frac{d}{d}$ $= \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$.

ist. — „Es entsteht hier zunächst die Frage, was soll die dritte Variabele z bedeuten, da bereits x das Symb oder der Repräsentant der Zeit, y der des Raumes ist? Man mufs gestehen, dafs es schwer, ja unmöglich ist, de dritten Variabelen einen ähnlichen Sinn unterzulegen. Newton spricht sich nun dahin aus etc." (S. 30) — nu folgen angebliche Äufserungen Newtons, aber nicht in direkter Citierung und ohne Angabe der Quelle, so dafs ein Prüfung nicht möglich ist. Weifsenborn kommt zu dem Schlusse, Newton denke sich unter z die Fläch einer Kurve, deren Abscisse x und deren Ordinate y ist, und sagt dann: „Man sieht aus dieser Ableitung, dafs auc Newton der dritten Variabelen keine phoronomische Bedeutung unterzulegen vermochte, indem er ihr einen rei geometrischen Sinn zuschrieb" (S. 30); — als ob die „phoronomische Bedeutung" nicht bei allen Fluenten ohne Au nahme eine und dieselbe wäre, nämlich die, dafs, während eine von ihnen, die quantitas correlata, gleichmäfsi wächst, die übrigen, die quantitates relatae, gleichzeitig mit veränderlichen Wachstumsgeschwindigkeiten zu- un abnehmen, unabhängig davon, ob sie Strecken, Flächen, Volumina, Zeiten, Kräfte oder sonst welche Gröfsen bedeute die einer kontinuierlichen Veränderung fähig sind. Nirgends habe ich eine Stelle in Newtons Schriften gefunde aus der hervorginge, er denke sich ein für allemal unter x eine Abscisse, y eine Ordinate, z eine Fläche, woh aber, dafs er Abscisse, Ordinate und Fläche, wo sie vorkommen, mit x, y und z bezeichnet. Vergl. auch S. 2 unseres Textes.

Beispiel. (Opuscula I, S. 57). Es liege vor die Relation $y^2 - a^2 - x\sqrt{aa - xx} = 0$. Newton setzt $x\sqrt{aa - xx} = z$ und erhält so die beiden Gleichungen: (1) $y^2 - a^2 - z = 0$; (2) $a^2x^2 - x^4 - z^2 = 0$. Hieraus (1′) $2y\dot{y} - \dot{z} = 0$; (2′) $2a^2x\dot{x} - 4x^3\dot{x} - 2z\dot{z} = 0$ oder $\dot{z} = \frac{a^2x\dot{x} - 2x^3\dot{x}}{z}$ $= \frac{a^2x\dot{x} - 2x^3\dot{x}}{x\sqrt{aa - xx}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{aa - xx}}\dot{x}$; also folgt aus (1′): $2y\dot{y} - \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{aa - xx}}\dot{x} = 0$. Man sieht, dafs der Zusammenhang der Operationen derselbe ist wie beim Verfahren nach der Regel $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$. Denn durch (1) ist y definiert als Funktion von z; durch (2) z als Funktion von x. (1′) liefert $\frac{dy}{dz} =$ etc.; (2′) liefert $\frac{dz}{dx} =$ etc. Die Elimination von dz und z (bez. von $\dot{z}$ und z) aus diesen Gleichungen und aus (2) liefert die gesuchte Beziehung zwischen dy und dx (bez. zwischen $\dot{y}$ und $\dot{x}$). Gerade dieses Beispiel läfst sich nach der Vorschrift $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{z}} \cdot \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ durchführen, denn (1′) giebt $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \frac{1}{2y}$; (2′) giebt $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{a^2x - 2x^3}{z} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, also $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, oder, wie Newton schreibt, $2y\dot{y} - \frac{a^2\dot{x} - 2xx\dot{x}}{\sqrt{aa - xx}} = 0$.

Man kann die Hilfsfluente z auch so wählen, dafs die gegebene Gleichung mit zwei Fluenten sich in eine mit drei Fluenten verwandelt. Setzt man $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, so erhält man

1) $y^2 - a^2 - xz = 0$; 2) $zz = aa - xx$. Hieraus 1′) $2y\dot{y} - x\dot{z} - z\dot{x} = 0$; 2′) $z\dot{z} = -x\dot{x}$. Die Elimination von $\dot{z}$ und z aus (1′), (2) und (2′) ergiebt natürlich wieder $2y\dot{y} - \frac{a - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \dot{x} = 0$. — Nicht anders verfährt in ähnlichen Fällen Leibniz, nur dafs er anstatt $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die Momente dx, dy, dz, d. h. die unendlich kleinen Gröfsen schreibt, denen die Fluxionen proportional sind und durch welche die Fluxionen erst einen Sinn erhalten.

Ein noch zusammengesetzteres Beispiel behandelt Newton in der Gleichung $x^3 - ayy + \frac{by^3}{a + y} - xx\sqrt{ay + xx} = 0$ (Opuscula I, S. 57). Er führt die Hilfsfluenten $z = \frac{by^3}{a + y}$ und $u = xx\sqrt{ay + xx}$ ein und hat nun für 4 Fluenten x, y, z und u 3 Gleichungen:

1) $x^3 - ayy + z - u = 0$; 2) $az + yz - by^3 = 0$; 3) $ax^4y + x^6 - uu = 0$, wodurch drei der Fluenten als Funktionen der vierten bestimmt sind. Die Fluxionsregel liefert zwischen den Fluxionen die Beziehungen:

1′) $3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0$; 2′) $a\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} - 3by^2\dot{y} = 0$; 3′) $4ax^3y\dot{x} + 6x^5\dot{x} + ax^4\dot{y} - 2u\dot{u} = 0$. Will man das Verhältnis von $\dot{y} : \dot{x}$ durch y und x darstellen, so löse man (2), (3), (2′) und (3′) nach z, u, $\dot{z}$ und $\dot{u}$ auf und setze die erhaltenen Werte in (1′) ein. Das Ergebnis ist die gesuchte Fluxionsgleichung $\alpha\dot{x} + \beta\dot{y} = 0$, wo α und β nur noch die Fluenten x und y enthalten.

Man hat dieses Verfahren „einen vielleicht nicht ganz erlaubten Kunstgriff“ genannt,

man hat gefragt: „Durfte Newton z und u als bloſse Abkürzungen einführen?"*) Ich verste nicht, was in diesem Verfahren unerlaubt sein oder den Charakter eines Kunstgriffes hab sollte, und inwiefern es sich dem Zusammenhange der Operationen nach von dem Verfahr von Leibniz oder dem noch heute üblichen Verfahren der Differentiation durch Einführu neuer Variabelen unterscheidet. Daſs wir heute in der Praxis an der Hand auswendig gelern Differentialformeln die Rechnung abkürzen, begründet keine Änderung im logischen Zusamme hange der Operationen, auſser etwa der, daſs man infolge der Übung im Gebrauche v Differentialformeln den eigentlichen logischen Zusammenhang der mechanisch ausgeführten O rationen aus den Augen verliert.

Das Problem II in Newtons Methodus Fluxionum.

Problema II. *»Data aequatione, quae contineat quantitatum fluxiones; inveni quam relationem habeant inter se hae quantitates fluentes.«*

Die Lösung dieses dem vorigen inversen Problems geschieht naturgemäſs nicht ande als durch Rückbildung einer Gleichung, aus der man nach der Fluxionsregel die gegebe Gleichung zwischen den Fluxionen wieder ableiten kann. Ein Glied $ax^{\alpha}\dot{x}$ der gegebenen Fluxion gleichung verwandelt sich bei der Rückbildung zur Fluentengleichung in $\frac{a}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$; aber e Glied wie $ay\dot{x}$ ergiebt nur dann ayx, wenn in der Fluxionsgleichung neben $ay\dot{x}$ auch noch a vorkommt, weil bei der Bildung der Fluxionsgleichung aus axy nicht allein $ay\dot{x}$, sonde $ay\dot{x}+ax\dot{y}$ entsteht. Allgemein gestattet das Glied $ax^m y^n \dot{x}$ den Schluſs auf $\frac{a}{m+1}x^{m+1}y$ nur dann, wenn gleichzeitig noch das Glied $\frac{na}{m+1}x^{m+1}y^{n-1}\dot{y}$ in der gegebenen Fluxion gleichung vorkommt, weil $\frac{a}{m+1}x^{m+1}y^n$ einer Fluentengleichung die zwei Glieder $ax^m y^n$ $+\frac{na}{m+1}x^{m+1}y^{n-1}\dot{y}$ der Fluxionsgleichung liefert. Daher ist die Möglichkeit, aus eine gegebenen Fluxionsgleichung die entsprechende Fluentengleichung durch direkte Rückbildun nach der Vorschrift: aus $ax^{\alpha}\dot{x}$ wird $\frac{a}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, zu finden, sehr beschränkt. Sie set im allgemeinen voraus, daſs in der gegebenen Fluxionsgleichung die Fluenten von einande getrennt vorkommen, d. h. daſs jedes Glied immer nur die mit der in ihr vorkommen den Fluxion gleichnamige Fluente enthält. Gegenüber solchen Schwierigkeiten führt Newto seine Analysis per aequationes numero terminorum infinitas und seine enorme Divinations fähigkeit ins Gefecht und weiſs damit Schwierigkeiten über Schwierigkeiten zu überwinde Es hat aber für uns kein Interesse, diese technisch-rechnerische Seite der Behandlung de Problems vorzuführen, weil Newton die Regeln und Vorschriften, nach denen er aus einer ge gebenen Fluxionsgleichung zwischen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ eine Fluentengleichung in Form einer unendliche Reihe $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots$, bez. deren Anfangsglieder herausrechnet, ohne Bewei

*) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III, S. 164, 165.

und hinreichende Begründung aufstellt. Uns interessieren aber gerade die Begründungen. Newton kann hier weiter nichts thun, als darauf hinweisen, dafs man in jedem Falle unter Anwendung des Fluxionstheorems die Probe auf die Richtigkeit der gefundenen oder aufgestellten Fluentengleichung machen müsse. Er sagt (Opuscula I, S. 84):

Demonstratio. »Hoc pacto (d. h. nach den gegebenen Beispielen und Regeln) solutum est problema, sed latet demonstratio. Cum autem tot et tam varia contineat hoc problema, ut demonstratio synthetice sine maximis ambagibus deduci nequeat ex genuinis ejus fundamentis, sufficiet eam breviter indicare analytice. Proposita igitur aequatione, et opere peracto, tenta num ex aequatione reperta regredi liceat ad propositam per probl. I. Quod ubi accidit, constat relationem, quae est inter quantitates in aequatione reperta, requirere relationem, quae est inter fluxiones in proposita; et vice versa. Q. E. D.«

Diese Probe ist aber in allen Fällen, wo die Fluentengleichung in einer unendlichen Reihe besteht, überaus umständlich und ohne Konvergenzbedingungen, die ja bei Newton fehlen, überhaupt nicht exakt durchführbar.

Wir suchen uns aus Newtons Bemerkungen zu Problem II die Stellen heraus, aus denen ein Licht auf seine Auffassung der Grundbegriffe fällt.

Newton eröffnet seine Untersuchung des Problems mit einer Regel, die er »Solutio peculiaris« überschreibt. Sie lautet: »Cum hoc problema sit superioris conversum, resolvi debet per operationes contrarias; scilicet termini ducti in $\dot{x}$ disponi debent juxta dimensiones x et dividi per $\frac{\dot{x}}{x}$, et deinde per numeros dimensionum eorum, aut fortasse per aliquam aliam progressionem arithmeticam: Tum eadem opera repetita pro terminis multiplicatis per $\dot{u}$, $\dot{y}$, vel $\dot{z}$, aggregatum sic emergens poni debet aequale nihilo, rejectis terminis supervacuis.«

Weifsenborn (a. a. O. S. 32 und 33) und Cantor (a. a. O. III, S. 164) lassen sich durch diese Regel zu dem, wie mir scheint, ungerechtfertigten Urteil verleiten, Newton habe selbst die beschränkte Anwendbarkeit dieser Regel in den Fällen, wo gemischte Glieder (Glieder mit mehr als einer Fluente) vorkommen, nicht erkannt. Cantor sagt geradezu: „Newton fühlte hier nicht, dafs seine Regel nur Geltung habe, wenn in der Fluxionsgleichung neben $max^{m-1}y^n\dot{x}$ das Glied $nax^my^{n-1}\dot{y}$ auch wirklich auftrete.“ Dafs eine so augenfällige Bemerkung einem Newton entgangen sein sollte, klingt unwahrscheinlich. Es läfst sich auch aus dem, was er im Anschlufs an diese Regel sagt, erkennen, der er gerade wegen ihrer Unzulänglichkeit sich nicht weiter mit ihr befassen mochte. Er wendet sie zuerst auf das Beispiel $3xx\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}-3yy\dot{y}+ax\dot{y}=0$ an und bemerkt, dafs das durch seine Regel sich doppelt ergebende Glied ayx in die Fluentengleichung nur einmal aufzunehmen sei (daher das »rejectis terminis supervacuis« am Schlusse der Regel). Dann heifst es: »Alia, quae fuissent observanda, permittam solertiae artificis; nam supervacaneum esset nimis diu in hoc argumento haerere: siquidem hoc pacto problema non semper solvi potest. Unum tamen addam, videlicet, quod si, postquam fluentium relationem inveneris hac methodo, regredi potes per probl. I ad propositam aequationem fluxiones involventem, certo noscis opus esse rectum, alias non. Sic in exemplo proposito, si ex inventa aequatione $x^3-axx+axy-y^3=0$ quaero, per primum problema, relationem fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$, pervenio ad propositam aequationem $3xx\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}$

$+ax\dot{y}-3yy\dot{y}=0$; unde constat aequationem $x^3-axx+axy-y^3=0$ eam esse quam pe bamus. *Sed, proposita aequatione $x\dot{x}-y\dot{x}+a\dot{y}=0$, methodus praescripta praebet $\frac{1}{2}xx-$ $+ay=0$, aequationem, quae exponere deberet relationem inter x et y; sed quae ad hoc inepta quia hinc, per probl. I, excuditur $x\dot{x}-y\dot{x}-x\dot{y}+a\dot{y}=0$, quae aequatio differt a proposita.* — autem perfunctorie praemissis aggredior *generalem solutionem.*« Damit sagt, scheint mir, Newt mit hinreichender Deutlichkeit, dafs der Schlufs von dem Gliede $-y\dot{x}$ der Fluxionsgleichung das Glied $-yx$ der Fluentengleichung nicht gemacht werden darf, weil in der Fluxionsgleichu das Glied $-x\dot{y}$ fehlt. — Unter Berufung auf Weifsenborn fährt Cantor fort: „Es ist ga richtig hervorgehoben worden, dafs der Rückschlufs von $x^3\dot{x}-3x^2y\dot{x}+xy^2\dot{y}-y^3\dot{y}=0$ $\frac{x^4}{4}-x^3y+\frac{xy^3}{3}-\frac{y^4}{4}=0$ falsch ist u. s. w." Dafs dieser Rückschlufs, wenn er gemacht wür falsch wäre, sagt ja Newton in den oben angeführten Stellen mutatis mutandis selber. Weifse born giebt nicht an, wo Newton diesen Rückschlufs gemacht haben soll. In der Castillioneu schen Ausgabe der »Methodus fluxionum« findet sich obiges Beispiel und obiger Schlufs nic Wenn aber nicht Newton, sondern sonst wer jenen falschen Rückschlufs macht, so durfte m das nicht „Newtons Verfahren" oder „Newtons Methode" nennen.*) Newton hält seine Solu peculiaris für nichts weniger als eine allgemeine Methode. Das erste Beispiel zu seiner al gemeinen Methode der Integration einer Fluxionsgleichung mit gemischten Gliedern steht S. Opuscula I, und lautet: $\dot{x}-3x\dot{x}+y\dot{x}+xx\dot{x}+xy\dot{x}-\dot{y}=0$, und Newton findet $y=x-$ $+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6$ u. s. w. in inf., aber keineswegs $x-\frac{3}{2}x^2+yx+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}-y=$ — Die »Solutio peculiaris« hat keine andere Bedeutung, als die eines vorläufigen Versuch durch einfache Umkehrung der Fluxionsregel eine Integrationsregel zu gewinnen. Newton find selbst sofort, dafs diese Regel unzureichend ist, und giebt sich deshalb nicht weiter mit ihr a »siquidem hoc pacto problema non semper solvi potest.«

Das Gesetz der Homogeneität der Fluxionsgleichungen.

Gleich hinter der »Solutio peculiaris«, in der »Praeparatio in solutionem (gene ralem)« findet sich eine Stelle, die für die Beurteilung der Fluxionen im Sinne Newtons vo gröfster Wichtigkeit ist. Diese Praeparatio dreht sich um den Gedanken: Cum peculiaris supr tradita solutio adhiberi nequit, semper aequationes hac forma donandae sunt, dafs aus ihnen da Fluxionsverhältnis $\dot{y}:\dot{x}$ oder, bei mehreren Fluenten, die Verhältnisse aller Fluxionen in Beziehun auf eine beliebige unter ihnen als Einheit betrachtete Fluxion ($\dot{y}:\dot{x};\ \dot{z}:\dot{x};\ \dot{u}:\dot{x}$) als algebraisch Funktionen der Fluenten dargestellt werden können. Eine Konsequenz dieses Gedankens is es, dafs, wenn nur eine Fluxionsgleichung gegeben ist, darin auch nur zwei Fluenten mit ihre Fluxionen vorkommen dürfen, sofern die Relation zwischen den Fluenten bestimmt sein sol

*) Darum kann gerade dieses Beispiel unmöglich als Beweisgrund für die Schlüsse dienen, die Canto (a. a. O. III, S. 165) daran knüpft hinsichtlich des Umfangs der Umarbeitung der »Methodus fluxionum« durc Newton nach dem Jahre 1700. — Eher liefse sich das von uns S. 24 mitgeteilte »Exemplum II« zu Problem (Opusc. I, S. 56) in diesem Sinne ausbeuten.

Denn das Problem der partiellen Differentialgleichungen hat Newton in seiner »Methodus fluxionum« nirgends gestreift. Wenn Weiſsenborn (a. a. O. S. 39) meint, der Fall einer Fluxionsgleichung mit mehr als zwei Fluxionen enthalte das Problem der partiellen Differentialgleichungen, so ist das ein Irrtum. Gelangt Newton auf irgend eine Weise zu einer Gleichung zwischen mehr als zwei Fluxionen, so sind nach seiner Anschauungsweise zugleich so viele neue Gleichungen zwischen denselben Fluxionen zu fingieren, als nötig sind, um das Verhältnis einer jeden Fluxion zu einundderselben an sich beliebigen unter ihnen, der als Einheit, als fluxio temporis betrachteten Fluxion zu bestimmen. Aus diesen Grundgedanken folgt nun aber, daſs jede Fluxionsgleichung nach den Fluxionen homogen sein muſs. Newton erschwert das Verständnis dieser Notwendigkeit dadurch, daſs er sie gleich am Anfange seiner Darlegungen unvermittelt in Form einer kategorisch-dogmatischen Belehrung ausspricht, deren Sinn er zwar an Beispielen erläutert, für die er aber die tieferen Gründe für sich behält. Die Folge davon sind Miſsverständnisse und irrtümliche Meinungen über seine Grundgedanken, die, irgend einmal irgendwo gedruckt, dann auch in geschichtliche Werke ersten Ranges Eingang finden, wie wir bald sehen werden.

Newton beginnt die »Praeparatio in solutionem« mit den Worten: »Principio animadvertendum est, quod in proposita aequatione symbola fluxionum *(sunt enim quantitates diversi generis ab iis, quarum fluxiones sunt)* in singulis terminis ascendere debent ad aeque altas dimensiones: si quando autem res aliter se habet, assumenda pro unitate est aliqua fluxio cujusvis fluentis quantitatis, et per eam termini minus alti sunt multiplicandi toties quoties opus est, ut symbola fluxionum perveniant ad eundem dimensionum numerum in omnibus terminis. — Sit aequatio $\dot{x} + x\dot{x}\dot{y} - axx = 0$, pro unitate accipienda est fluxio $\dot{z}$ tertiae cujuslibet quantitatis fluentis z, et per eam primus terminus $\dot{x}$ semel, ultimus autem axx bis multiplicati concipiendi sunt, ut fluxiones in iis ad tot dimensiones ascendant, ad quot in secundo termino $x\dot{x}\dot{y}$, non secus ac si proposita aequatio deducta fuisset ab hac $\dot{x}\dot{z} + x\dot{x}\dot{y} - axx\dot{z}\dot{z} = 0$, fingendo $\dot{z} = 1$.

Hierzu heiſst es bei Cantor (a. a. O. III, S. 165) im Anschluſs an Weiſsenborn (a. a. O. S. 33): „Eine groſse Unklarheit (?) steckt auch in der Bemerkung Newtons, die gegebene Fluxionsgleichung müsse nach den auftretenden Fluxionen homogen sein, und wenn das nicht von selbst der Fall sei, müsse man Fluxionen einer weiteren Gröſse als Faktoren hinzudenken und diese als Einheiten betrachten.“ — „Was soll, hat man ganz richtig gefragt, dieses $\dot{z}$, was soll z selbst bedeuten?“ u. s. w. Und bei Weiſsenborn heiſst es: „Es folgt nun eine Stelle, in der Newton sich so unklar (?) ausspricht, daſs es sehr schwierig ist, ihn zu verstehen“ u. s. w.; die weiteren Ausführungen Weiſsenborns lassen es zweifelhaft erscheinen, ob dem Verfasser das Verständnis Newtons aufgegangen ist. Bei der hervorragenden Bedeutung des Cantorschen Werkes und gegenüber der Thatsache, daſs auch die Arbeit Weiſsenborns vielfach als Quelle angeführt wird, verlohnt es sich der Mühe, die Frage nach der Homogeneität der Fluxionsgleichungen von Grund aus zu untersuchen. Leider ist hierzu an dieser Stelle kein Raum übrig. Trotzdem muſs ich mit einigen Worten darauf eingehen.

Die mathematische Definition der Fluxionen, d. h. diejenige Bestimmung, durch die allein die Fluxionen die Fähigkeit erlangen, mit algebraischen Zeichen belegt und in algebraische Gleichungen aufgenommen zu werden, liegt darin (vergl. S. 28), daſs es endliche Gröſsen (irgend einer unter sich gleichen Art) sind, die sich zu einander wie die entsprechenden

Momente, d. h. wie die unendlich kleinen Gröſsen zu einander verhalten, um die die zusamm gehörigen Werte x, y, z, u der Fluenten in einem und demselben unendlich kleinen Zeitinterva wachsen bez. abnehmen. Also hat eine Fluxion allein ebensowenig einen absoluten Wert irgend ein Moment; also hat es keinen Sinn, nach dem Werte einer Fluxion zu fragen. kann immer nur nach dem Verhältnis zweier Fluxionen zu einander gefragt werden. Fluxionsgleichungen haben eben die Bestimmung, die Verhältniszahlen der Fluxionen un einander zu ergeben. Diese Bestimmung können sie nur erfüllen, wenn sie den Fluxionen n homogen sind. Wollte man die Gleichung $\dot{y} = x$ so übersetzen: die Fluxion von y ist gleich Länge x, so spräche man einen Unsinn aus. Die Gleichung $\dot{y} = x$ hat nur diesen Sinn: Fluxion $\dot{y}$ ist von einer anderen als Einheit betrachteten Fluxion dasselbe Vielfache oder d selbe Bruch wie die Länge x von einer anderen als Einheit betrachteten Länge. Wenn n diesen Gedanken in der Sprache der Analysis formuliert durch $\dot{y} = x$, so ist diese Ausdruc weise eben eine mangelhafte; man müſste schreiben $\dot{y} : \dot{z} = x : e$, wo $\dot{z}$ eine an sich beliebige, a als Einheit, als Grundlage der Vergleichung der Fluxionen während der ganzen Rechnung f zuhaltende Fluxion, und e eine an sich beliebige, aber während der ganzen Rechnung als Gru lage der Vergleichung aller Längen festzuhaltende Länge ist. Zwischen x und z kann die ziehung $x = z + a$ gelten, dann ist $\dot{x} = \dot{z}$, also $\dot{y} : \dot{x} = x : e$. Eine vollkommen konseque algebraisch-analytische Zeichensprache dürfte überhaupt auf keine anderen als homoge Gleichungen führen, homogen nach **jeder** Gröſsenart, die in der Gleichung vorkommt, d. h. m dürfte das Zeichen 1 in keiner anderen Bedeutung gebrauchen als der, daſs es anzeigt, irge zwei Gröſsen einundderselben Art sind einander gleich; man dürfte es aber nicht für Gröſsen selbst setzen, mit denen man andere Gröſsen vergleicht oder miſst, so daſs es in ei und derselben Gleichung die verschiedensten Dinge: Zahlkoeffizient, Strecke, Fläche, Zeit, Kr Masse, Geschwindigkeit u. s. w. u. s. w. bedeuten kann.

Wird an der Euklidischen Erklärung: Zwei Gröſsen, die ein Verhältnis zu einan bilden sollen, müssen homogen, d. h. so beschaffen sein, daſs irgend ein Vielfaches der ei die andere übertreffen kann, festgehalten, so kann die angewandte Analysis überhaupt nur homogene Gleichungen führen, d. h. jede Gleichung, die eine mögliche Beziehung zwisc Gröſsen ausdrückt, wird homogen nach allen in ihr vorkommenden Gröſsenarten. Dieses Ges der Homogeneität aller Gleichungen und aller Ansätze der angewandten Rechenkunst ist so gemeingiltig, daſs selbst der Quartaner es befolgen muſs. Der Ansatz zur Lösung einer A gabe der zusammengesetzten Schluſsrechnung hat die Form $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots}{(x) \cdot u \cdot v \cdot w \ldots} \ldots$, worin $a, b \ldots$ Gröſs gleicher oder verschiedener Art und x die gesuchte Gröſse andeuten. Der Ansatz ist sich falsch, wenn nicht beide Ausdrücke über und unter dem Bruchstrich nach allen in ihnen v kommenden Gröſsenarten homogen sind. Die Prüfung, ob der Ansatz homogen ist, wird erschwe wenn eine oder mehrere der Gröſsen $a, b \ldots$ die Einheit der betreffenden Gröſsenart bilde also mit 1 bezeichnet werden, bez. als Faktoren unbezeichnet bleiben.

Wo Gleichungen der angewandten Analysis nicht eine homogene Form haben, da müss sie homogen gedacht werden, oder sie stellen einen Unsinn dar. Ist M eine Strecke und eine Gröſse anderer Art, z. B. eine Belastung, und schreibt jemand $M = Q$, so bedeutet d nicht den Unsinn: eine Strecke ist gleich einem Gewicht; sondern es ist der bis aufs äuſsers

abgekürzte Ausdruck für folgenden Gedanken: Strecke M ist aus einer anderen nicht weiter bezeichneten Strecke, und Belastung Q aus einer anderen nicht weiter bezeichneten Belastung in gleicher Weise gebildet, wie einunddieselbe nicht weiter bezeichnete Zahl aus 1. — Werden die Einheiten von M und Q mit m und q bezeichnet, so drückt sich derselbe Gedanke präciser aus durch $M : m = Q : q$, oder durch die homogene Gleichung $Mq = Qm$. — Wäre die Beziehung zwischen M und Q dargestellt durch $M + Q = 3$, so müfste einer, der die Gleichung versteht, eine längere Reihe von Begriffen und Beziehungen dahinter lesen. Zuerst eine Einheit von M und eine Einheit der Gröfsenart Q; sie mögen m und q heifsen. Dann eine Zahl μ, die aus 1 so gebildet ist, wie M aus m; und eine Zahl γ, die aus 1 so gebildet ist, wie Q aus q, dann sagt obige Gleichung aus, dafs $\mu + \gamma = 3$ ist. Schreibt man jene Gleichung aber $\frac{M}{m} + \frac{Q}{q} = 3$, und macht Gebrauch von Vietas grofsem Gedanken, mit den Gröfsensymbolen wie mit Zahlen zu operieren, so folgt die homogene Gleichung $Mq + Qm = 3mq$. — Oder wäre eine Beziehung zwischen einer Strecke M und einer Belastung Q dargestellt durch die Gleichung $M^2 \cdot Q + M \cdot Q^3 = 1$, so ist ihr wahrer Sinn dieser $\left(\frac{M}{m}\right)^2 \cdot \frac{Q}{q} + \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{Q}{q}\right)^3 = 1$, woraus die nach Strecken und Belastungen homogene Gleichung $M^2 \cdot Qq^2 + Mm \cdot Q^3 = m^2 q^3$ hervorgeht.

Wir halten daher Newtons Hinweis darauf, dafs die Fluxionsgleichungen nach den Fluxionen homogen sein müssen, nicht für eine »Unklarheit«, sondern für eine selbstverständliche Folge des Begriffes der Fluxionen als Gröfsen, die nur untereinander vergleichbar sind, aber nicht an der Einheit der Fluenten gemessen werden können. Keine folgerichtige Bildung eines Ansatzes einer Aufgabe, in der Fluenten und Fluxionen vorkommen, kann, wenn alle verschiedenen Fluenten und Fluxionen mit unterscheidenden Zeichen belegt werden, auf die Gleichung $\dot{x} + xx\dot{y} - axx = 0$ führen. Diese Gleichung ist entweder ein Unding, oder sie zeigt an, dafs bei ihrer Bildung die Inkonsequenz begangen worden ist, den Einheiten verschiedener Gröfsenarten einerlei Zeichen 1 zu geben, bez. sie ganz wegzulassen. Nehmen wir an, x und y wären rechtw. Koordinaten, a ein Kurvenparameter, die Streckeneinheit sei e, die Einheit der Fluxionen $\dot{z}$ (sie kann zunächst nicht $\dot{x}$ oder $\dot{y}$ sein, weil diese Fluxionen bereits anders als durch 1 bezeichnet sind und die Gleichung nach $\dot{x}$ und $\dot{y}$ nicht homogen ist), dann ist der wahre arithmetische Sinn der Gleichung dieser: $\frac{\dot{x}}{\dot{z}} + \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{\dot{z}} \cdot \frac{\dot{y}}{\dot{z}} - \frac{a}{e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{e} = 0$, woraus nach Vieta folgt $e^3\dot{x}\dot{y} + e^2xx\dot{y} - axx\dot{z}\dot{z} = 0$. Indem nun Newton die Konsequenz in der Bezeichnung nur für die Fluxionen, nicht für die Fluenten durchführt, d. h. $e = 1$ setzt, erhält er $\dot{x}\dot{z} + xx\dot{y} - axx\dot{z}\dot{z} = 0$. — Wenn daher Weifsenborn dieses Verfahren Newtons einen „Kunstgriff“ nennt und sagt: „Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dafs hier jeder Sinn aufhört“, so kann ich dieses Urteil nicht teilen. Die Frage Cantors aber: „Was soll dieses $\dot{z}$, was soll z selbst bedeuten?“ ist nach allem, was über Gleichungen zwischen drei und mehr Fluenten bereits gesagt ist, erledigt. Sonst kann man die Antwort auch aus der Art entnehmen, wie Newton solche Gleichungen integriert. Es heifst in der »Solutio casus III« (Opusc. I, S. 83): »Statim nos extricabimus a problemate solvendo, quando aequatio continet tres vel etiam plures

quantitatum fluxiones. Nam ad id sufficit quamlibet relationem inter binas supponere, cum ha relatio a statu quaestionis non determinatur, et hinc deduci potest relatio, quae est inter earu fluxiones, ita ut exterminari possit alterutra cum fluxione sua. Quamobrem, si trium quan tatum fluxiones adsunt, una aequatio assumenda est; duae aequationes, si quatuor insu fluxiones; atque ita porro; *ita ut aequatio proposita tandem in aliam transformetur, in qua si duae fluxiones tantummodo.* Tunc autem aequatio haec resolvenda est ut supra et sic detegent relationes aliarum quantitatum. — Sit proposita $2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0$. Ut obtineam relatione quantitatum x, y et z, fingo relationem quamlibet inter duas ex ipsis« ($x = y$, aut $2y = a +$ sive $x = yy$, etc.) »Sumamus $x = yy$ et, quod hinc conficitur, $\dot{x} = 2y\dot{y}$. Igitur aequatio pr posita mutatur in $4y\dot{y} - \dot{z} + yy\dot{y} = 0$, et hinc educitur relatio inter y et z, id est $2yy -$ $+ \frac{1}{3}y^3 = 0$: Restitue x et invenies $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Ergo *ex infinitis modis*, quibus x, y et altera ad alteram, possunt referri, *unus inventus* fuit, qui exponitur per has aequation $x = yy$; $2yy + \frac{1}{3}y^3 = z$; et $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.«

Wie Weifsenborn (a. a. O. S. 39) sagen kann, dieser Casus III sei identisch mit de Problem der partiellen Differentialgleichungen, ist mir unverständlich. Nicht um eine Funktio mehrerer unabhängigen Variabelen handelt es sich hier, sondern um mehrere Funktione einundderselben unabhängigen Variabelen. Dafs Newton nur den letzteren Fall im Auge hatt konnte er, da der Begriff der „Funktion" damals noch des sprachlichen Ausdrucks entbehrt deutlicher nicht sagen. Weifsenborn giebt in seiner Darstellung das Ergebnis der Newtonsche Integration in einer Form, in der es bei Newton nicht steht, nämlich $2x + \frac{1}{3}xy = z$ un sagt dann: „Dafs dieses Resultat ein unrichtiges ist, davon überzeugt man sich leicht durc die Probe." Aber das Gegenteil ist wahr. Die Probe beweist die Richtigkeit dieses Resultate Denn wenn $2x + \frac{1}{3}xy = z$, so ist 1) $2x - z + \frac{1}{3}xy = 0$; folgl. 2) $2\dot{x} - \dot{z} + \frac{1}{3}x\dot{y} + \frac{1}{3}y\dot{x} = 0$ aber wegen $x = yy$ ist $\dot{x} = 2y\dot{y}$; folgl. $\frac{1}{3}y\dot{x} = \frac{1}{3}y \cdot 2y\dot{y} = \frac{2}{3}y^2\dot{y} = \frac{2}{3}x\dot{y}$; folgl. $\frac{1}{3}x\dot{y} + \frac{1}{3}y$ $= \frac{1}{3}x\dot{y} + \frac{2}{3}x\dot{y} = x\dot{y}$; also geht (2) über in $2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0$, was zu beweisen war. Weifsen born verwechselt die relatio quaelibet (hier $x = y^2$), durch die Newton das unbestimmt Problem zu einem bestimmten macht, wohl mit dem Begriff der „willkürlichen Funktion" be Integration partieller Differentialgleichungen, und kommt dadurch zu seinem schiefen Urteil.*) — Newton giebt zu Casus III nur dieses eine Beispiel, während er dem Casus I, Gleichungen vo der Form $\dot{y} = \Sigma a x^{\alpha} \dot{x}$ bez. $\dot{x} = \Sigma b y^{\beta} \dot{y}$, 4 Seiten; dem Casus II, Gleichungen von der Form

*) Die Auffassung, die Fluxionsgleichungen mit mehr als zwei Fluenten seien die heutigen partiellen Differentialgleichungen, ist aus Weifsenborn in Cantor's Geschichte der Mathematik übergegangen und veranlafst Cantor (a. a. O. III, S. 166) zu dem Urteil: „Newton weifs mit von einander unabhängigen Veränderlichen sich nicht zu helfen und setzt deshalb (?) diese ihm unbequemene Gröfsen durch hinzugenommene Bedingungen in ein Abhängigkeitsverhältnis von einander." — Einem Newton gegenüber sträubt sich mein Gefühl dagegen, ein solches Urteil als eine unvermeidliche Konsequenz seiner Behandlung des Casus III der Fluxionsgleichungen anzuerkennen.

$\dot y = \Sigma a x^\alpha y^\beta \dot x$, aber 12 Seiten widmet. Und er wählt die relatio quaelibet $x = yy$ so, dafs die entstehende Gleichung $4\,y\dot y - \dot z + yy\dot y = 0$ nur reine Glieder enthält, die Solutio peculiaris also anwendbar und die Entwickelung in Reihen entbehrlich wird.

Über die Bedeutung von $\dot z$ und z in der aus $\dot x + x\dot x\dot y - axx = 0$ entstandenen Gleichung $\dot x\dot z + x\dot x\dot y - ax^2\dot z\dot z = 0$ kann nun kein Zweifel mehr sein. Man hat sich zu sagen: Da $\dot x + x\dot x\dot y - axx = 0$ nicht homogen ist, so steckt darin noch eine dritte Fluxion, die mit 1 be-eichnet ist und deshalb nicht zum Ausdruck kommt. Giebt man ihr das Zeichen $\dot z$ und fafst $\dot x$ und $\dot y$ auf als $\dot x : \dot z$ und $\dot y : \dot z$, so erhält man die homogene Form der Gleichung. Dieselbe ist ler unvollständige Ausdruck eines Problems zwischen zwei Variabelen (relatae), die als Funktionen einer und derselben dritten Variabelen (correlata) z aufzufassen sind. So lange icht noch eine Gleichung zwischen x und z oder y und z gegeben ist, sind die Abhängig-eiten zwischen y und z, sowie zwischen x und z nicht bestimmt. Eine dieser Abhängigkeiten ann willkürlich fingiert und so »ex infinitis modis« ein beliebiger Modus herausgegriffen werden.

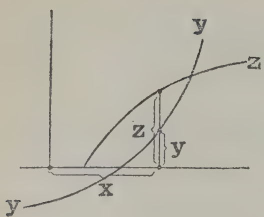
Newton schreibt auch zahlreiche Beispiele zu Casus II so, dafs er die Fluxion der uantitas correlata unbezeichnet läfst (d. h. mit 1 bezeichnet denkt); z. B. $\dot y = \sqrt{4y} + \sqrt{xy} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, anstatt $\dot y = 2y^{\frac{1}{2}}\cdot\dot x + x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{2}}\cdot\dot x$ (Op. I, S. 82). Nachdem er aber die Notwendig-eit der Homogeneität der Fluxionsgleichungen ausdrücklich betont hat, ist seine Inkonsequenz n der Bezeichnung ohne Bedeutung. Dagegen vermisse ich die Aufklärung über eine andere veder von Cantor noch von Weifsenborn berührte Frage.

Die direkte Operation, der Übergang von der Fluentengleichung zur Fluxionsgleichung, ührt nicht nur auf homogene, sondern auch auf nur lineare Formen. Da nun die inverse)peration, der Übergang von einer Fluxionsgleichung zur Fluentengleichung, die Bestätigung ihrer ichtigkeit immer erst durch die Probe, durch Rückerzeugung der gegebenen Fluxionsgleichung us der aufgestellten Fluentengleichung auf Grund des Fluxionstheorems erhalten kann und ieses Theorem nur auf lineare Fluxionsgleichungen führt, so entsteht die Frage: wie denkt sich ewton die Gleichung $\dot x + x\dot x\dot y - axx = 0$, bez. $\dot x\dot z + x\dot y\dot x - axx\dot z\dot z = 0$ entstanden, die doch icht linear ist? Schwebte ihm überhaupt eine bestimmte Entstehungsart nicht linearer Fluxions-leichungen vor, oder ist es auch einem Newton passiert, dafs er über den Symbolen die Sache ergafs und in ein Spiel mit leeren Formeln verfiel? Wie denkt er sich die Gleichung $\dot y = \dot x\dot y + xx\dot x\dot x$ entstanden, die er (S. 64), $\dot x$ als Fluxionseinheit betrachtend, umformt in $\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^2 - \left(\frac{\dot y}{\dot x}\right) = x^2$ und deren zwei Wurzeln $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}$ er entwickelt in die unend-chen Reihen:

$$\frac{\dot y}{\dot x} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6 \text{ etc. und } \frac{\dot y}{\dot x} = -x^2 + x^4 - 2x^6 + 5x^8 \text{ etc.,}$$

m hieraus (S. 66) auf Grund der Regel: „aus ax^α wird $\frac{a}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}$“ zu schliefsen:

$$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 \text{ etc. und } y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{7}x^7 + \frac{5}{9}x^9 \text{ etc.?}$$

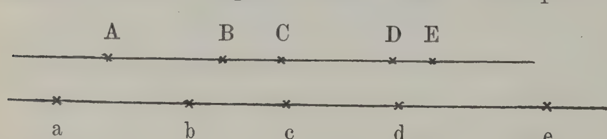


Man kann natürlich auch diesem Verfahren eine Deutung geben. Man denk sich zwei Funktionen y und z von x. Sei $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$. Dann erhält ma $\dot{y}=p\dot{x}$, und $\dot{z}=q\dot{x}$, wo p und q Funktionen von x sind; also i $\dot{y}-p\dot{x}=0$ und $\dot{z}-q\dot{x}=0$; daher auch $(\dot{y}-p\dot{x})(\dot{z}-q\dot{x})=$ oder $\dot{y}\dot{z}-p\dot{x}\dot{z}-q\dot{y}\dot{x}+pq\dot{x}\dot{x}=0$. Diese Gleichung könnte ma betrachten als die gleichzeitige Fluxionsgleichung zweier Relatione $y=f(x)$ und $z=\varphi(x)$. Begeht man nun die Inkonsequenz in d Bezeichnung, für $f(x)$ und $\varphi(x)$ einerlei Zeichen y zu setzen, so geht obige Gleichung über i $\dot{y}\dot{y}=(p+q)\dot{y}\dot{x}-pq\dot{x}\dot{x}$, die in der Form mit dem Newtonschen Beispiele $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{y}+xx\dot{x}$ übereinstimmt, ebenso wie $\dot{y}\dot{z}-p\dot{x}\dot{z}-q\dot{y}\dot{x}+pq\dot{x}\dot{x}=0$ mit $\dot{x}\dot{z}-x\dot{x}\dot{y}-axx\dot{z}\dot{z}=0$. – Dachte sich aber Newton die Sache so? Er schweigt hierüber.

Die willkürlichen Konstanten der Fluenten.

Jede Fluente einer Fluxionsgleichung und jede Fluente einer Fluenten gleichung, die aus einer gegebenen Fluxionsgleichung gewonnen ist, darf um ein willkürliche Konstante vermehrt oder vermindert werden. Von diesem Satze, den ma freilich in obiger expliciter Fassung in Newtons Schriften nicht findet, macht Newton bei seine Umformungen gleichwohl vielfach Gebrauch. Um z. B. die Gleichung $\dot{y}=\frac{a}{x}\cdot\dot{x}$ zu integrierer setzt Newton (Opusc. I, S. 68) $b+x$ anstatt x (nicht etwa $b+z$ anstatt x, und $\dot{z}$ anstatt $\dot{x}$ und erhält $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{a}{x}=\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{ax}{bb}+\frac{axx}{b^3}-\frac{ax^3}{b^4}$ etc. und daraus $y=\frac{ax}{b}-\frac{axx}{2bb}$ $+\frac{ax^3}{3b^3}-\frac{ax^4}{4b^4}$ etc.*) Die Stelle, in der er dies im Anschlufs an seine demonstratio zu Problem II rechtfertigt (vergl. S. 35), erscheint mir zu charakteristisch und wichtig, als dafs ich sie hier nicht vollständig fixieren sollte.

»In aequationum reductione adhibeo operationem, cujus rationem afferendam censeo; ea consistit in alicujus fluentis quantitatis transmutatione per ejus connexionem cum data quantitate. Sint AE atque ae duae rectae utrimque in infinitum protensae, per quas ferantur duae res mobiles, aut duo puncta, quae *eodem tempore* pervenisse concipiantur in loca A et a, B et b, C et c, D et d etc., et mobilis, quod fertur per AE, distantia a puncto B illius motum ita metiatur, ut $-BA$, $+BC$, $+BD$, $+BE$ successive et quando mobile est in locis A, C, D, E, sint fluentes quantitates. Pariter sit b simile punctum in altera linea. Tunc igitur $-BA$ et $-ba$ erunt duae *contemporaneae fluentes*,



*) Cantor (a. a. O. III, S. 166) sagt mit Bezug hierauf: „An eine Rechtfertigung dieser Willkür (?) scheint er (Newton) nicht gedacht zu haben.“ — Wie?! Ist die oben folgende citierte Stelle nicht eine solche Rechtfertigung jener scheinbaren Willkür, dafs sie — ihrem Inhalte nach — die Bewunderung vor Newtons Geiste herausfordert?

ut etiam $+BC$ et $+bc$, $+BD$ et $+bd$, $+BE$ et $+be$, etc. Jam si punctis B et b substituantur puncta A et c, ad quae, velut quiescentia, referantur motus, tunc 0 et $-ca$, $+AB$ et $-cb$, $+AC$ et 0, $+AD$ et $+cd$, $+AE$ et $+ce$ erunt *contemporaneae fluentes quantitates.* Quocirca *mutatae quidem sunt fluentes quantitates additione et subductione datarum quantitatum* AB et ac, sed in iis mutatae *non* fuerunt *neque motuum celeritates neque mutua fluxionum relatio. Partes* enim *eodem tempore genitae* AB *et* ab, BC *et* bc, CD *et* cd, DE *et* de sunt ejusdem longitudinis in utraque hypothesi. *Eodem pacto in aequationibus has quantitates exponentibus contemporaneae quantitatum partes non ideo mutantur, quia absoluta earum magnitudo aliqua data quantitate augetur vel minuitur.* Hinc patet propositum; etenim eo tantum tendit problema, ut determinentur *contemporaneae partes aut differentiae absolutarum quantitatum* u, x, y aut z, descriptae data *fluendi ratione.* Nihil autem interest cujusnam absolutae magnitudinis sint hae quantitates, dummodo earum *contemporaneae* vel ***correspondentes differentiae*** conveniant cum proposita fluxionum relatione.

Hujus rei ratio tradi etiam sic algebraice potest. Proposita sit aequatio $\dot y = yx\dot x$, et suppone $x = 1 + z$, igitur per probl. I. $\dot x = \dot z$; quapropter pro $\dot y = yx\dot x$ scribere licet $\dot y = y\dot x + yz\dot x$ (Newton schreibt nicht $\dot y = y(1+z)\dot z = y\dot z + yz\dot z$). Nunc quia $\dot x = \dot z$, liquet, quod tametsi quantitates x et z non sint ejusdem longitudinis, attamen aequaliter fluunt respective ad y, et habent aequales una genitas partes. Quidni igitur repraesentem eodem symbolo quantitates, quarum ratio fluendi eadem est, et ad determinandas earum contemporaneas differentias quidni scribam $\dot y = y\dot x + yx\dot x$ pro $\dot y = yx\dot x$.« — Wieder eine kleine Newtonsche Inkonsequenz in der Bezeichnung. Warum mochte er nicht schreiben $\dot y = yx\dot x = y\dot z + yz\dot z$, da doch einmal $x = 1 + z$ und daher wohl $\dot x = \dot z$, aber nicht $x = z$ ist? — »Demum manifesto apparet, quomodo inveniri possint partes contemporaneae ex aequatione fluentes involvente. — Sic adsit aequatio $y = \frac{1}{x} + x$ et, cum $x = 2$, sit $y = 2\frac{1}{2}$; at cum $x = 3$, tunc $y = 3\frac{1}{3}$. Igitur, dum x fluit ex 2 in 3, y fluit ex $2\frac{1}{2}$ in $3\frac{1}{3}$, quapropter partes eodem tempore descriptae sunt $3 - 2 = 1$ et $3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

His tanquam dicendorum fundamentis substratis ad magis peculiaria problemata descendam.« Damit beschliefst Newton sein Problem II. Uns sind diese Ausführungen deshalb so bemerkenswert, weil sie in vieler Hinsicht, insbesondere aber in den »*correspondentes differentiae*« anstatt der »contemporaneae differentiae« oder »partes« eine auffällige Annäherung an die Leibnizische Grundauffassung verraten.

Schlufsbemerkung.

Mit einem abschliefsenden Urteile über Newtons Analysis stetig veränderlicher Gröfsen halte ich hier zurück, weil die Darlegung der Anwendungen seiner methodus fluxionum sowie die darauf bezüglichen Ausführungen in seinen übrigen Schriften hier nicht Platz finden können. Noch viel weniger kann daher hier ein Urteil über die Leibnizische Begründung der Infinitesimalrechnung motiviert werden. Was aber das Verhältnis zwischen Newtonscher und Leibnizischer Darstellung anlangt, so geht mein Urteil dahin, dafs ich den Leibnizischen

mathematischen Entwickelungen mit mehr intellektuellem Behagen folgen kann als denen von Newton. Dies beruht zum grofsen Teile auf dem Unterschiede in der Handhabung der Symbole. Wo Leibniz alle Sorgfalt darauf verwendet, dafs die gebrauchten Zeichen dem Leser auch den ganzen Sinn der Begriffe und ihrer gegenseitigen Beziehungen jeden Augenblick vor Augen führen, gewinnt man bei Newton mehr wie einmal den Eindruck, als ob er geflissentlich Dinge, die er selbst für sich klar unterscheidet, dem Leser gegenüber durch schwankende Bedeutung der Symbole verschleiere. Eben darum treten in der Leibnizischen Sprache alle der Analysis stetiger Veränderungen immanenten Schwierigkeiten deutlich heraus, während sie von Newton verhüllt, aber keineswegs beseitigt werden. Mathematische Kunstgriffe, Wendungen und Hilfsvorstellungen, die die Aufgabe haben, im entscheidenden Schritte des logischen Gedankenganges über vorhandene Schwierigkeiten hinwegzutäuschen, finden sich bei Leibniz nicht. Keine Fluxionen ohne Momente! Der Begriff der Fluxionen hat erst in dem der Momente seine Stütze. Warum dann nicht die Fluxionen ganz bei Seite lassen und direkt mit Momenten rechnen?! Dies thut Leibniz. Seine Differenzen sind dasselbe wie die Newtonschen Momente. Es giebt Gröfsen von solcher Kleinheit, dafs die Ratio irgend eines Vielfachen einer solchen Gröfse zu irgend einer noch so kleinen gegebenen endlichen Gröfse derselben Art durch keine noch so kleine Bruchzahl angebbar ist, dafs sie aber gleichwohl untereinander alle Zahlenverhältnisse bilden können; noch mehr: es giebt innerhalb einer jeden Gröfsenart unendlich viele Gröfsenstufen, derart, dafs die Ratio einer Gröfse der einen Stufe zu einer Gröfse der unmittelbar folgenden oder unmittelbar vorangehenden Stufe durch keine andere Zahl als 0 oder ∞ dargestellt werden kann, während die Verhältnisse von Gröfsen einer und derselben Stufe alle Zahlen durchlaufen. Das ist der Grundgedanke der Leibnizischen Infinitesimalrechnung. Und Leibniz, weit entfernt davon, einmal vorhandene logische Schwierigkeiten zu verhüllen, giebt seinem Grundgedanken Ausdruck in paradoxen Formen: Ruhe ist Bewegung, und Bewegung Ruhe, Gleichheit ist Ungleichheit, und Ungleichheit ist Gleichheit, $x + dx = x$ und gleichwohl dx eine Gröfse; d. h. Ruhe ist unendlich kleine Bewegung, und Bewegung ist von der Ruhe nur der Gröfse nach, nicht der Art nach verschieden. Gleiche Gröfsen eines Kontinuums unterscheiden sich noch durch Unendlichkleines, und Gröfsen, die sich durch Unendlichkleines unterscheiden, sind einander gleich zu setzen. $x + dx = x$, weil $\frac{x + dx}{x} = \frac{x}{x} + \frac{dx}{x} = 1 + \underline{0} = 1$ ist, u. s. w., wo $\underline{0}$ nicht die absolute Null, sondern die Zahl ist, die sich zu 1 verhält, wie ein Unendlichkleines zu einem Endlichen, also etwa wie der Abstand einer Kurve von der Asymptote in unendlich fernen Punkten zu einer endlichen Länge; oder $\underline{0}$ ist die Zahl, die wir heute bezeichnen mit $\left(\lim \frac{1}{n}\right)_{n=\infty}$. Diese Paradoxa sind aber nicht willkürliche Fiktionen, sondern haben ihr »fundamentum in re«; in dem Verhältnis des nur anschaulich erfafsbaren, von der Mathematik als objektiv gegeben zu betrachtenden Kontinuums zu unserem subjektiven, nur in distinkten Begriffen fortschreitenden Denken. Alles Rechnen mit Gröfsen verschiedener Stufen oder Ordnungen wird bei Leibniz beherrscht von seiner »Lex nova homogeneorum«. Jede Gröfse irgend einer Stufe ist nur an Gröfsen derselben Stufe mefsbar; gemessen an Gröfsen anderer Stufen aber 0 oder ∞. Daher fallen aus jeder Gleichung, die zunächst Glieder verschiedener Gröfsenstufen enthält, alle Glieder,

die in Bezug auf andere Glieder derselben Gleichung von einer niederen Stufe sind, weg, wenn man die Einheiten, an denen die Glieder der Gleichung gemessen werden, aus der dem Werte nach höchsten in der Gleichung vorkommenden Gröfsenstufe nimmt. Dementsprechend verlangt die lex homogeneorum, dafs jede Endgleichung einer anlytischen Operation homogen sei nicht nur nach den Gröfsenarten, sondern auch nach den Gröfsenstufen.

Sehen wir zu, wie der Beweis des Newtonschen Fluxionstheorems nach Leibnizischer Methode verlaufen würde, bei Festhaltung Newtonscher Bezeichnung. Aus $f(x, y, z \ldots) = 0$ und $f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o, \ldots) = 0$ wird auf rein arithmetischem Wege entwickelt:

$$1) \qquad \left.\begin{array}{l} a \cdot (\dot{x}o) + b \cdot (\dot{y}o) + c \cdot (\dot{z}o) + \ldots \\ + h \cdot (\dot{x}o)^2 + k \cdot (\dot{x}o) \cdot (\dot{y}o) + \ldots\ldots \\ + p \cdot (\dot{x}o)^3 + q \cdot (\dot{x}o)^2 \cdot (\dot{y}o) + \ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Iedes Glied der 2. 3. 4.... Zeile verhält sich zu irgend einem Gliede der vorhergehenden Zeile wie eine der Gröfsen $\dot{x}o$, $\dot{y}o \ldots$ zu einer endlichen Gröfse. $\dot{x}o$, $\dot{y}o \ldots$ verschwinden aber gegenüber jeder endlichen Gröfse. Also verschwinden alle Glieder irgend einer Zeile gegenüber den Gliedern der vorhergehenden Zeile; also bleibt, in Übereinstimmung mit dem Gesetz der Homogeneität

$$2) \qquad \begin{array}{l} a(\dot{x}o) + b(\dot{y}o) + c(\dot{z}o) + \ldots = 0 \text{ oder} \\ a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz + \ldots = 0. \end{array}$$

Das ist die Leibnizische Form der Fluxionsregel, nämlich die Momentengleichung oder Differentialgleichung erster Ordnung.

Newton gewinnt (1) wie oben. Dann trennt er die zusammengehörigen Faktoren $\dot{x}$ und o, $\dot{y}$ und o u. s. w. voneinander und schreibt:

$$3) \qquad \left.\begin{array}{l} a \cdot \dot{x}o + b \cdot \dot{y}o + c \cdot \dot{z}o + \ldots \\ + h\dot{x}\dot{x}o^2 + k\dot{x}\dot{y}o^2 + \ldots\ldots \\ + p\dot{x}^3o^3 + q\dot{x}^2\dot{y}o^3 + \ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Nun wird durch o dividiert unter der stillschweigend gemachten Forderung $:o = 0$; es folgt:

$$4) \qquad \left.\begin{array}{l} a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} + \ldots\ldots \\ + h\dot{x}\dot{x}o + k\dot{x}\dot{y}o + \ldots\ldots \\ + p\dot{x}^3o^2 + q\dot{x}^2\dot{y}o^2 + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Schliefslich wird doch noch derselbe Schritt gemacht, den Leibniz unmittelbar nach (1) machte: Cum autem finxerimus o *quantitatem infinite parvam,* ut exponere posset quantitatum momenta, termini in eam ducti *pro nihilo possunt haberi cum aliis collati,* eos igitur *negligo,* et superest

$$5) \qquad a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} + \ldots = 0.$$

Das ist die Newtonsche Fluxionsgleichung.

Nach meinem Ermessen steht die Leibnizische Gedankenfolge, die die künstlichen Zwischenglieder (3) und (4) nicht nötig hat, hoch über der Newtons.

Weifsenborn (a. a. O. S. 28 und 58) erklärt, Newton habe seine Fundamentalregel „ohn Beweis aufgestellt", kommt aber wunderbarerweise gleichwohl zu dem Schlusse, die Fluxion rechnung zeichne sich vor der Differentialrechnung durch ihre „sichere Begründung" au Gerhardt (Die Entdeckung der höheren Analysis, Halle 1855) findet, dafs Leibnizens „imposanter Ba auf unsicherem Fundament ruht", während „die Fluxionsrechnung auf dem (?) naturgemäfse Wege ohne Beimischung anderer Hilfsmittel(?) entstanden" sei und sich einer „festen Be gründung" und eines „sicheren Fundaments" erfreue. Montucla (Histoire des mathématiques I S. 369) nennt die Auffassungsweise Newtons »bien plus lumineuse« als die von Leibni Derselben in allgemeinen Wendungen ausgesprochenen Meinung bin ich mit wenigen Au nahmen fast überall in der mir zugängig gewesenen einschlägigen Litteratur dieses und de vorigen Jahrhunderts begegnet, habe freilich auch überall eine tiefere in den Zusammenhan und Grund der hierbei in Frage kommenden Begriffe dringende Begründung dieser Meinun vermifst. Darum bedrückt es mich nicht, mit meinem oben angedeuteten entgegengesetzten Ur teile allen jenen Autoren gegenüber als Häretiker zu erscheinen. Ich kann meine aus einem kritischen Studium der Quellen gewonnene Überzeugung nicht verleugnen gegenüber einer sic aus einem Buche in das andere fortpflanzenden Meinung, die dem Leibnizischen Gesetz de Kontinuität zu wenig Beachtung schenkt und den Leibnizischen Gedanken der Homo geneität der Differentialgleichungen nicht zu würdigen weifs, wo nicht ganz ignorier

---

Nachsatz. — Einige Tage nach Beendigung der Drucklegung dieses Programms erhielt ich durch d Freundlichkeit von Herrn Universitätsprofessor Dr. Engel hier Kenntnis von den ***„Notes sur l'histoire de mathématiques. Par H.-G.-Zeuthen."*** (*Extrait du Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et de Lettres de Danemark, Copenhague, pour l'année 1895*). — Ich ersehe aus ihnen, dafs H.-G.-Zeuthen eine Reih von kritischen Bemerkungen Weifsenborns und Cantors über Newton in demselben Sinne besprochen hat, i dem auch ich sie (S. 30 ff.) habe berühren müssen. Das dient mir zur Beruhigung. Denn eben weil darüber kei Zweifel sein kann, dafs alle aufmerksamen und kritisch vergleichenden Leser der betreffenden Schriften Newtons Weifsenborns und Cantors über jene kritischen Bemerkungen zu einem übereinstimmenden Urteile komme müssen, verursachte es mir ein störendes und bis zu einem gewissen Grade hemmendes Gefühl, mich allein i offenem Widerspruche zu wissen gegenüber einigen Ausführungen solcher Autoren, die gerade wegen der Zuverlässig keit ihrer Angaben oft zu Rate gezogen werden.

Leipzig, den 15. Febr. 1896.

E. Tischer.

Bericht
über das Schuljahr 1895 auf 1896.

I. Chronik.

Unmittelbar nach dem Entlassungsaktus am 22. März 1895 trat der Rektor einen ihm vom Kgl. Ministerium bewilligten siebenwöchigen Urlaub an, um eine Reise nach Italien zu unternehmen. Während dieser Zeit übernahm die Rektoratsgeschäfte der Konrektor Prof. Dr. Gebhardt. Er leitete daher auch die Schulfeier des achtzigsten Geburtstages Sr. Durchlaucht des Fürsten Bismarck am 1. April, indem er zugleich die Festrede hielt und darin in kurzen Zügen einen Überblick über Bismarcks politische Thätigkeit und eine Charakteristik seiner Eigenschaften, die ihn nach Luther zum größten Deutschen und zum geliebten und bewunderten Volkshelden gemacht haben, gab, und mit dem freudig aufgenommenen dreifachen Hoch auf den großen Staatsmann schloß. Zum bleibenden Andenken an den Tag war aus Beiträgen der Lehrer und Schüler eine Bismarckbüste in Elfenbeinmasse für die Aula angekauft worden, die während der Feier, umrahmt von dem Grün großer Blattpflanzen, zum ersten Male den Festraum der Schule schmückte und gleich darnach in einer auf gleiche Weise beschafften Büste Moltkes ihr Gegenstück erhielt. Gesänge des Schülerchors begannen und schlossen die Feier. Mit der mündlichen Klassenprüfung am 3. April und der Zensurverteilung und Versetzung am 5. April schloß das Schuljahr. Mit diesem Abschluß verließen uns auch die Kandidaten Dr. Johannes Babick und Dr. Arnold Peter, der erste, um an die Realschule in Crimmitschau, der zweite, um an die von Plauen i. V. überzugehen, von den herzlichsten Wünschen des Kollegiums begleitet.

Nach der Aufnahmeprüfung am 22. April, die der Anstalt im ganzen 70 neue Schüler, darunter 52 Sextaner, zuführte, wurde das neue Schuljahr mit der Feier des Geburtstages Sr. Maj. des Königs am 23. April eröffnet, der der Schulvorsteher, Herr Oberbürgermeister Dr. Georgi, seine Gegenwart schenkte. Nach dem einleitenden Festhymnus „Jehovah deinem Namen sei Ehre" deklamierte der Oberprimaner Felix Meinhold ein von ihm verfaßtes Gedicht „Treue um Treue" (Markgraf Friedrich der Freidige und die Stadt Freiberg). Die Festrede hielt der Oberlehrer Dr. Johannes Baunack. Nachdem er den an diesem Tage aufsteigenden patriotischen Wünschen und Gefühlen Ausdruck gegeben hatte, entwarf er ein liebevoll und anschaulich ausgeführtes Lebensbild des Dichters der „Griechenlieder" Wilhelm Müller, zeigte dabei, wie die Arbeit dieses Lebens dem Hellenentum, dem Römertum und dem Deutschtum gewidmet gewesen sei, und schloß mit einem begeistert aufgenommenen Hoch auf Se. Majestät. Der Rede voraus ging die Sachsenhymne von Karl Lieber, komponiert von Hugo Jüngst, den Schluß des ganzen Aktus bildete der allgemeine Gesang des Liedes „Gott segne Sachsenland". — Einen ganz besonderen Anlaß zu Dank und Freude bot dieser Tag der Nicolaischule noch insofern, als Se. Majestät der König geruht hatten, die treue, hingebende und erfolgreiche Amts-

thätigkeit des Konrektors Prof. Dr. Gebhardt, die seit 29 Jahren der Anstalt gehört, durch die Verleihung des Ritterkreuzes I. Klasse des Albrechtsordens anzuerkennen, dessen Insignien ihm am 22. April vom Herrn Oberbürgermeister Dr. Georgi überreicht wurden. Möge dem geschätzten Kollegen noch eine lange Reihe von Jahren gesegneter Wirksamkeit beschert sein!

Der Unterricht begann am 24. April, wobei die Stunden des Rektors bis zu seiner Rückkehr am 10. Mai von den Kollegen Döring, Voigt und Kahnis freundlichst vertreten wurden. Dabei vollzog sich die durch den Abgang des Herrn Rektor Preuß zu Michaelis 1894 veranlaßte Verschiebung der Ordinariate in der Weise, daß Oberlehrer Berlit die IIA[a], Dr. Glafey die III..., Dr. Baunack I die IIIA[a], Dr. Voigt die IIIB[a], Dr. Hildebrandt die IIIB[b], Dr. Frank die VI[a] übernahm. Für eine Reihe von Kollegen brachte der Anfang des neuen Schuljahres zugleich eine ansehnliche Gehaltserhöhung, für die bisherigen personalständigen Hilfslehrer Dr. Theod. Baunack und Dr. Eichler das Einrücken in die beiden neu gegründeten ständigen Lehrerstellen, alles nach der Ratsvorlage, der die Stadtverordneten am 27. März zugestimmt hatten. Zugleich erhielten die beiden zuletztgenannten Kollegen vom Kgl. Ministerium den Oberlehrertitel.

An der vom Vaterländischen Verein unter Leitung des Kollegen Dr. Voigt am Himmelfahrtstage, 23. Mai, veranstalteten Huldigungsfahrt der Leipziger zu Fürst Bismarck nach Friedrichsruh nahmen außer mehreren Lehrern 37 Schüler der Oberklassen mit der Schulfahne teil. Dabei wurde dem Fürsten im Namen aller vier Leipziger Gymnasien ein vom Oberprimaner Victor von Hase verfaßtes lateinisches Gedicht in prächtiger Renaissanceausstattung (der Firma Breitkopf & Härtel) überreicht.*)

Dr. Voigt und v. Hase hatten dabei die Ehre, von Sr. Durchlaucht zur Frühstückstafel gezogen zu werden, allen Beteiligten aber wird die Erinnerung an die großartige Huldigung ein unverlierbares Gut für ihr ganzes Leben bleiben.

Mit dem Beginn der Pfingstferien, die vom 1. bis 9. Juni dauerten, verließ uns Professor Dr. Döring, um mit Urlaub des Kgl. Ministeriums zur Wiederherstellung seiner schon seit längerer Zeit erschütterten Gesundheit einen stärkenden Aufenthalt im Hochgebirge zu nehmen. Während dieser Zeit vertraten ihn in IA[a] der Prof. Dr. Hultgren, in IB[a] und IIB[a] der Kandidat Joh. Calinich, der mit Bewilligung des Kgl. Ministeriums seit Ostern wieder in unterrichtlichen Zusammenhang mit der Schule getreten war. Nach den Sommerferien zu unsrer Freude wesentlich gestärkt und erfrischt zurückgekehrt, konnte Prof. Döring seinen Unterricht im ganzen Umfange wieder aufnehmen.

Bei der Berufs- und Gewerbezählung am 14. Juni waren 66 Schüler der Oberklassen mit thätig (ebenso viele an der Volkszählung am 2. Dezember). Die Augenuntersuchung der Schüler aller Klassen nahm Herr Prof. Dr. Schröter vom 13. Juli ab vor, die Impfung Herr Hofrat Dr. Bla... am 17. Juni, die Revision der Impflinge am 22. Juni.

---

*) Anmerkung. Das Gedicht hatte folgenden Wortlaut: Principem Ottonem de Bismarck, omnium Germanorum maximum, conditorem atque scutum imperii salutant scholarum Lipsiensium discipuli die ascensionis Domini MDCCCXCV.

Gens cum Teutoniae praesignis castra teneret,
Vicisti Gallos belliger indomitos.
Consociata tuis Germania viribus omnis
Te duce prae mundi gentibus enituit.
Dein patriae custos consumebaris agendo,
Cresceret ut semper publica nostra salus.
Aspice, nunc adiit hodierna luce iuventas
Et grates solvit fertque refertque tibi.
O lux Teutoniae, spes o fidissima nostra,
Praesidium et tutor, conditor imperii,
Grata manet Germana tibi semperque manebit
Ac fervet studio, care, iuventa tuo.
Di patrii, servate ducem, servate vigentem!
Has grato pro te fundimus ore preces.

Am 1. Juli wurden als Empfänger des Leibnizpreises die beiden Primi Scholae Gustav Hölscher und Hans Börner proklamiert. Der übliche Schulausflug fand am 2. Juli beim schönsten Wetter statt, wobei die Kgl. Sächsischen und Kgl. Preußischen Staatseisenbahnen wieder Fahrpreisermäßigungen gewährten. Die Sommerferien fielen in die Zeit vom 20. Juli bis 18. August. Während derselben wurde Dr. Traumüller in Tirol von einem ernsteren Unfalle betroffen, der ihn nötigte, mehrere Wochen seinen Unterricht auszusetzen. Für ihn traten seine Fachkollegen bereitwillig ein.

Mit besondrer Begeisterung beging die Schule in diesem Jubeljahre, in dem ein Vierteljahrhundert seit den glorreichsten Siegen und der Erneuerung des Deutschen Reichs verflossen war, ihre Sedanfeier. Am 31. August wurde zunächst die übliche Turnfahrt nach Taucha unternommen, wo in Gegenwart zahlreicher Gönner und Freunde der Anstalt der Nachmittag in den Räumen des Schützenhauses unter mannigfachen Turn- und Wettspielen verging. Nach ihrer Beendigung wies der Rektor in kurzer Ansprache auf die Bedeutung des Tages hin und schloß mit einem begeistert aufgenommenen dreifachen Hoch auf Ihre Majestäten den Kaiser Wilhelm II. und den König Albert. Hierauf sang die ganze nach Klassen geordnete Versammlung „Deutschland, Deutschland über alles“. Im Anschluß daran verteilte der Rektor an die Sieger in den Wettspielen die errungenen Preise, die in schwarzweißroten Schleifen, Eichenkränzen und silbernen Denkmünzen bestanden [die Preise im Fünfkampf erhielten Friedr. Waibler (IA^b) und Walther Schmidt (IA^a)] und erinnerte sodann an den Dank, den die Gegenwart den tapferen Mitkämpfern des großen Krieges, den gefallenen oder verstorbenen, wie den noch lebenden schulde. Auch die Schule sei so glücklich, einen derselben, Herrn Oberlehrer Berlit, den ihrigen zu nennen. Ihm galt sein zweites Hoch, das brausenden Wiederhall fand. Hierauf sprach noch der Oberprimaner Gustav Hölscher dem Rektor und dem Lehrerkollegium den Dank der Schüler für die gewährten Veranstaltungen aus. Ein Sonderzug führte gegen 9 Uhr die Festteilnehmer nach Leipzig zurück. Die Leitung der Turnfahrt hatten wieder die Kollegen Schütz, Meister, Brugmann, Tischer und Trautscholdt übernommen.

Dem Aktus am 2. September war diesmal eine etwas weitere Ausdehnung gegeben worden, Die Feier begann mit einem „Dankgebet nach der Schlacht von Sedan“, gedichtet von E. Dohmke, komponiert von Höpner. Darauf trug der Oberprimaner V. von Hase einen vom Rektor schon früher zunächst für das Kgl. Gymnasium zu Dresden-Neustadt verfaßten kurzen Bericht über die Schlacht von Sedan vor, und zehn Schüler verschiedener Klassen deklamierten Gedichte, die zusammen eine Übersicht über den Gang des großen Krieges gaben. In der Festrede schilderte der Konrektor Professor Dr. Gebhardt die Vorgeschichte des Krieges bis zur Abreise König Wilhelms zum Heere, indem er dabei besonders auf die diplomatischen Verhandlungen einging und mit einer Danksagung an alle die deutschen Helden, die zu der Abwehr französischer Überhebung mit geholfen haben, schloß. Nach dem Gesange eines Liedes vollzog der Rektor die Weihe der lorbeerbekränzten Gedenktafel, die von Lehrern und Schülern den ehemaligen 1870/71 für das Vaterland gestorbenen Nicolaitanern für die Aula gewidmet worden ist und auf schwarzem Marmor in goldnen Buchstaben die fünf Namen Julius Theodor Karl Strube, Paul Georg Heinrich Segnitz, Richard Alexander Flohr, Otto Karl Weber und Johannes Küstner trägt. Er wies dabei darauf hin, daß erst seit der Einführung der allgemeinen Wehrpflicht für die deutschen Gymnasien der Horazische Spruch dulce et decorum pro patria mori ernste Wahrheit geworden sei und daß diese Schulen an den Siegen wie an den Opfern des großen Krieges ihren reichlichen Anteil hätten. Hierauf ermahnte er die Schüler, des Beispiels der gefallenen Commilitonen stets eingedenk zu sein und die Ehrfurcht vor Gott, die Liebe zum Vaterlande

und die Treue gegen den König immerdar zu bewahren. Im Anschluß daran vollzog er die Verteilung von Bücherprämien an die Schüler aller Klassen, auch der drei unteren, für die diesmal ein patriotischer Bürger der Stadt, der nicht genannt sein wollte, die Mittel gespendet hatte. Der allgemeine Gesang „Deutschland, Deutschland über alles“ beendete den ganzen Aktus.

Am nächsten Tage begann die schriftliche Reifeprüfung, zu der außer einem Oberprimaner der Anstalt zwei Auswärtige uns zugewiesen und der Rektor zum Königl. Kommissar ernannt worden war. Die Prüfung bestand am 19. September der Stud. Konstantin Tsaoussopulos aus Athen. Nach der schriftlichen Klassenprüfung, 12. bis 14. September, wurde der Unterricht vor den Michaelisferien am 27. September geschlossen.

Die Studiertage des Sommerhalbjahres waren der 9. Mai und 18. Juni, wegen Hitze wurde der Unterricht an den Nachmittagen des 10. Juni, 1. Juli und 3. September ausgesetzt.

Zu Anfang des Winterhalbjahres 1895/96 traten zur Ableistung ihres Probejahres die Kandidaten des höheren Schulamts Rudolf Dietrich und Alexander Kurzwelly ein. Leider mußte zugleich Prof. Dr. Döring sich infolge eines Augenleidens für die nächsten Wochen auf seine Stunden in IA[a] beschränken, während die übrigen wieder vom Kand. Calinich übernommen wurden. Zum Glück dauerte diese Behinderung des Kollegen Döring nur kurze Zeit.

Die unter den Schülern auf Anregung des Deutschen Patriotenbundes am 18. Oktober mit Genehmigung des Kgl. Ministeriums veranstaltete Sammlung für das künftige Völkerschlachtdenkmal ergab die Summe von ca. 140 Mark.

Zu den festlichen Veranstaltungen dieses Jahres gesellte sich für Leipzig noch die feierliche Einweihung des großartigen Reichsgerichtspalastes am 26. Oktober. Die Nicolaitaner der obern und mittleren Klassen bildeten dabei in der festlich geschmückten Grimmaischen Straße Spalier und begrüßten die Majestäten Kaiser Wilhelm II. und König Albert beim Einzuge mit jubelndem Zuruf.

Am 6. November erhielt der Kollege Dr. Traumüller von Sr. Maj. dem Könige den Professortitel. Von dieser Auszeichnung machte der Rektor in der Morgenandacht des 11. November den Schülern Mitteilung, indem er zugleich dem treuen Mitarbeiter die herzlichsten Glückwünsche des Kollegiums aussprach.

Leider gestaltete sich der Gesundheitszustand in der Schule während mehrerer Monate ungewöhnlich ungünstig. Am 7. November verschied an Diphtheritis der Sextaner Alfred Stelzner, ein wohlgesitteter, fleißiger, strebsamer Schüler. Da noch mehrere andere Schüler derselben Klasse an Diphtheritis oder Scharlach erkrankten, so wurde die VI[a] auf Anordnung des Herrn Bezirksarztes Medizinalrat Dr. Siegel am 11. November auf zehn Tage geschlossen, um das Zimmer gründlich desinficieren und völlig neu herstellen zu lassen. Dieselbe Maßregel mußte am 25. November über die V[b] verfügt werden. Zugleich erkrankte der Kand. Kurzwelly am 18. November an Diphtheritis, so daß er seine Thätigkeit erst nach den Weihnachtsferien wieder aufnehmen konnte.

Unter solchen Eindrücken nahm die Erinnerungsfeier an die im Kirchenjahre 1894/95 verstorbenen Nicolaitaner am 25. November einen besonders ernsten Charakter an. Die Ansprache hielt dabei der dritte Religionslehrer Lic. theol. Dr. Steuer. Die Namen der Verstorbenen sind folgende:

1) Am 28. Dez. 1894 starb zu Waldheim der Inspektor der Gefangenenanstalt Hauptmann a. D. Leopold Hinze; er war geboren zu Dessau am 25. Febr. 1847 u. besuchte die Nicolaischule von Ost. 1860 bis zum Wintersemester 1866/67, von Klasse VI—II.

2) Im Febr. 1895 starb zu Douglas in Utah der Generalkapellmeister Friedrich Arthur Füssel. Er war geb. zu Leipzig als Sohn des Stadtgerichtsrats Füssel am 4. Aug. 1843 und besuchte die Nicolaischule in den

Klassen Sexta und Quinta vom 29. Jan. 1855 bis zu Ostern 1857 und in den Klassen Obersekunda und Prima vom 14. Okt. 1861 bis Ostern 1863. In der Zeit zwischen Ostern 1857 und Mich. 1861 war er Schüler der Fürstenschule Grimma.

3) In demselben Monat starb zu Freiberg i. S. der Professor em. an der Bergakademie Oberbergrat Moritz Ferdinand Gätzschmann. Er war zu Leipzig am 24. Aug. 1800 als Sohn des Bürgers und Kaufmanns Gätzschmann geboren und besuchte die Nicolaischule vom 1. Mai 1812 bis Mich. 1815 in den Klassen Quinta bis Tertia, worauf er auf die Klosterschule Roßleben überging.

4) Am 28. März starb in Leipzig der Buchhändler Adolf Robert Theodor Hilgenberg. Er war geboren zu Leipzig am 21. Juli 1850 und besuchte die Nicolaischule von Ostern 1862 bis Ostern 1866 in den Klassen Sexta bis Quarta.

5) Am 25. Mai verschied nach kurzem schweren Leiden im 59. Lebensjahre der Rechtsanwalt Justizrat Dr. Julius Oskar Zenker. Er war geb. zu Leipzig als Sohn des Kaufmanns Zenker am 23. Jan. 1837 und besuchte die Schule von Quarta an, von Ostern 1850 bis Ost. 1856, wo er die Anstalt mit dem Reifezeugnis verließ. Er war einer der angesehensten Mitbürger unserer Stadt, seit 1877 Stadtverordneter, seit 1885 Vicevorsteher der Stadtverordneten und fast 25 Jahre Bevollmächtigter des Evangelischen Vereins der Gustav-Adolf-Stiftung.

6) Am 14. Juni starb als Pfarrer zu Rödlitz b. Lichtenstein i. S. Gustav Friedrich Arnold Keil. Er war als Sohn des Professors Keil in Dorpat am 17. Sept. 1854 geboren, wurde Mich. 1864 in die Sexta der Nicolaischule aufgenommen und Ostern 1874 mit den Reifezeugnis entlassen.

7) Am 31. Aug. 1895 starb in Leipzig im Alter von 77 Jahren der Stadtrat a. D. Friedrich Theodor Winter. Er war hier am 16. Dez. 1818 als Sohn des Stadtrichters Winter geboren, wurde am 11. April 1831 in die Quarta unserer Schule aufgenommen und Ost. 1837 mit dem Zeugnis der Reife zur Universität entlassen.

8) Am 10. Okt. starb im Alter von 29 Jahren der prakt. Arzt in Leipzig-Gohlis Dr. med. Curt Arthur Mancke. Er war geboren zu Leipzig als Sohn des Rentiers Mancke am 2. Dez. 1866 und besuchte die Schule mit einer halbjährigen Unterbrechung im Sommer 1882 von Ost. 1877 bis Ost. 1886, von Sexta an bis zur Reifeprüfung.

9) Am 14. Okt. starb in Jena der ord. Professor des Staatsrechts Dr. iur. Friedrich Arnold Brockhaus. Er war geboren zu Dresden als Sohn des Orientalisten Hermann Brockhaus, des späteren Professors in Leipzig, am 1. Sept. 1838, wurde Mich. 1848 in die Sexta der Nicolaischule aufgenommen und Ostern 1857 mit dem Reifezeugnis entlassen.

10) Im Okt. starb auch der Assessor Ernst Gustav Burkhardt. Als Sohn eines Buchdruckers in Leipzig am 6. Juli 1862 geboren, wurde er Mich. 1875 in die Quarta aufgenommen und verließ die Schule mit dem Reifezeugnis Ostern 1882.

11) Am 6. Nov. starb hier in Leipzig im Alter von 79 Jahren der Diakonus em. Gustav Heinrich Bruder. Er war zu Leipzig am 29. Juli 1817 geboren und von Ostern 1830 bis Ostern 1836, von Quinta bis zur Maturitätsprüfung Schüler der Anstalt. Bruder bekleidete zuletzt bis zum Jahre 1888 das Amt eines Diakonus in Geithain.

12) Am 7. Nov. starb an Diphtheritis der Schüler der Sexta A Eugen Alfred Stelzner, geboren in Leipzig am 27. Okt. 1884 und seit Ostern d. J. Schüler unserer Anstalt.

13) Endlich starb nach langer Krankheit am 12. Nov. Karl Hans Meinel, noch bis Michaelis Schüler unserer Anstalt. Er war am 4. Juli 1880 zu Leipzig geboren und besuchte die Schule seit Ostern 1891 in den Klassen VI—IV.

Vor den Weihnachtsferien wurde die Schule Sonnabend 21. Dezember Mittag mit einer Andacht geschlossen, die der Rektor abhielt.

Kurz nach dem Wiederbeginn des Unterrichts am 7. Januar d. J. erkrankte der Oberlehrer Dr. Theodor Baunack am 14. Januar, so daß er bis zum 29. Februar der Schule fern bleiben mußte. Seine Stunden übernahm der Kand. Calinich. Noch vor Ablauf des Monats hatte die Nicolaitana abermals einen Verlust zu beklagen. Am 30. Januar raffte die Diphtheritis den Quartaner Walter Bruhl hinweg, den zweiten seiner Klasse, einen unsrer begabtesten und liebenswürdigsten Schüler. Leider mußte es sich in diesem wie in dem ersten Falle die Schule versagen, dem so früh abberufenen Zögling das letzte Geleite zu geben, und sich damit begnügen, den trauernden, tief gebeugten Eltern ihre herzlichste Teilnahme auszudrücken.

Die 25 jährige Feier der Kaiserproklamation von Versailles beging die Schule am 18. Januar d. J. durch einen für ihre Angehörigen veranstalteten einfachen Aktus. Dabei gab der Rektor nach eignen Erinnerungen eine Schilderung davon, wie ein sächsisches Gymnasium (Plauen i. V.) während der gewaltigen Zeit des Krieges 1870/71 gelebt, gehandelt und empfunden hat. Gesänge rahmten die schlichte Feier ein.

Am 22. Januar fand in den Räumen des Buchhändlerhauses der diesjährige Schulball statt, dessen Leitung wieder die Kollegen Prof. Dr. Knauer, Dr. Raab und Großschupf in die Hand genommen hatten.

Am 27. Januar feierte die Schule den Geburtstag Se. Maj. des Kaisers mit einem öffentlichen Aktus, dem der Herr Oberbürgermeister Dr. Georgi beiwohnte. Nach einem Solo und Chor aus dem 95. Psalm von Mendelssohn-Bartholdy hielt Prof. Dr. Curt Steffen die Festrede. Mit dem patriotischen Hinweis auf die Bedeutung des Tages beginnend, behandelte er sodann in eindringender Darstellung den Idealismus Schillers als eine Frucht der Kantischen Philosophie und indem er zum Schlusse nachwies, wie Schiller diese Gesinnung auch in seinem Leben bethätigt habe, stellte er den Dichter den Schülern als ein ergreifendes Beispiel willenskräftiger Selbstüberwindung hin. Erläuternd deklamierte der Oberprimaner Hans Börner Goethes „Epilog zu Schillers Glocke". Der allgemeine Gesang des Liedes „Lobe den Herrn, den mächtigen König der Ehren", beschloß den Aktus.

Die Studiertage des Winterhalbjahres fielen auf den 17. Oktober, 15. November 1895, 30. Januar und 7. Februar 1896, zum Schlittschuhlaufen wurden frei gegeben die Nachmittage des 16. Januar und 25. Februar.

Zur diesjährigen Reifeprüfung wurden durch Ministerialverordnung vom 3. Februar alle 37 Oberprimaner der Anstalt zugelassen, unter ihnen aber die erkrankten Abiturienten Carl Beer ganz, Johannes Wenck bis auf eine nach seiner Genesung zu veranstaltende kurze Prüfung in Mathematik und Physik von der Prüfung dispensiert und die Kommission ermächtigt, beiden auf Grund ihrer Klassenleistungen ein Reifezeugnis auszustellen. Zugleich wies die Verordnung der Schule zwei Auswärtige, den einen zur Erstehung der gesamten Prüfung, den andern für die Ergänzungsprüfung zu und bestellte den Rektor zum Kgl. Prüfungskommissar. Die schriftliche Prüfung fand vom 13. bis zum 20. Februar statt, die mündliche am 5. und 6. März. Über die Ergebnisse s. d. Tabelle S. XXIII.

Die nachträgliche Reifeprüfung im Hebräischen bestanden während des Schuljahres 1895/96 auf Grund ministerieller Verordnungen die Stud. theol. Richard Otto 11. Dezember v. J., Paul Beyer, Arno Göbel, Julius Heinz am 17. Februar und Oskar Kroitzsch am 6. März.

Die Vorprüfung der für Sexta angemeldeten zukünftigen Schüler wurde am 12. März abgehalten.

Zu Ostern verläßt uns der Kand. Johannes Calinich, um einem Rufe an die neubegründete Realschule in Oschatz zu folgen. Von Ostern 1892/93 als Probandus an unsrer Anstalt thätig, seit Ost. 1895 mit ihr in unterrichtlichem Zusammenhange, hat er ihr als Vikar wertvolle Dienste mit immer gleicher Bereitwilligkeit geleistet und sich dadurch Anspruch auf ihren herzlichen Dank erworben. Die besten Wünsche des Kollegiums begleiten ihn in seine neue Stellung.

Noch sei erwähnt, daß Dr. Hildebrandt die mühsame Katalogisierung der Dohmkebibliothek, durch die diese wertvolle Büchersammlung erst recht benutzbar geworden ist, nunmehr vollendet hat; und ebenso soll an dieser Stelle auch einem früheren Nicolaitaner, Herrn Dr. Julius Vogel, Direktionsassistenten am städtischen Museum, nochmals aufrichtig gedankt werden, der seine

Anhänglichkeit an die Schule von neuem dadurch bethätigt hat, daß er ihr eine treffliche Nachbildung des bekannten Bildes Sr. Maj. des Kaisers „Völker Europas, wahret eure heiligsten Güter“ als Geschenk überwies.

Endlich möge ein vom derzeitigen Rechnungsführer Prof. Dr. Hultgren erstatteter kurzer Bericht über die Witwen- und Waisenkasse der Lehrer an der Nicolaischule (gegründet 1830, erweitert 1887) folgen. Einnahme bis 31. Dezember 1895: Kapital- und Sparkassenzinsen, Mitgliederbeiträge, Eintrittsgelder, Prozente von Gehaltserhöhungen, Geschenke u. s. w. 3287 ℳ 97 ₰. Ausgabe bis 31. Dezember 1895: Pensionen an 5, später an 4 Witwen, Verwaltungsspesen, Einkommensteuer 2338 ℳ. Es bleibt somit für das laufende Jahr 1896 ein Überschuß von 949 ℳ 97 ₰, zu dem noch folgende Beträge kommen, die nach Schluß der Rechnung eingegangen sind:

„Von einem dankbaren Vater beim Abgang seines Sohnes“ durch Kollegen Brugmann	20 ℳ — ₰
Beträge, die einzelne Mitglieder für besondere Mühwaltungen vereinnamt und der Kasse überwiesen haben, und Erlös aus versteigerten Büchern	58 „ 15 „
	In Summa 78 ℳ 15 ₰.

Von den Verordnungen des Kgl. Ministeriums sind folgende von allgemeinerem Interesse:

1. 20. Februar 1895: Der Schulschluß findet vor den Weihnachtsferien in der Regel am 23. Dezember, vor allen übrigen Ferien am Freitag, und zwar im Sommerhalbjahr um 11 Uhr vormittags, im Winterhalbjahr um 12 Uhr mittags statt, der Wiederanfang der Schule nach den Weihnachtsferien in der Regel am 7. Januar, nach den übrigen Ferien am Montag, zu Ostern und Michaelis nach Beendigung der Aufnahmeprüfung mit Beginn des planmäßigen Vormittagsunterrichts. Fällt der 23. Dezember auf Sonntag oder Montag, so ist die Schule am vorhergehenden Sonnabend zu schließen, fällt der 7. Januar auf Sonnabend oder Sonntag, so hat der Unterricht am nächstfolgenden Montag wieder zu beginnen.

2. 14. Mai 1895: Die katholischen Schüler sollen auch nach der Vollendung des 14. Lebensjahres zur Fortsetzung des Religionsunterrichts aufgefordert werden.

3. Unter demselben Datum: Die katholischen Schüler sollen auf Ansuchen von längeren gemeinsamen Schulandachten, namentlich von solchen, die den konfessionellen Standpunkt stärker betonen, dispensiert werden.

4. 5. September 1895: Die Rektoren haben darauf zu achten, daß nicht, wie es mehrfach geschehen ist, die evangelisch-lutherische Kirche feindselig beurteilende katholische Tendenzschriften unter den evangelisch-lutherischen Schülern verbreitet werden.

II. Lehrverfassung und Unterricht.

Übersicht über den von Ostern 1895 bis Ostern 1896 erteilten Unterricht.

A. In den Sprachen und Wissenschaften.

Oberprima.

Klasse **A.** Ordinarius: Rektor Prof. Dr. Kaemmel.
Klasse **B.** Ordinarius: Prof. Dr. Hultgren.

Religion (2 St.). Lektüre des Römerbriefs. Glaubenslehre. Neuere Kirchengeschichte. **A.—B.** Kahnis.

Deutsch (3 St.). **A.** Shakespeares Julius Cäsar. Goethes Leben und Schriften mit Ausblicken auf Herder und Wieland. Gelesen oder genauer besprochen wurden Götz, Werther, Iphigenie, Tasso und eine Reihe lyrischer Gedichte. Aufsätze und Disponierübungen. Kaemmel. — **B.** Deutsche Litteraturgeschichte von 1750—1805 mit besonderer Berücksichtigung Lessings, Wielands, Herders und Goethes. Gelesen wurde Lessings Laokoon (I—XXIII), Schillers Braut von Messina, Shakespeares König Lear, Goethes Dichtung und Wahrheit (I—V, X, XI), Götz, Iphigenie, Hermann und Dorothea und ausgewählte Gedichte. Aufsätze und Disponierübungen. Steffen I.

Lateinisch (8 St.). **A.** Tac. Germania c. 1—27 (c. 19—27 privatim, ebenso Sueton. Tiber.). Tac. Annal. XIII—XV in Auswahl. Hist. III. IV 12—34. 52—74. Leben und Schriften des Tacitus. Verfassung und Verwaltung des römischen Kaiserreichs. Privatim Sueton, Nero; Plin. Epp. in der Chrestomathie von Opitz und Weinhold. Fachaufsätze (4 St.) Kaemmel. — Hor. Sat. I 4—6. 9. II 1. 5. 6. Epist. I 2. 7. II 3 (Auswahl). Plautus Trinummus. Extemporalia. Scripta. Fachaufsätze (4 St.) Döring. — **B.** Tac. Annal. I und II. Germania c. 1—27. Privatim Liv. I und II halb. — Hor. Od. I 1. 4. II 11. III 30. IV 3. 7. Sat. I 1. 4. 5. 9. II 6. Ep. I 1. 2. 4. 6. 7. 8. 9. 10. 14. 16. Cursorisch Terent. Andria und Plaut. Captivi. Römische Litteraturgesch. nach Birt. Pensa, Extemporalia und Fachaufsätze (8 St.) Hultgren.

Griechisch (7 St.). **A.** Dem. Phil. I., de pace, Phil. III. Thukyd. I 1—23. Soph. Oed. R. und Philokt. Aristoph. Nubes (in Auswahl). Übersetzungen aus dem Griechischen; Fachaufsätze. Steffen I. — **B.** Dem. Ol. III., de pace, Phil. II., Chers. Überblick über die Zeit des Demosthenes. Soph. Oed. R., Phil., Antig. Übersetzungen aus dem Griechischen, Extemporalia, Fachaufsätze. Meister.

Französisch (2 St.). **A.** Grammatik: Wiederholung und Erweiterung des Lehrstoffes. Pensa und Extemporalia. Lektüre von Corneille, Cinna und von Sarcey, Siège de Paris (Auswahl in Rengers Schulbibliothek S. 1—41) mit Erklärung in französischer Sprache. — **B.** Grammati und schriftliche Arbeiten wie in **A.** Lektüre von Co neille, Horace und von d'Hérisson, Journal d'un officie d'ordonnance (Auswahl in Rengers Schulbibliothek S. 1—3 mit Erklärung in französischer Sprache. **A.—B.** Knaue

Englisch (fak., 1 St. bis Februar). Lektüre vo Massey, In the Struggle of Life. **A.** und **B.** Knaue

Hebräisch (fak., 2 St.). Lektüre ausgewählter A schnitte des A. T. Grammatische Übungen. **A.** und **B** Kahnis.

Mathematik (4 St.). Ergänzung der Lehre von de Gleichungen. Graphische Darstellung von Funktione Erweiterung des stereometrischen Pensums der Unte prima unter besonderer Rücksichtnahme auf die math matische Geographie bei Behandlung der Kugelobe fläche. Synthetische Behandlung der Schnitte des Rot tionskegels. Lösung geometrischer Aufgaben nach ve schiedenen Methoden. **A.—B.** Gebhardt.

Physik (2 St.). Akustik. Optik. Die einfachste Lehren der mathematischen Geographie. **A.—B.** Geb hardt.

Geschichte (3 St.). **A.** Geschichte der neueren un neuesten Zeit. Steffen II. — **B.** Geschichte der neuere Zeit von der Mitte des 17. Jahrhunderts bis 1815. Kaemme

Unterprima.

Klasse **A.** Ordinarius: Prof. Dr. Döring.
Klasse **B.** Ordinarius: Prof. Dr. Meister.

Religion (2 St.). Übersicht über die neutestamen lichen Schriften und Lektüre ausgewählter Abschnitt Einführung in die Glaubenslehre und Lektüre der Co fessio Augustana. **A.—B.** Kahnis.

Deutsch (3 St.). Litteraturgeschichte von Luther bi Lessing. Eingehendere Erklärung Lessingscher Schrifte Vorträge und Aufsätze. **A.** Kahnis. — **B.** Berlit.

Lateinisch (8 St.). **A.** Livius I. Cic. Tusc. I. I Privatim Cic. Somnium Scipionis. Hor. Od. I 1—7. 9 11. 14. 17. 18. 21—24. 27. 29. 31. 36. 38. II 1. 3. 6. 7 13—14. 17. 18. III 1—6. 8. 9. 13. 26. 29. 30. IV 3. 5. 7 Epod. 2. 13. 15. 16. (Einige Oden wurden auswendig ge lernt.) Extemporalia, Scripta, Fachaufsätze. Döring. — **B.** Cic. in Verr. IV. V. Extemporalia, Scripta, schrift liche Nacherzählungen und ein Fachaufsatz. (6 St.

Meister. — Hor. Od. I 1—4. 6. 7. 9. 10. 11. 14. 22. 35. 37. 38. II 1. 3. 7. 10. 13—18. 20. III 1—6. 8. 13. 14. 17. 21. 29. 30. IV 7. Ep. 2. Mehrere Oden wurden auswendig gelernt. Ein Fachaufsatz. (2 St.) Brugmann.

Griechisch (7 St.). **A.** Plat. Apol., Crito, Protagoras. Überblick über die vorsokratische Philosophie. Übersetzungen aus dem Griechischen und Fachaufsätze. (5 St.) Brugmann. — Hom. Il. I. III—VII. XVIII. XIX; privatim IX. XVI. XVII, ebenso Hom. Od. VI—VIII. (2 St.) Döring. **B.** Plat. Apol., Crit. Überblick über die vorsokratische Philosophie. Aus Stadtmüllers Eclogae Hymn. in Bacchum, Batrach., Hesiod, Tyrt., Mimn., Solon. Privatim Hom. Od. XIX—XXII. I—IV. Übersetzungen aus dem Griechischen, Extemporalia und Fachaufsätze. (5 St.) Meister. — Hom. Il. I. II 1—493. III—XII, davon IV, VII und VIII privatim, außerdem XVI. (2 St.) Baunack I.

Französisch (2 St.). **A.** Grammatik nach Knebel-Probst § 96—121. Mündliches Übersetzen aus Probst, Übungsbuch II. Pensa und Extemporalia. Lektüre von Scribe, la Camaraderie (in der Ausgabe von Velhagen und Klasing) mit Erklärung in französischer Sprache; eine Reihe von Scenen privatim in den Ferien. — **B.** Grammatik, Übungen und schriftliche Arbeiten, wie in **A.** Lektüre von Scribe, Bertrand et Raton (in der Ausgabe von Velhagen und Klasing) mit Erklärung in französischer Sprache; eine Reihe von Scenen privatim in den Ferien. **A.—B.** Knauer.

Englisch (fak., 2 St.). Lektüre aus Herrig, the British Classical Authors (Prosa von Defoe, Chesterfield, Disraeli sen., W. Scott). **A.** und **B.** Knauer.

Hebräisch (fak., 2 St.). Formenlehre. Lektüre ausgewählter Stücke aus dem A. T. Mündliche und schriftliche Übungen. **A.** und **B.** Kahnis.

Mathematik (4 St.). Arithmetische Reihe erster Ordnung, geometrische Reihe, Zinseszins- und Rentenrechnung (1 St.). Stereometrie (3 St.). **A.** Gebhardt. — **B.** Riedel.

Physik (2 St.). **A.** Mechanik, Wellenlehre. Traubüller. — **B.** Mechanik. Gebhardt.

Geschichte (3 St.). **A.** Geschichte der neueren Zeit bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts. Steffen II. — **B.** Geschichte der neueren Zeit bis 1700. Wiederholung der griechischen Geschichte. Voigt.

Obersekunda.

Klasse **A.** Ordinarius: Berlit.
Klasse **B.** Ordinarius: Prof. Dr. Steffen I.

Religion (2 St.). **A.** Kirchengeschichte bis zur Reformation. Schriftlektüre. Kahnis. — **B.** Kirchengeschichte bis zum Augsburger Religionsfrieden. Schriftlektüre. Scholze.

Deutsch (3 St.). Einführung in die altdeutsche Litteratur und Sprache. Lektüre Walthers von der Vogelweide. Das Nibelungenlied und die Gudrun wurden privatim in den Übersetzungen von L. Freytag und G. Klee gelesen und dem Inhalte nach durchgesprochen, ausgewählte Abschnitte im Urtexte (Ausgaben von Zarncke und Bartsch) gelesen. Disponierübungen im Anschluß an Skizzen und Aufsätze. **A.** Berlit. — **B.** Baunack I.

Lateinisch (7 St.). **A.** Liv. V. XXVI (z. T. priv.). Verg. Aen. I. IV. VI 755—901. Specimina, Extemporalia und Fachaufsätze. Berlit. — **B.** Liv. XXII. Sall. Iugurtha. Verg. Aen. I. VI. — II. und IV nach Schillers Übersetzung. Übersicht über III. V. VII—XII. Specimina, Extemporalia, Fachaufsätze. Steffen I.

Griechisch (7 St.). **A.** Herodot VII (zum Teil). Lysias XXI—XXV. Gerths Schulgrammatik § 266—275 und 309—334. Grammatische Wiederholungen und schriftliche Übersetzungen ins Griechische; Fachaufsätze. (5 St.) Steffen II. — Hom. Od. II. V—VII. IX; priv. III. IV. VIII (ausgenommen 266—370). (2 St.) Berlit. — **B.** Herod. VII (mit Auslassungen). Lys. XII. XVI. XIX. Hom. Od. IX—XII. XVI. XVII. XXI. Grammatik wie in **A.** Fachaufsätze. Glafey. — Privatim Hom. Od. VI—VIII. XIII—XV. Steffen I.

Französisch (2 St.). **A.** Grammatik nach Plötz-Kares, Sprachlehre § 92—128 auf Grundlage und mit Übersetzung aller französischen und der meisten deutschen Übungsstücke im Übungsbuch III (IX—XVI). Pensa und Extemporalia. Lektüre aus Plötz, Manuel (Le Sage. Mᵐ de Staël) mit Erklärung in französischer Sprache und Sprechübungen über die gelesenen Texte. Knauer. — **B.** Grammatik, Übungen und schriftliche Arbeiten wie in **A.** Lektüre (Le Sage, Bossuet, Montesquieu, Florian). Raab.

Englisch (fak., 2 St.). **A.** Aussprache- und Formenlehre nach Petersen, Lehr- und Lesebuch S. 1—31. Lektüre aus demselben Buche (Killing a Shark, A Hurricane von Audubon, Story of Le Fevre von Sterne u. a.) mit Wiederholung der Formenlehre und Einführung in die Syntax. Knauer. — **B.** Grammatik wie in **A.** Lektüre (Washington Irving, Edgeworth, Wolfe, Landon u. a.). Raab.

Hebräisch (fak., 2. St.). Formenlehre bis zum regelmäßigen Verbum. Mündliche und schriftliche Übungen. **A.** und **B.** Kahnis.

Mathematik (4 St.). Potenzen und Wurzeln mit allgemeinen Exponenten. Quadratische Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten. Reciproke Gleichungen vierten Grades. Logarithmen. — Reguläre Vielecke. Kreisrechnung. Trigonometrie und Goniometrie. **A.** Tischer. — **B.** Riedel.

Physik (2 St.). Galvanismus. Wärmelehre. **A.** Traumüller. — **B.** Riedel.

Geschichte (3 St.). Geschichte des Mittelalters. **A.** Steffen II. — **B.** Voigt.

Untersekunda.

Klasse **A.** Ordinarius: Dr. Brugmann.
Klasse **B.** Ordinarius: Dr. Glafey.

Religion (2 St.). Rückblick auf die Geschichte des Heils im Alten Bunde. Einzelnes aus den Apokryphen. Lektüre und Erklärung des Matthäusevangeliums unter Bezugnahme auf die 3 übrigen Evangelien. Lektüre der Apostelgeschichte, in **B.** wurden außerdem noch einige Briefe gelesen. **A.** Steuer. — **B.** Scholze.

Deutsch (2 St.). **A.** Schillers Leben. Ausgewählte Schillersche Gedichte. Götz von Berlichingen, Jungfrau von Orleans und Wilhelm Tell; privatim: Geschichte des 30jährigen Krieges. Deklamationen. Aufsätze. (2 St.) Brugmann. — **B.** Ausgewählte Schillersche Gedichte. Wilhelm Tell und Jungfrau von Orleans; privatim Geschichte des Abfalls der Niederlande. Deklamationen und freie Vorträge. Aufsätze. Raab.

Lateinisch (8 St.). **A.** Cic. in Cat. I, de imperio Cn. Pomp., pro Q. Ligario, pro M. Marcello; privatim Caes. de bell. gall. I, II, de bell. civ. III 35—112; Cic. in Cat. II; Nep. Cato und Atticus. Ellendt-Seyfferts Schulgramm. § 223—228, 233—282. Wiederholung der Moduslehre. Schriftliche Arbeiten. (6 St.) Brugmann. — Ovids Metamorphosen und Fasten in Auswahl. (2 St.) Döring (im Sommer Calinich, im Winter Dietrich). — **B.** Cic. de imperio Cn. Pomp., in Cat. I und III, pro Roscio Amer.; privatim: Caes. de bell. civ. II 1—16, III; Phaedr. fab. lib. I; Cic. in Cat. II. Ellendt-Seyfferts Schulgramm. § 223—227 u. 233—282. Wiederholung der Moduslehre. Schriftliche Arbeiten. (6 St.) Glafey. — Ov. Met. ed. Siebelis-Polle 7. 9. Trist. I 1. 2. 3. IV 10. Fast. II 83—118. 193—210. 380—430. 475—512. III 523—674. III 167—336. Versübungen im Hexam. und Distichon. Einzelne Abschn. auswendig. (2 St.) Hultgren.

Griechisch (7 St.). **A.** Xenoph. Anab. I 8. 10. III 1. IV. Hellenika, Auswahl von Bünger I 1.—11. Abschnitt. Im Winter 1 St. Hom. Od. I. Gerths Schulgramm. § 193 bis 266. 276—309. Wiederholungen über § 164—190. Wöchentliche Arbeiten. Baunack I. — Privatim: Xenoph. Anab. V. VI. Brugmann. — **B.** Xenoph. Anab. III, IV 1—6. Gerth, Griech. Schulgrammatik § 193—265 b. 276—308. Wiederholung der Formenlehre. Specimina und Extemporalia. — Im Winter 1 St. Hom. Od. I. (z. T. privatim). Hildebrandt.

Französisch (2 St.). **A.** Grammatik nach Plötz-Kares, Sprachlehre: Wiederholung von § 75—77. Durchnahme von § 78—93 auf Grundlage und mit Übersetzun der französischen und deutschen Übungsstücke im Übung buch II (XXIV—XXVII teilweise) und im Übunga buch III (I—IX). Pensa und Extemporalia. Lektüre au Plötz, Manuel (Diderot. B. de Saint-Pierre. Mérimé Thiers) mit kleinen Sprechübungen. Knauer. — B Grammatik, Übungen und schriftliche Arbeiten wie in A Lektüre (Toepffer, La Fontaine, Voltaire, B. de Saint Pierre, Thiers). Raab.

Mathematik (4 St.) Lineare Gleichungen mit meh reren Unbekannten. Einfachste quadratische Gleichunge mit einer Unbekannten. Potenzen mit ganzen positive Exponenten. Wurzeln. — Proportionen beim Durchschnit eines Winkels durch Parallelen. Ähnlichkeit von Drei ecken und Vielecken. Verhältnisse und Ausmessung vo Flächen. **A.** Tischer. — **B.** Riedel.

Physik (2 St.). Die allgemeinen Eigenschaften de Körper. Das Wichtigste aus der Mechanik. Magne tismus und Reibungselektrizität. **A.** Tischer. — **B** Riedel.

Geschichte (2 St.). Römische Geschichte bis 31 v Chr. **A.** Glafey. — **B.** Voigt (Calinich).

Obertertia.

Klasse **A.** Ordinarius: Dr. Baunack I.
Klasse **B.** Ordinarius: Dr. Steffen II.

Religion (2 St.). Alttestamentliche Bibelkunde Lektüre und Erklärung ausgewählter Abschnitte aus de kanonischen Büchern des Alten Testamentes. Wiederholung des Katechismus. **A.** Steuer. — **B.** Scholze.

Deutsch (2 St.). Die Dichter der Befreiungskriege Körners Zriny. Übungen in freier Rede. Aufsätze Deklamationen; in **B.** außerdem Uhlands Herzog Ernst Prosastücke aus Hieckes Lesebuch II. **A.** Steuer. — **B.** Scholze.

Lateinisch (8 St.). **A.** Caes. de bello Gall. I 30 bis Schluß. IV—VII 42 (z. T. privatim). Cic. in Cat. I Ellendt-Seyfferts Schulgr. § 185—222. Schriftliche Arbeiten (6 St.) Baunack I. — Gaupp, Anthol. Kleinere Abschn in eleg. Form. Ov. Met. ed. Sieb.-Polle VIII 28—134 III 6—253. IV 33—363. Versübungen. (2 St.) Hultgren — **B.** Caes. de bello Gall. IV—VII und de bello civ. I (z T. privatim). Grammatik wie in **A.** (6 St.) Steffen II. — Gaupp und Versübungen, wie in **A.** Ov. Met. I 1—88 163—451. II 680—707 III 1—337 V 345—571. (2 St.) Brugmann.

Griechisch (7 St.). Wiederholung und Vervollständigung des Pensums der Untertertia. Verba liquida verba auf $\mu\iota$ und anomala. Ausgewählte Hauptregeln der Syntax im Anschluß an die Lektüre. Übersetzen aus Gerths Übungsbuch I und II. Auswendiglernen von Vokabeln und Sätzen. Xenoph. Anab. I 1—8 in Auswahl.

Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. A. Baunack II. — B. Leidenroth.

Französisch (2 St.). Plötz-Kares, Sprachlehre § 50—75 (Wortstellung, Tempora, Indikativ und Konjunktiv, Infinitiv). Übungsbeispiele nach Plötz-Kares, Übungsbuch, Heft II 1—23. Lektüre nach Plötz, Lectures choisies (Section VIII—X). Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. A. Hultgren. — B. Raab.

Mathematik (4 St.). Ergänzung des Pensums der Untertertia. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten. Die Fundamentalsätze über den Kreis. Vergleichung und Verwandelung geradlinig begrenzter Flächen. Der pythagoreische Satz. Analytische Methode zur Lösung von Konstruktionsaufgaben. A. Traumüller. — B. Trautscholdt.

Naturkunde (2 St., nur im Winter). Das Elementarste aus der Chemie. Behandlung einzelner besonders wichtiger Mineralien und der einfachsten Krystallformen. A. Krieger. — B. Traumüller.

Geschichte (2 St.). Griechische Geschichte bis zum Tode Alexanders des Großen (2 St.). A. Glafey. — B. Voigt.

Erdkunde (2 St., nur im Sommer). Das Wichtigste aus der physischen Erdkunde. A. Krieger. — B. Traumüller.

Untertertia.

Klasse A. Ordinarius: Dr. Voigt.
Klasse B. Ordinarius: Dr. Hildebrandt.

Religion (2 St.). Erklärung einer Anzahl Psalmen, der hervorragendsten messianischen Weissagungen, der Bergpredigt und der Gleichnisse Jesu. Abschließende Behandlung der Katechismuslehre durch Erklärung des 4. und 5. Hauptstückes. Das Wichtigste über das Kirchenjahr, die Gottesdienstordnung, das Gesangbuch, sowie über die Reformation. Sprüche. Kirchenlieder. Wiederholung des Katechismus. A. Steuer. — B. Scholze.

Deutsch (2 St.). Gelesen wurden ausgewählte Gedichte, besonders Schillersche und Uhlandsche Balladen, Prosastücke aus Hieckes Lesebuch für Untertertia. Aufsätze. Deklamationen. Leichte Übungen in zusammenhängender Rede. Ausgewählte Abschnitte aus der deutschen Syntax. A. Steuer. — B. Hildebrandt.

Lateinisch (8 St.). Caes. de bello Gall. (ed. Menge) I. V. VI. (mit Auswahl). Ellendt-Seyffert § 94—161. Decimina und Extemporalia. Von Weihnachten ab 1 St. Rupp, Lat. Anthologie für Anfänger. A. Voigt. — B. Hildebrandt.

Griechisch (7 St.). Regelmäßige Formenlehre bis zu den verbis mutis nach Gerths Übungsbuch I und Gerths Schulgrammatik. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. A. Eichler. — B. Bischoff.

Französisch (3 St.). A. Plötz-Kares, Sprachlehre § 9—40 (Wiederholung und Vervollständigung der Formenlehre. Unregelmäßige Verba). Übungsbeispiele nach Plötz-Kares, Übungsbuch, Heft I, Lektion 1—36. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Voigt. — B. Grammatik wie in A. Lektüre nach Plötz, Lectures choisies (Section I. IV. V.). Raab (im W. Kurzwelly).

Mathematik (3 St.). Die vier Grundrechnungsarten der allgemeinen Arithmetik mit Beschränkung auf leichte Aufgaben. Einfachste Gleichungen. Winkel und Seiten des Dreiecks. Die Kongruenz der Dreiecke und ihre Anwendung auf das Viereck. Leichte Konstruktionsübungen. A. Tischer. — B. Riedel.

Naturkunde (2 St., nur im Sommer). Übersicht über das ganze Tierreich; das Nötigste über den Bau und das Körperleben des Menschen. A. Krieger. — B. Traumüller.

Geschichte (2 St.). A. Neuere, insbesondere deutsche Geschichte von 1546—1871. Berlit (seit Weihnachten Kurzwelly). — B. Überblick über die neuere, insbesondere deutsche Geschichte von 1648—1871. Hildebrandt.

Erdkunde (2 St., nur im Winter). Deutschland ausführlicher. Wiederholung des Pensums der Quinta. A. Krieger. — B. Traumüller.

Quarta.

Klasse A. Ordinarius: Dr. Leidenroth.
Klasse B. Ordinarius: Dr. Bischoff.

Religion (2 St.). Abschluß der biblischen Geschichte. Kurze Belehrung über die Bibel. Erklärung des 3. Artikels und des 3. Hauptstückes. Sprüche. Kirchenlieder. A. Steuer. — B. Scholze.

Deutsch (3 St.). Gelesen wurden Prosastücke und Gedichte aus Hieckes Lesebuch für Quarta. Die Gedichte meist gelernt. Deklamationsübungen und Übungen im Nacherzählen. Aufsätze. A. Leidenroth. — B. Bischoff.

Lateinisch (8 St.). Grammatik im Anschluß an das Übungsbuch von Busch III. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Corn. Nep. (nach Fügners Auswahl), Milt., Them., Arist., Paus., Cim., Thrasyb., Hamilc., Han. A. Leidenroth. — B. Bischoff.

Französisch (5 St.). Ploetz-Kares, Elementarbuch L. 1—52 (Regelmäßige Formenlehre). Hör- und Sprechübungen. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. A. Franke. — B. Raab.

Mathematik (3 St.). Einfache und zusammengesetzte Regel de tri; Prozent- und Zinsrechnung. Wiederholungen. Im W. 2 St. Einführung in die Geometrie, verbunden mit leichten Meß-, Zeichen- und Rechenübungen. A. Tischer. — B. Trautscholdt.

Naturkunde (2 St.). Im Sommer Überblick über das natürliche Pflanzensystem. Besprechung wichtiger Nutzpflanzen. Einiges vom Leben der Pflanzen und von den Kryptogamen. Im Winter das Wichtigste aus der Lehre von den wirbellosen Tieren. **A.** Krieger. — **B.** Traumüller.

Geschichte (2 St.). **A.** Deutsche Geschichte von Heinrich I. bis zu Luthers Tod. Berlit. — **B.** Deutsche Geschichte bis zum dreißigjährigen Kriege. Großschupf (Kötzschke).

Erdkunde (2 St.). Einiges über die Bewegung der Erde und des Mondes. Übersicht über das Erdganze. Die außereuropäischen Erdteile. **A.** Traumüller. — **B.** Trautscholdt.

Quinta.

Klasse **A.** Ordinarius: Dr. Baunack II.

Klasse **B.** Ordinarius: Dr. Eichler.

Religion (3 St.). Biblische Geschichte des Neuen Testamentes. Einprägung und Erklärung des 2. Hauptstückes. Sprüche. Kirchenlieder. **A.** Steuer. — **B.** Scholze.

Deutsch (3 St.). Gelesen wurden Prosastücke und Gedichte aus Hieckes Lesebuch für Quinta. Die Gedichte wurden teilweise gelernt. Vervollständigung der Lehre vom Satz und von den Lesezeichen, einzelnes aus der Formenlehre. Übungen in Interpunktion und Rechtschreibung, im Wiedererzählen und im Deklamieren. Schriftliche Arbeiten. **A.** Baunack II. — **B.** Eichler.

Lateinisch (9 St.). Unregelmäßige Formenlehre, Wiederholung und Ergänzung der regelmäßigen nach Ellendt-Seyfferts Schulgrammatik. Einige Hauptregeln der Syntax (Acc. c. inf., Präpositionen, Ortsbestimmungen, Participia). Übersetzungen nach Buschs Übungsbuch II. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. **A.** Baunack II. — **B.** Eichler.

Rechnen (4 St.). Die 4 Spezies mit gemeinen und Dezimalbrüchen. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt. Regel de tri. **A.** Krieger. — **B.** Trautscholdt.

Naturkunde (2 St.). Vergleichende Besprechung verwandter Arten und Gattungen von Blütenpflanzen im Sommer und von ausgewählten Wirbeltieren im Winter. **A.** Krieger. — **B.** Traumüller.

Geschichte (2 St.). Bilder aus der römischen G schichte von den punischen Kriegen bis Augustus. Deutsc Geschichte bis 814. Wiederholungen aus der griechisch und römischen Geschichte. **A.** Steuer. — **B.** Gro schupf (Calinich).

Erdkunde (2 St.). Europa. **A.** Großschupf. — I Trautscholdt.

Sexta.

Klasse **A.** Ordinarius: Dr. Franke.

Klasse **B.** Ordinarius: Großschupf.

Religion (3 St.). Biblische Geschichten des Alt Testamentes. Einprägung und Erklärung des 1. Haup stückes. Sprüche. Kirchenlieder. **A.** Steuer. — I Scholze.

Deutsch (4 St.). Gelesen und besprochen wurde Prosastücke und Gedichte aus Hieckes Lesebuch für Sext Die Gedichte wurden größtenteils auswendig gelern Das Nötigste der Wort-, Satz- und Lesezeichenlehr Übungen in der Rechtschreibung. Schriftliche und münd liche Nacherzählungen. Nachschriften. **A.** Franke. – **B.** Großschupf.

Lateinisch (9 St.). Regelmäßige Formenlehre nac Ellendt-Seyfferts Lat. Grammatik. Übersetzungen nac Buschs Übungsbuch I. Wöchentlich eine schriftlich Arbeit. **A.** Franke. — **B.** Großschupf.

Rechnen (3 St.). Die vier Grundrechnungsarte mit unbenannten und benannten Zahlen. Teilbarkeit de Zahlen, Zerlegung in Faktoren. Das Dezimalsystem i Münzen, Maßen und Gewichten. Die wichtigsten nicht dekadischen Maße. Regel de tri. **A.** Krieger. — **B** Trautscholdt.

Naturkunde (2 St.). Im Sommer Besprechung aus gewählter, einfach gebauter Blütenpflanzen und Entwick lung der botanischen Grundbegriffe; im Winter Besprechung wichtiger Säugetiere und Vögel. **A.**—**B.** Krieger.

Geschichte (2 St.). Griechische Sagen. Bilder au der griechischen und älteren römischen Geschichte bis zu den punischen Kriegen. **A.** Franke. — **B.** Großschupf

Erdkunde (1 St.). Grundbegriffe der Erdkunde i Anlehnung an die nächste örtliche Umgebung. Geogra phie von Sachsen, ausgehend von der Heimatskunde. Di politische Einteilung, Hauptgebirge und Hauptflüsse Deutschlands. **A.** Krieger. — **B.** Trautscholdt.

B. In den Künsten und Fertigkeiten.

1. **Schreiben.** In Vᵃ und Vᵇ je 1 St., in VIᵃ 2 St. Trautscholdt; in VIᵇ 2 St. Leidenroth.

2. **Stenographie** (fak.). In IIIA 2 St., in IIB 1 St. **A.** Raab. — **B.** Tischer.

3. **Zeichnen.** V je 2 St. Elementare Grundformen. Quadrat, Dreieck, Sechseck, Achteck, Fünfeck, Kreis, Rosetten, gerade und krummlinige Flächenverzierungen. — IV je 2 St. Perspektivisches Zeichnen. Darstellungen auf Grund der Anschauung mittelst Zeichnen nach Stabmodellen; der verkürzte Kreis. Wiederholung von Flächen-

verzierungen aller Art. Kolorierübungen und Anwendung perspektivischer Regeln beim Zeichnen nach wirklichen Gegenständen, sowie Kombinationen konstruktiver Art, z. B. von Säulen, Rädern, Gebäuden u. s. w. — IIIB (fak.) 2 St. Licht- und Schattenlehre. Vorübung zum Schattieren. Die Kugel (geometrisch, perspektivisch) in Licht und Schatten gesetzt. Prismatische Körper und ornamentale Modelle aus Gips schattiert. — IIIA—I (fak.) 2 St. Schattierungen nach Gipsmodellen aller Art, Gesichtsteile, anatomische Nachbildungen naturgeschichtlicher Präparate und anderer Gegenstände nach der Natur mit Kreide, Tusche, in Aquarellmanier u. s. w. Florian.

4. **Gesang.** VI 2 St. Von dem Werte der Noten und Pausen. Übungen im Singen nach Noten. Ganze und halbe Tonstufen. Tonleiter von C- und Fdur. Der Punkt hinter der Note oder Pause. Starke und schwache Töne, cresc. und decresc. auf Tonreihen. Sprungweise Fortschreitungen (Intervall der Terz). G-dur-Tonleiter. Zweistimmiger Gesang (nach Linges Elementargesangschule). Leichte 1- und 2stimmige Lieder, sowie Erlernung der vom Kultusministerium für Volksschulen vorgeschriebenen Choräle. — V 2 St. und IV 1 St. Tonleiter von D-dur und B-dur. Zweistimmige Übungen. Intervalle der Quinte und Quarte. Vokalisen und Solfeggien (nach Linge). Zweistimmige Lieder und Choräle. — IIIB, IIIA, IIB, IIA, IB. Wiederholung von Chorälen und Erlernung neuer Lieder und Choräle. — Sängerchor: I—V 1 St., I—III 1 St., III—V 1 St. Vierstimmige Lieder, Motetten, Chöre und Soli aus Oratorien u. s. w. Müller.

5. **Turnen** (2 St.). Der Unterricht war klassenweise abgestuft, im wesentlichen nach Lions Bemerkungen über Turnunterricht 1877. In IIIB[a], IV[a] und V[a] Tischer, in den übrigen Klassen Schütz.

Ausserdem für Freiwillige aus IIB—IA wöchentl. 1 Kürturnstunde. Schütz.

C. Aufsätze.

a. Freie Aufsätze in IA—IIB.

I A[a]. 1. Ciceros Urteil über Cäsars Ermordung: animo virili, consilio puerili aus Shakespeares Julius Cäsar begründet. — 2. a) Goethes Götz als Zeitbild; b) Ist Goethes Götz im gewöhnlichen Sinne ein tragischer Held? — 3. Die Gefahren des römischen Kaisertums. — 4. a) Das erste Jahrzehnt Goethes in Weimar im Spiegelbilde seiner lyrischen Gedichte. b) Die Volksszenen in Egmont als Chor der Tragödie. — 5. a) Welchen Einfluß üben die Barbaren auf die Handlung in Goethes Iphigenie? b) Inwiefern hat Lessing mit der Behauptung recht, daß der Historiker nur die Geschichte seiner eigenen Zeit schreiben könne? — 6. Reifeprüfungsarbeit: Wie erklärt es sich, daß Demosthenes die Bedeutung der makedonischen Monarchie für das Griechentum verkannt hat?

I A[b]. 1. Wie bahnt sich Lessing im Laokoon den Weg zu der im Stück XVI gegebenen theoretischen Auseinandersetzung? — 2. Das Zeitalter in Shakespeares König Lear. — 3. Isabella in Schillers Braut von Messina und Jokaste im König Ödipus des Sophokles. — 4. Wie ist es gemeint, wenn Goethe dem ersten Teile seiner Lebensbeschreibung das Motto vorsetzt: ὁ μὴ δαρεὶς ἄνθρωπος οὐ παιδεύεται? — 5. Reifeprüfungsarbeit wie in I A[a].

Leibnizpreis-Aufgabe: Der Charakter des Achilleus in Homers Ilias.

I B[a]. 1. Der Einfluß der Jahreszeit auf die Gemütsstimmung. — 2. Die Treue eine Nationaltugend des Deutschen Volkes. — 3. „Unsrer Väter heißes Sehnen, Deutschlands Einheit ist erstritten, unsre Brüder haben freudig für das Reich den Tod erlitten; Enkel mögen kraftvoll walten, schwer errungenes zu erhalten.“ Ansprache an die Mitschüler am Sedanfeste 1895 (Prüfungs-Aufsatz). — 4. Philotas. Eine Charakterschilderung. — 5. Kontrastwirkungen in Schillers Dramen. — 6. Prüfungsaufsatz.

I B[b]. 1. Welchen Zweck verfolgt Lessing in Emilia Galotti mit der Einführung Contis? — 2. Welche Gründe bestimmen mich zur Wahl des Berufes als . . . . .? — 3. Der Krieg auch hat seine Ehre (Prüfungsarbeit). — 4. Welchen Einfluß hat die Umgestaltung und Steigerung der Verkehrsmittel auf die Kultur der Neuzeit gehabt? — 5. a) Menschen und Bücher. b) Degen und Feder. — 6. Prüfungsarbeit.

II A[a]. 1. a) Das Ritterwesen im Spiegel des Gudrunliedes. b) Frauenleben in der Gudrun. c) Wate in der Gudrun. — 2. a) Mein Lieblingsdichter. b) Ein Lieblingsbuch. — 3. Walther und Gerhard Atze. Eine Wartburgszene nach zwei Gedichten Walthers von der Vogelweide. — 4. a) Bilderbuch aus meiner Knabenzeit. b) Ein poetischer Versuch (Themen: Walther von der Vogelweide im Kloster Tegersee; Wie Hagen Wate fechten lehrte). — 5. Walther

von Aquitanien im Kampfe mit Gunther und Hagen (ein Gemälde). — 6. Prüfungsarbeit.

IIA^b. 1. Was lernen wir aus den geographischen Namen des Nibelungenliedes? — 2. Worin zeigt sich der Einfluß des Christentums im Nibelungenliede? — 3. Brünhilde. — 4. Walther von der Vogelweide als Geschichtsquelle für die Zeit von Philipp. — 5. Walther und Hildegunde. — 6. Prüfungsarbeit.

IIB^a. 1. Wodurch wurde Th. Körner der Liebling des deutschen Volkes, insbesondere der deutschen Jugend? — 2. Schillers Aufenthalt auf der Karlsschule (Klassenarbeit). — 3. Wie denkt sich Schiller im eleusischen Fest die Entwickelung der Menschheit? — 4. Welche Aufgabe fällt dem ersten Akt des Götz von Berlichingen zu? — 5. Die Lebensgeschichte Weißlingens. — 6. Welche Aufgabe übernimmt die Jungfrau von Orleans und wie führt sie sie durch? — 7. Prüfungsarbeit.

IIB^b. 1. Die Wiederkehr des Frühlings. — 2. Warum wäre uns das Wissen der Zukunft nicht gut? (In Anlehnung an Schillers Kassandra). — 3. Die Beziehungen der Glocke zum menschlichen Leben. — 4. Inhaltsangabe des 1. Aktes von Schillers Tell. — 5. Tells Gefangennahme und Befreiung. — 6. Der Prolog zur Jungfrau von Orleans, ein Spiegel der Vaterlandsliebe und Königsgesinnung. — 7. Prüfungsarbeit.

IIIA^a. 1. Inwiefern kann das menschliche Leben mit einer Reise verglichen werden? — 2. Ein Besuch im Forsthause. — 3. Lützows wilde Jagd, eine Besprechung des Körnerschen Gedichtes. — 4. Welche Bande knüpfen uns an das Vaterland? (Prüfungsarbeit). — 5. Worin liegt es begründet, daß die deutsche Jugend sich für Theodor Körner begeistert? — 6. Eine edle That (selbst erdachte Erzählung zur Bestimmung des Begriffs „edel"). — 7. Wer ist ein ordentlicher Mensch? — 8. Inhaltsangabe des 1. Aktes aus Körners Zriny (mit besonderer Berücksichtigung der Reden Solimans). — 9. Welchen Wert hat die Gesundheit? — 10. Prüfungsarbeit.

IIIA^b. 1. Graf Eberhards Feinde und Freunde. (Nach Uhlands Gedicht: Graf Eberhardt der Rauschebart.) — 2. Die Bedeutung der Blumen im Haushalte des Menschen. — 3. Die Macht des Sängers nach Uhlands Taillefer und Bertran de Born. — 4. Die Ernte (ein Bild). — 5. Der Mensch verglichen mit dem Baume (Prüfungsarbeit). — 6. Rom ist nicht an einem Tage erbaut. — 7. Charakteristik des Juranitsch und Vilacky in Körners Zriny. — 8. Luther im Kreise seiner Familie (Gemälde von Spangenberg). — 9. Ein Gang durc die Markthalle. — 10. Prüfungsarbeit.

IIIB^a. 1. Parzivals früheste Jugend. — 2. Besuch de Burgunden beim Markgrafen Rüdiger. — 3. De König in Uhlands Ballade Des Sängers Fluc — 4. Der Bau eines Hauses. — 5. Damon a dem Rückwege nach Syrakus (von ihm selbst e zählt). Prüfungsarbeit. — 6. Ein nächtlicher Bran (Brief). — 7. Die Erzählung vom Taucher Pescecola — 8. Vergleich zwischen Schillers Taucher un der Erzählung vom Taucher Pescecola nach Atha nasius Kirchner. — 9. Arion vor Periander. — 10. Prüfungsarbeit.

IIIB^b. 1. Ein Frühlingsmorgen im Walde. — 2. Gra Eberhard der Greiner und die Schlegler (nac Uhland). — 3. Städter und Ritter (nach Uhland) — 4. Glück und Glas, wie bald bricht das. — 5. Ein Regentag in den Ferien. — 6. Höchstäd und Sedan. — 7. Der König in Schillers Taucher — 8. Der Eisenhammer (nach Schiller). — 9. Welche Nutzen bietet uns das Schlittschuhlaufen? — 10 Prüfungsarbeit.

b. Fachaufsätze in IA—IIA.

IA^a. Lateinisch: 1. Die Dichterfreudigkeit des Horaz. — 2. Agrippinas Tod im März 59 n. Chr. — 3. Die Vorfabel des plautinischen Trinummus. — 4. Aus dem Leben eines vornehmen Römers der ersten Kaiserzeit nach Briefen des jüngern Plinius.

Griechisch: 5. Die Schäden der Demokratie, dargestellt auf Grund der 1. philippischen Rede des Demosthenes. — 6. Die Bedeutung der Emporos-Scene im Philoktet des Sophokles. — 7. Zeugnisse für die Besonnenheit des Staatsmanns Demosthenes, gesammelt aus den gelesenen Reden.

Mathematik und Physik: 8. Wie kommen die verschiedenen Eigenschaften eines Tons bei seiner Darstellung durch eine Kurve zum Ausdruck. — 9. Das Spektrum. — 10. Brennlinien und Brennflächen bei sphärischen Hohlspiegeln. — 11. Der Schnellseher von Anschütz.

Geschichte: 12. Die Wiedergewinnung der altgermanischen Gebiete östlich der Elbe-Saale und die Entwickelung der brandenburgischen Marken.

IA^b. Lateinisch: 1. Fühlte sich Horaz glücklich in seinem Dichterberufe? — 2. Über das Wort des Tacitus: Occisus dictator Caesar aliis pessimum, aliis pulcherrimum facinus visus est. — 3. Wes-

halb hat Horaz in der 6. Satire des 2. Buches die Fabel von der Stadtmaus und der Landmaus so ausführlich erzählt? — 4. Charakteristik des Tiberius nach dem 1. Buche von Tacitus' Annalen. — 5. Arminius libertatis avitae vindex, Flavius magnitudinis Romanae admirator. — 6. Ist im Prozeß des Libo Drusus, den Tacit. Annal. II 27 ff. berichtet, für diesen oder für Tiberius Partei zu ergreifen? —

Griechisch: 7. Fragen aus der Geschichte der demosthenischen Zeit. — 8. Aufbau der Dramen König Ödipus und Philoktet. — 9. Die Entwickelung des Dramas.

Mathematik und Physik: 10. Die Tonerregung bei Lippenpfeifen. — 11. Brennlinien und Brennflächen bei sphärischen Hohlspiegeln. — 12. Der Schnellseher von Anschütz.

IBa. Lateinisch: 1. Gedankengang der Präfatio zu Livius' Geschichtswerk. — 2. Horaz Oden I 1. 6 und III 30 nach Inhalt, Komposition und innerem Zusammenhang unter einander erläutert. — 3. Inhaltsangabe der Einleitung von Cic. Tusculan. — 4. Die Anschauungen antiker Philosophen über Wesen und Sitz der Seele; nach Cic. Tusc. I. — 5. De rege Dario et Democrito philosopho.

Griechisch: 6. Disposition und Inhaltsangabe von K. 1—15 der Apologie. — 7. Des Sokrates Leben und Lehre (Klassenarbeit). — 8. Wie beurteilen die Gesetze die Frage, ob Sokrates aus dem Gefängnis fliehen dürfe? — 9. Wie versucht Protagoras zu beweisen, daß die Tugend lehrbar sei? (Klassenarbeit).

Mathematik und Physik: 10. Über das Princip der Erhaltung der Energie beim Stoß unelastischer und elastischer Körper.

Geschichte: 11. Der Unabhängigkeitskampf der Niederlande.

IBb. Lateinisch: 1. Der Verlust der sicilischen Flotte unter Verres und das Verfahren des Verres gegen die Kapitäne. — 2. Auf welche Weise sucht Horaz in den drei ersten Büchern der Oden zur Hebung der Sittlichkeit beizutragen?

Griechisch. 3. Fragen aus der Geschichte der vorsokratischen Philosophie. — 4. Die Entwickelung des Dramas. — 5. Mehrere im Anschluß an Ilias V und VI gestellte kleinere Aufgaben.

Geschichte: 6. Die Rettung der Evangelischen und der Augsburger Religionsfriede.

IIAa. Lateinisch: 1. Wie überwindet Appius Claudius den Widerstand der Plebs gegen die Neuerung im Kriegswesen? (Liv. V 3 ff.) — 2. Mit welchen Gründen bekämpft Camillus den Antrag der Übersiedelung nach Veji? (Liv. V 50—54.) — 3. P. Cornelius Scipio im 26. B. des Livius.

Griechisch: 4. Herodots Leben und Geschichtsschreibung. — 5. Verteidigung des Gebrechlichen in der XXIV. Rede des Lysias.

Mathematik und Physik: 6. Über die Verdichtung der Gase und die kritische Temperatur.

Geschichte: 7. Auflösung der deutschen Königsmacht bis zur Zeit des Interregnums.

IIAb. Lateinisch: 1. Welche nationalen Tugenden bewährte das römische Volk in der Zeit der trasimenischen Schlacht? (Nach Liv. XXI.) — 2. Die Bedeutung der Palinurusepisode in Vergils Äneis. — 3. Der Charakter des Metellus (nach Sallusts Jugurtha).

Griechisch: 4. Kurze Inhaltsangabe der Bücher 9—12 der Odyssee. — 5. Inhaltsangabe von Lysias' Rede gegen Mantitheos.

Geschichte: 6. Karls des Großen Kriege und äußere Erfolge.

III. Vermehrung der Sammlungen im Schuljahre 1895—1896.

A. Die Schulbibliothek (Bibliothekar: Dr. Joh. Baunack) empfing an Geschenken: Von dem Hohen K. Ministerium: Zeitschrift des K. Sächs. Statist. Bureaus XL Heft 1—4. Suppl. zu XXXIX (Jahrgang 1893). XLI (1895) Heft 1 und 2. Von der Kais. Oberpostdirektion zu Leipzig: Statistik der deutschen Reichs-Post- und Telegraphen-Verwaltung a. d. J. 1894. Von der Handelskammer zu Leipzig deren Jahresbericht 1894. Bericht der Gehe-Stiftung für 1894/95. Von Herrn Prof. Voigt in Göttingen: Die Göttinger gelehrten Anzeigen v. 1893 u. 1894. Von Herrn Dr. H. Voigt hier: Schriften des Vereins für Reformationsgesch., 46—50. Von Herrn Dr. O. Brugmann hier: Die Grenzboten von 1894. Von Herrn Prof. Leskien: Jo. Nic. Madvigii emendationes Livianae. Von Herrn Dr. A. Schneider hier: Aus Roms Frühzeit, Studien zur röm. Topogr. I. Von Herrn Dr. Vogel hier: Text zu „Studien und Entwürfe älterer Meister im städtischen Museum zu Leipzig". Von Herrn Rektor Kaemmel: Kleinere Beiträge zur Geschichte. Festschrift zum d. Historikertag in Leipzig. Italienische Eindrücke. Von Herrn Konrektor Gebhardt: Progr. der Nicolaischule von 1872. Von Herrn Oberl. Berlit:

Progr. der Nicolaischule aus d. J. 1856—62 u. 64. Goethe und Schiller im persönlichen Verkehre, nach brieflichen Mitteilungen von H. Voß. Von Herrn Rektor Kaemmel: Mehrere Ansichtsexemplare von Schulausgaben, die im Laufe des Jahres der Schule zugesandt worden waren.

Angekauft wurden: Vom Vorjahre das Centralblatt, Pädagog. Wochenblatt, Fleckeisens Jhrb., Hermes, Rh. Mus., Philologus, Berl. Philolog. Wochenschrift, Zeitschrift für Gymnasialwesen, Quiddes histor. Zeitschr., Rundschau für Geogr., Zeitschr. f. d. deutschen Unterricht, Statistisches Jahrbuch der höh. Schulen, Mitteilungen der Ges. für deutsche Erziehungs- u. Schulgesch. V 1—3. Rethwisch, Jahresber. über das höhere Schulwesen. Baumeister, Handbuch der Erziehungslehre III 1. 2; II 1; IV 3. 4. Verhandlungen der Direktoren-Vers. 44—48. Handbuch der kl. Altertumswissenschaft Bd. VI. Pauly-Wissowa, R. Encycl. III Apollo—Artemis. Roscher, Lexicon der gr.-röm. Mythol., 30. 31. C. J. A. IV, II. Inscriptiones Graecae insularum. Flavii Josephi opera ed. Niese. Cauer, Grundfragen der Homerkritik. — Lexicon zu Cic., ed. Merguet III 17. 19—23. Fügner, Lex. Liv. 7. Greef, Lex. Tacit. XII. Wölfflin, Archiv IX 2. 3. T. Lucreti Cari de rerum natura libri VI by Munro. Anthologia lat. ed. Bücheler u. Riese. Corp. script. eccles. Lat. 28. 34. 35. — Luthers Werke, Bd. 14. Goethes Werke I 13¹. 24. 18. 25¹; III 6. 7; IV 16—18. Goethe-Jhrb. 16. Grimm, D. Wörterbuch IV 1, 11; IX 3—5; XII 6. — Wachsmuth, Einleitung in das Studium der alten Geschichte. Lamprecht, D. Geschichte V 2. — Müller-Winternitz, Theosophie. — Brockhaus, Konvers.-Lex. 13—16. Kolonialatlas 8. Lief. Klußmann, systemat. Verzeichnis der Abh. in d. Jahren 1876—85 u. 1886—90. Vom Florilegium Graec. (Afran.) II, VI u. IX je 10, IV 19 Exemplare.

Die vorjährigen Geldmittel wurden hauptsächlich verwandt zur Anlegung einer

Hilfsmittel-Sammlung
für den deutschen Unterricht in VI—IIB.

Sie besteht aus (die eingeklammerten Werke waren bereits früher Eigentum der Bibliothek, z. T. sind Ansichtsexemplare eingestellt worden):

1. Maydorn, Hilfsbücher für den deutschen Unterricht, Ratibor 1889. Klee, G. L., Ausgeführter Lehrplan für den deutschen Unterricht, Leipzig 1891.

2. [Zeitschrift für den deutschen Unterricht, herausgegeben von Otto Lyon.]

3. [Grimm, J. u. W., Deutsches Wörterbuch.] Heyne, Deutsches Wörterbuch, Leipzig 1890. [Kluge, Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache.] Lexer, Mhd. Taschenwörterbuch, 4. Aufl., Leipzig 1891. Heyses Fremdwörterbuch, 17. Aufl. v. Otto Lyon, Hannover u. Leipzig 1893. Heintze, Die deutschen Familiennamen, Halle a./S. 1882. Khull, Deutsches Namenbüchlein. Duden, Vollständiges orthographisches Wörterbuch, 4. Aufl., Leipzig 1894. Regeln und Wörterverzeichnis für die deutsche Rechtschreibung, im Auftrage des Kgl. Ministeriums herausgegeben, 34. Aufl., Dresden 1894.

4. Grimm, Jacob, Deutsche Grammatik, 3 Bde., besorgt von Scherer, Berlin 1878/93. Wilmanns, Deutsche Schulgrammatik, 9. Aufl., Berlin 1894. J. Christ. Aug. Heyses Deutsche Grammatik, 25. Aufl. v. Otto Lyon, Hannover und Leipzig 1893. Lyon, Otto, Handbuch der deutschen Spr., 4. Aufl., 2 Teile, Leipzig 1893/94. Behaghel, Otto, Die deutsche Sprache, Leipzig 1886. Nabert, G., Das deutsche Sprachgebiet in Europa und die deutsche Sprache einst und jetzt, Stuttgart 1893. [Lattmann, Grundzüge der deutschen Grammatik, Göttingen 1892.]

5. [Goedeke, Karl, Grundriß zur Geschichte der deutschen Dichtung, 2. Aufl., 5 Bände, 1884/93.] [Koberstein-Bartsch, Grundriß der Geschichte der deutschen Nationallitteratur, 5 Bände, Leipzig 1872 ff.] Kurz, Heinrich, Geschichte der deutschen Litteratur, Bd. I—IV, Leipzig 1887—94. Vilmar, Litteraturgeschichte, 24. Aufl., Leipzig 1894. Scherer, Geschichte der deutschen Litteratur, 7. Aufl., Berlin 1894. Uhlands Schriften zur Geschichte der Dichtung und Sage, Bd. I—VIII, Stuttgart 1867—73. Kelle, Geschichte der deutschen Litteratur von der ältesten Zeit bis zur Mitte des 11. Jahrh., Berlin 1892. Gottschall, R. von, Die deutsche Nationallitteratur des 19. Jahrh., 4 Bände, 6. Aufl., Breslau 1891/92. Imelmann, Deutsche Dichtung im Liede, Berlin 1880. Könnecke, Bilderatlas zur Geschichte der deutschen Litteratur, 2. Aufl., Marburg 1895. [Schäfer, Handbuch der Geschichte der deutschen Litteratur, Bremen 1855. Schäfer, Grundriß der Geschichte der deutschen Litteratur, Berlin 1877. Kluge, Geschichte der deutschen Nationallitteratur, Altenburg 1871.] Weber, Hugo, Deutsche Sprache und Dichtung, Leipzig 1893.

6. Grimm, J., Deutsche Mythologie, 4. Ausg., besorgt v. E. H. Meyer, 3 Tle., Berlin 1875/78. [Simrock, Karl, Handbuch der deutschen Mythologie, 5. Aufl., Bonn 1878.] [Grimm, W., Die deutsche Heldensage, 2. Aufl., Berlin 1867.] Edda, herausg. v. H. Gering, Leipzig u. Wien 1892. Nibelungenlied, herausg. v. Fr. Zarncke, 6. Aufl., Leipzig 1887. Nibelungenlied, übers. v. L. Freytag, 2. Aufl., Berlin 1886. Kudrun, herausg. v. K. Bartsch, 4. Aufl., Leipzig 1880. Kudrun, übers. v. G. L. Klee, Leipzig 1878. Waltharius, Lat. Gedicht des 10. Jahrh., herausg. v. Scheffel u. Holder, Stuttg. 1874. Götzinger, E., Reallexikon der deutschen Altertümer, 2. Aufl., Leipzig 1885. Sach, A., Deutsches Leben in der Vergangenheit, 2 Bde., Halle a./S. 1890/91. [Richter,

Albert, Bilder aus der deutschen Kulturgeschichte, 2 Bde., Leipzig 1882. Schultz, Alwin, Das höfische Leben zur Zeit der Minnesänger, 2 Bände, Leipzig 1880.] Linnig, Deutsche Mythen-Märchen, Paderborn 1883.

7. Andresen, Sprachgebrauch u. Sprachrichtigkeit im Deutschen, 7. Aufl., Leipzig 1892. Andresen, Über deutsche Volksetymologie, 5. Aufl., Heilbronn 1889. Matthias, Theodor, Sprachleben u. Sprachschäden, Leipzig 1892. O. Schroeder, Vom papiernen Stile, 3. Aufl., Berlin 1892. [Wustmann, Allerhand Sprachdummheiten, Leipzig 1891.] Schrader, H., Der Bilderschmuck der deutschen Sprache, 2. Auflage, Weimar 1894. Borchardt-Wustmann, Die sprichwörtlichen Redensarten, 4. Aufl., Leipzig 1894. Richter, Albert, Deutsche Redensarten, Leipzig 1893. Büchmann, Geflügelte Worte, 18. Aufl., Berlin 1895. Erdmann, Oskar, Grundzüge der deutschen Syntax, Stuttgart 1886. [Groß, Tropen u. Figuren, Leipzig 1888.]

8. Hildebrand, R., Vom deutschen Sprachunterrichte, . Aufl., Leipzig 1890. [Hildebrand, R., Gesammelte Aufsätze u. Vorträge, Leipzig 1890.] Hiecke, R. H., Der deutsche Unterricht auf deutschen Gymnasien, 3. Abdruck, Leipzig 1889. Richter, Albert, der Unterricht in der Muttersprache u. seine nationale Bedeutung, Leipzig 1872. Branky, Franz, Methode des Unterrichts in der deutschen Sprache, Wien 1887. [Lehmann, R., Der deutsche Unterricht, Berlin 1870. Dietrich, Albert, Über den deutschen Unterricht im Gymnasium, Jena 1875.]

9. [Wackernagel, W., Poetik, Rhetorik u. Stilistik, herausgegeb. v. L. Sieber, Halle 1873. Koepert, H., Lehrbuch der Poetik, Leipzig 1869. Niemeyer, Abriß der deutschen Metrik, Dresden 1872. Viehoff, H., Vorschule der Dichtkunst, Braunschweig 1860.]

10. Krumbach, C. J., Deutsche Sprech-, Lese- und Sprachübungen, Größere Ausgabe, Leipzig 1893. Otto, Fr., Anleitung das Lesebuch als Mittelpunkt u. Grundlage eines bildenden Unterrichts in der Muttersprache zu behandeln, 8. Aufl., bes. v. H. O. Zimmermann, 1890. Eckardt, C., Anleitung dichterische Meisterwerke auf eine geist- und herzbildende Weise zu lesen, 3. Aufl., Leipzig 1883. Parow, W., Vortrag von Gedichten als Bildungsmittel u. seine Bedeutung für d. deutschen Unterricht, Berlin 1887. Heydner, G., Beiträge zur Kenntnis des kindlichen Seelenlebens, Leipzig 1894. Lyon, Otto, Die Lektüre als Grundlage eines einheitlichen u. naturgemäßen Unterrichts in der deutschen Spr., 1. Teil: Sexta bis Tertia, Leipzig 1890. Müller-Frauenstein, Handbuch für den deutschen Sprachunterricht, 2 Teile in einem Bande, Hannover 1889.

11. Masius, Deutsches Lesebuch, 3 Teile. [Berthel, Jäkel, Petermann, Thomas, Lebensbilder IV. Hopf u. Paulsiek, Deutsches Lesebuch für V, Berlin 1876; für III u. II, Berlin 1892. Vogels Germania, bes. v. Ramshorn, Leipzig 1872. Bellermann, Imelmann, Jonas, Suphan, Deutsches Lesebuch, 5 Teile, Berlin 1886/90. „Döbelner“ Lesebuch I—V, Leipzig 1884—92. Echtermeyer, Auswahl, 26. Aufl. 1880. Samostz, Der junge Dichterfreund, 3 Teile, Leipzig 1876. Basedow, Germania, Berlin 1890. Limbach, Priameln, Dresden 1892.] Lüben-Nacke, Einführung in die deutsche Litteratur, 10. Aufl., 3 Teile, 1883/94. „Aus deutschen Lesebüchern“ oder „Epische u. lyrische Dichtungen“, erl. v. Frick u. Polack, 8 Bde., Leipzig 1891/95. Kriebitzsch, K. Th., Zum Lesebuche, 4 Hefte, Gotha 1881/91. Leimbach, K. L. Deutsche Dichtungen erläutert, Kassel, 9 Bde., 1882/93. Gude, Erläuterungen deutscher Dichtungen, 5 Bde., Leipzig 1892/93. [Frick u. Richter (von Bd. 4 ab: Meier), Lehrproben und Lehrgänge, 6 Bde., Halle 1885/91. Düntzer, Erläuterungen zu Goethes lyr. Gedichten, 2 Bändchen.]

12. [Hoffmeister, Schillers Leben, 2 Bde., Stuttgart 1838. Hinrichs, Schillers Dichtungen, 2 Teile, Leipzig 1837.] Viehoff, H., Schillers Gedichte erl., 7. Aufl., Stuttgart 1895. Wiedasch, W., Schillers Lied v. d. Glocke, Hannover 1859. Evers, M., Schillers Lied v. d. Glocke, Leipzig 1893. Mohr, L., Schillers Lied v. d. Glocke, Straßburg 1877. Ausgaben von Schillers Wilhelm Tell, bes. von [Strzemcha, Kuenen], Carriere, Meyer (Joachim). Dazu Düntzers Erl., Bändchen 24/25, 1892. Ausgaben von Schillers Jungfrau von Orleans, bes. von Schäfer, [Ullsperger]. Dazu Düntzers Erl., Bändchen 21/22, 1891 u. Eysell, G. Fr., Erklärung v. J. v. O., Hannover 1886. Ausgaben v. Schillers Maria Stuart, bes. von [Älschker], Schäfer. Dazu Düntzer, Erl., Bändchen 19/20, 1892. [Tumlirz, Schillers Braut von Messina; Burghauser, Goethes Egmont. Düntzer, Erl. dazu, Leipzig 1882. Sauer, Goethes Götz von Berl., Leipzig, Freytag.] Wustmann, G., Goethes Götz v. B., Leipzig 1871. Dazu Düntzers Erl., Leipzig 1881. Kleists Hermannsschlacht, bes. von [Khull] u. Zürn, Leipzig 1888. [Benedikt, Kleists Prinz von Homburg, Leipzig, Freytag. Ebendaher: Bachmann, Schillers Gedichte. Scheich, Schillers Räuber. Windel, Klopstocks Oden. Langer, Lessings Emilia Galotti. Manlik, Hamburgische Dramaturgie.]

13. [Bindel, Hülfsmittel für den d. Unterricht in III. Berlin 1881.] Knipfer, J., Die Dichter der Befreiungskriege, Altenburg 1870. — Arndt, E. M., Gedichte, Auswahl, Berlin 1889; Märchen und Jugenderinnerungen, 2. Teil, Berlin 1843; Meine Wanderungen und Wandelungen etc., Berlin 1869; Leben und Thaten von Baur, 6. Aufl., Hamburg; Der deutsche Reichsherold, Biogr. u. Charakteristik von Lösche, Gotha 1884. — Max von Schenkendorf, Gedichte, 5. Auflage v. Hagen,

Stuttg. 1878. Gedichte, Ausg. bei Reklam. Sein Leben von Heinrich, Hamburg 1886. Sein Leben von Hagen, A., Berlin 1863. — Th. Körner: Sämtliche Werke, Berlin Hempel. R. v. Gottschall, Leier und Schwert, Zriny, Rosamunde, Leipzig 1868. Tomanetz, Körners Zriny, Wien. Die Körner-Nummer der Illustr. Zeitung (Nr. 2515) vom 12. September 1891. — Uhlands Herzog Ernst, bes. von Weismann, Stuttg. Cotta, 14. Aufl. 1892 und Richter, R., Bielefeld u. Leipzig 1895.

14. Uhlands Gedichte u. Dramen, 2 Teile, Stuttg. Cotta. Uhlands Leben v. s. Witwe, Stuttg. 1874. Notter, Uhland, Stuttg. 1863. Dazu Düntzers Erl., 1879 u. 1892. Eichholtz, Uhlands schwäb. Balladen, Berlin 1873. — Hiecke-Berlit, Deutsches Lesebuch für Unterklassen, 8. 9. 11. Aufl. Jütting u. Weber, Das Vaterland, I u. II, Leipzig 1891/92. [Abicht, Lesebuch aus Sage u. Gedichte, Heidelberg 1883.] — Grimm, Deutsche Sagen, 3. Aufl. 1891. Pröhle, Deutsche Sagen, 2. Aufl., Berlin 1879. Klee, G. B., Sieben Bücher deutscher Volkssagen, 2 Bde., Gütersloh 1885. K. A. Müller, Rübezahl, 7. Aufl. Pröhle, Harz u. Kyffhäuser. Schmidt, Ferdinand, Reineke Fuchs, 12. Aufl. Immermann, Karl, Münchhausen, Berlin, Hempel.

15. [Schröder, Stylistische Aufgaben, Quedlinburg 1844. Hörschelmann, Aufgaben u. Entwürfe zu deutschen Stylübungen, Berlin 1838. Kehrein, Entwürfe zu deutschen Aufsätzen u. Reden, Paderborn 1870. Beck, Lehrbuch des deutschen Prosastiles, München 1876.] Cholevius, Dispositionen u. Materialien, 10. Aufl., Leipzig 1887. Cholevius, Praktische Anleitung zur Abfassung deutscher Aufsätze, 6. Aufl., Leipzig 1893. Heinze-Schröder, Aufgaben aus „Wilhelm Tell“ u. „Jungfrau von Orleans“, Leipzig 1894. Linnig, Franz, Der deutsche Aufsatz in Lehre u. Beispiel, 6. Aufl., Paderborn 1892. Ziegeler, E., Dispositionen zu deutschen Aufsätzen für III u. IIB, 2. Aufl., Paderborn 1891. Kriebitzsch, K. Th., Siebensachen zu deutschen Aufsatzübungen, 2. Aufl., Berlin 1878. Dorenwell, C., Der deutsche Aufsatz, 2 Teile, I^2 u. II^2 1890, Hannover. Krumbach, K. J., Deutsche Aufsätze, 3 Bändchen, Leipzig 1890. Wagner, Fridolin, Die Lehre vom deutschen Stile, 11. Aufl., Darmstadt 1880. Glöde, Die deutsche Interpunktionslehre, Leipzig 1893.

Am Schlusse dazu die Bemerkung, daß diese **Hilfsmittel-Sammlung** im Lehrerzimmer aufgestellt ist.

B. Die Schülerbibliothek erhielt folgenden Zuwachs:

1. Abteilung für die oberen und mittleren Klassen (Bibliothekar: Oberlehrer Berlit). a) Angeschafft wurden aus den Beiträgen der Schüler und den Mitteln der Wilhelm-Wachsmuth-Stiftung: Gymnasialbibliothek, hrsg. von Pohlmey u. Hoffmann H. 18—23. Spamers Illustr. Weltgeschichte, Bd. 2 und 7. Oncken, Allgem. Gesch. in Einzeldarstellungen, Lief. 194, 203 u. 204. Baur, Geschichts- und Lebensbilder aus der Erneuerung des religiösen Lebens in der Zeit der Befreiungskriege. Geisteshelden, hrsg. von Bettelheim. Bd. 18—24. Patriotischer Hausschatz (illustr.), 2 Bde. Sonnenburg, Fürst Bismarck. Jahnke, Fürst Bismarck. Lindner, Der Krieg 1870/71. Pflugk-Hartung u. a., Krieg und Sieg. Liebmann, Vier Monate vor Paris. Arnold, Unter General v. d. Tann. Jahn, Erlebnisse eines 24ers, Bd. 1. Katharina Klein, Fröschweiler Erinnerungen. Berger, Unter den modernen Landsknechten, Bilder aus der franz. Fremdenlegion. Vonderhalde, Französisches Soldatenleben vor Ausbruch des Krieges 1870/71. Lyon, Bismarcks Reden und Briefe (Ausw.). Chuquet, La Guerre 1870/71 (franz. und deutsch). Ratzel, Völkerkunde, Bd. 2, Lief. 6—14. v. Jedina, An Asiens Küsten und Fürstenhöfen. Kollbach, Die deutschen Alpen. Naumann, Vom goldnen Horn zu den Quellen des Euphrat. Die Neue Welt (Bilder mit Text). Fischer, Betrachtungen eines in Deutschland reisenden Deutschen. Kaemmel, Italienische Eindrücke. Deutsche Nationallitteratur von Kürschner, 117 Bde. Wychgram, Schiller. Heinemann, Goethe. Bielschowsky, Goethe, Bd. 1. Hettner, Litteraturgeschichte des 18. Jahrh., 4 Bde. Schmidt, Schillers Sohn Ernst. H. Voß, Goethe und Schiller in persönlichem Verkehr. Martin Greif Werke I. Schillers Briefe, hrsg. von Jonas, Bd. 1—5. Scheffel, Eckehard (3 Stück). Arndt, Werke, Bd. 1—6. Kinkel, Otto der Schütz. Moeser, Patriotische Phantasien, 4 Bde. Jordan, Nibelunge, 3 Bde. Wolfram v. Eschenbach, Parzival, übers. von Bötticher. Nicolai, Zur Neujahrszeit im Pastorat zu Nöddebo. Gudrun von Bartsch (2 Stück). Fechner, Das Büchlein vom Leben nach dem Tode. F. Hebbel, Werke, 4 Bde. Weise, Die Muttersprache. Fichte, Reden an die deutsche Nation. Mendelssohn, Phaedon. Elisabeth Charlotte von Orleans, Briefe. Frommel, Aus der Hausapotheke. Verne, Nord gegen Süd; Courier des Czaaren; 5 Wochen im Ballon; Idee des Dr. Ox. Was willst du werden, 3 Hefte. Armknecht, Der Pfadweiser für die Berufswahl. — b) Geschenkt wurden: Kürassierbriefe eines Kriegsfreiwilligen (von Herrn Dr. O. v. H. als Verf.), Herders Werke, 4 Bde. (von Herrn Prof. Dr. Steffen), F. Meister, Münzkunde für Anfänger (von Herrn Dr. Weinmeister), Andree, Der Kampf um den Nordpol (vom Obersekundaner M. Wundt).

2. Abteilung für die unteren Klassen (Bibliothekar: Dr. Bischoff). a) Angekauft wurden: 12 Fest- u. Gelegenheitsnummern der Leipziger Illustrierten Zeitung (2700, 2702, 2711, 2713, 2714, 2721, je zweimal). Weitbrecht, Deutsches Heldenbuch. Vogt, Das Buch

vom deutschen Heere. Patriotischer Hausschatz, Illustr. Prachtwerk, 2 Bde. Braun, Märchenkranz. Coopers Lederstrumpferzählungen, bearb. von Ad. Stein. Hauffs Märchen, bearb. von G. Hoffmann. Mensch, John Franklin, Der kühne Nordpolfahrer. Lauckhard, Simplicius Simplicissimus; Leben und Thaten des Junker Don Quixote; Persische Heldensagen des Firdusi. Knötel, Bilderatlas zur deutschen Geschichte. Schillmann, Bilderatlas zur preußischen Geschichte. Anders, Der junge Tausendkünstler, 3. Aufl. (2 Stück). Deutsche Landes- u. Provinzialgeschichte, Ein Handbuch für die Heimatkunde im Geschichtsunterricht. Stacke, Erzählungen aus der alten Geschichte, I. Tl. 26. Aufl., II. Tl. 23. Aufl. Lohmeyer, Deutsches Jugendalbum, Bd. I—III. Lindner, Der Krieg gegen Frankreich u. die Einigung Deutschlands. F. Schmidt, Homers Odyssee, 9. Aufl. (3 Stück), Homers Iliade, 8. Aufl. (3 Stück); Reineke Fuchs, 11. Aufl. (3 Stück). Lausch, Heitere Ferientage, 4. Aufl. (3 Stück). v. Köppen, Das Deutsche Reich, Volks- und Vaterlandskunde. G. Klee, Die deutschen Heldensagen (10 Stück). Dittrich-Henze, Der deutsch-französische Krieg 1870/71, Gedenkblätter in Wort und Bild. Kurschat, Hanno, der Liliputerfürst. — b) Geschenkt wurde vom Unterprimaner O. Lange: Otto, Alruna, der Jugend Lieblings-Märchenschatz; Kutzner, Ein Weltfahrer, Jugend, Schicksale, Reisen u. s. w. von E. K. Kane; Karl Müller, Cook, der Weltumsegler.

C. Physikalisches Kabinet, verwaltet von Prof. Gebhardt:

Angekauft wurden: 1 Retortenhalter, 1 Schraubenfieger, 1 System Kapillarröhren, 1 System kommunicierende Röhren, 1 Barometer, 1 Luftstoßapparat, 1 Spalt mit Ladeneinsatz, 1 Winkelspiegel, 1 Laterne für objektive chemische Spektra, 1 Konus aus Flintglas, 2 Serien Anschütz'scher Bilder, 1 grosse Linse mit Holzfassung und Eisenstiel, 1 Stereoskop mit 4 Bildern, 1 zerlegbares Telephon mit oscillierendem Induktor.

D. Naturhistorische Sammlungen, verwaltet von Prof. Traumüller:

Angekauft wurden: Ein Kasten mit folgenden Insekten zur Veranschaulichung der Mimicry: Kallima inachis, Stabheuschrecke, Pseudophyllus nereifolius (Java), Phyllium (Fidji-Inseln). Eine Demonstrationslupe mit drei Vergrößerungen von Reichert in Wien. Die 3. Lieferung der „Neuen Wandtafeln für den Unterricht in der Naturgeschichte" von Heinr. Jung. Calwers Käferbuch, 5. Aufl. Detmer, Pflanzenphysiologisches Praktikum, 2. Aufl. — Für den chemisch-mineralogischen Unterricht wurden Chemikalien und Glasgeräte gekauft.

E. Lehrmittelsammlung für den Geographie- und Geschichtsunterricht, verwaltet von Oberlehrer Großschupf: Geschenkt wurde von Herrn Rektor Kaemmel: Schulwandkarte von Deutschland im Jahre 1648. Entworfen von Dr. H. Schlag, Glogau.

Angekauft wurden: a) Karte: Imperium Romanum von Kiepert.

b) 29 Wandbilder von Seemann: Neptunstempel in Paestum. Das römische Forum. Die Sixtinische Madonna von Rafael. Das heilige Abendmahl von Leon. da Vinci. Laokoon-Gruppe. Korinthisches Kapitäl (vom Lysikrates-Denkmal). Der Zwinger zu Dresden. Zeus-Juppiter (aus Otricoli). Friedrich der Große in Sanssouci, von Ad. Menzel. Das Schloß zu Heidelberg. Medusa Rondanini. Homerbüste. Kaiser Augustus. Das Münster zu Straßburg. Die goldene Pforte des Doms zu Freiberg i. S. Der Dom zu Florenz. Madonna, Thonrelief von Andrea della Robbia. Die heilige Nacht, von Correggio. Gebet vor der Schlacht bei Sempach, von A. Rethel. Fürst Bismarck, von Franz Lenbach. Hermes des Praxiteles. Herabüste. Fürstenpaar in Dom zu Naumburg. Pietà von Michelangelo. Abtei-Kirche Maria-Laach. Der schöne Brunnen und die Frauenkirche zu Nürnberg. Das Allerheiligenbild von Dürer. Johanna Seymour, von Holbein d. J. Selbstbildnis Rembrandts.

c) 3 Bilder zur Geschichte von J. Langl: Das Münster zu Straßburg. Der Zwinger zu Dresden. Die Wartburg. — Handausgabe der „Bilder zur Geschichte" von J. Langl, 2. Aufl. Wien 1889.

d) α. 12 Kulturgeschichtliche Bilder von Ad. Lehmann: Bürgerliches Wohnzimmer. Belagerung. Sendgrafengericht. Turnier. Im Rittersaal. Germanisches Gehöfte. Bauern und Landsknechte. Lagerleben. Aus der Rokoko-Zeit. Inneres einer Stadt. Ritterburg. Im Klosterhof.

β. Erläuterungen zu Ad. Lehmanns kulturgeschichtlichen Bildern, 3 Hefte.

IV. Spielplatz.

Der seit 1883 benutzte Spielplatz ist vom 7. Mai bis 14. September 1895 von den Schülern der Klassen I bis V an 2 Tagen, Dienstag und Sonnabend, gewöhnlich von $4^1/_2$ bis $6^1/_2$ Uhr nachmittags regelmäßig benutzt worden, im Durchschnitt von 48 Schülern. Die Aufsicht auf dem Platze wurde von den Herren Dr. Tischer, Dr. Leidenroth und dem Unterzeichneten geführt.

Die Ausgaben betrugen:

Für Miete eines Raumes zum Aufbewahren der Spielgeräte .	ℳ 10,00
Für Ergänzung und Instandhaltung der Geräte u. s. w. . .	„ 15,25
Zusammen	ℳ 25,25

Die Einnahmen betrugen:

Kassenbestand vom Jahre 1894	ℳ 27,50
Für verkaufte Schülerhefte . .	„ 3,18
Beiträge von den Schülern . .	„ 45,00
Zusammen	ℳ 75,68

Der Spielplatzkasse ist somit ein Bestand von ℳ 50,43 verblieben.

Schütz.

Die aus Primanern nnd Sekundanern gebildete Fußball-Vereinigung unter dem Protektorat des Prof. Dr. Meister hat bis zum Spätherbst Mittwoch und Sonnabend nachm. ihre Übungen fortgesetzt. Der durchschnittliche Besuch betrug 15.

V. Statistisches.

A. Lehrerkollegium.

Rektor: Professor Dr. Otto Kaemmel, AR 1. SEHR 1, Klassenlehrer von IA[a].
Konrektor: Professor Dr. Adelbert Gebhardt, AR 1.

Ständige Lehrer.

1. Oberlehrer Professor Dr. Karl Hultgren, Klassenlehrer von IA[b].
2. „ „ Dr. Otto Knauer.
3. „ „ Dr. Bernhard Döring, Klassenlehrer von IB[a].
4. „ „ Dr. Curt Steffen, Klassenlehrer von IIA[b].
5. „ „ Dr. Richard Meister, ord. Mitglied der K. Sächs. Ges. der Wiss., Klassenlehrer von IB[b].
6. „ „ Dr. Friedrich Traumüller.
7. „ Georg Berlit, KDM. 1870/71 f. C., Klassenlehrer von IIA[a].
8. „ Dr. Oskar Brugmann, Klassenlehrer von IIB[a].
9. „ Dr. Woldemar Glafey, Klassenlehrer von IIB[b].
10. „ Dr. Georg Steffen, Klassenlehrer von IIIA[b].
11. „ Dr. Johannes Baunack, Klassenlehrer von IIIA[a].
12. „ Ernst Riedel.
13. „ Dr. Hans Voigt, Klassenlehrer von IIIB[a].
14. „ Dr. Richard Krieger.
15. „ Heinrich Kahnis, cand. rev. min.
16. „ Dr. Ernst Tischer.
17. „ Dr. Martin Trautscholdt.
18. „ Dr. Ernst Raab.
19. „ Dr. Richard Hildebrandt, Klassenlehrer von IIIB[b].
20. „ Dr. Bernhard Leidenroth, Klassenlehrer von IV[a].
21. „ Dr. Ernst Bischoff, Klassenlehrer von IV[b].

22. Oberlehrer Friedrich Großschupf, Klassenlehrer von VI^b.
23. „ Oskar Scholze, cand. rev. min.
24. „ Dr. Theodor Baunack, Klassenlehrer von V^a.
25. „ Dr. Oswald Eichler, Klassenlehrer von V^b.
Oberturnlehrer: Richard Schütz.
Gesanglehrer: Professor Richard Müller, AR 1.

Nichtständige Lehrer.

1. Hilfslehrer Bacc. theol. Dr. Wilibald Steuer.
2. „ Dr. Clemens Franke, Klassenlehrer von VI^a.

Zeichenlehrer Feodor Florian.
Lehramtskandidat Dr. Rudolf Kötzschke.
„ Johannes Calinich.
„ Rudolf Dietrich.
„ Alexander Kurzwelly.

B. Schüler.

Die Veränderungen im Bestande der Klassen zeigt folgende Übersicht:

	I^A		I^B		II^A		II^B		III^A		III^B		IV		V		VI		Sa.
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	
Bestand am 15. März 1895	21	22	21	17	16	14	25	28	23	24	25	24	27	27	30	30	40	43	**457**
Osterabgang	19	22	—	1	1	1	2	6	2	1	1	1	1	2	1	1	2	6	—70
Osteraufnahme	—	—	—	2	1	—	1	—	2	—	1	3	4	1	3	—	26	26	+70
Bestand am 15. Mai 1895	23	16	15	14	22	21	24	25	23	21	29	27	32	34	35	35	31	30	**457**
bis Ende November: Abgang	2	—	—	—	—	1	2	4	2	2	—	—	1	—	1	1	2	—	—18
bis Ende November: Aufnahme	—	—	—	—	1	1	—	2	—	1	—	1	—	—	1	—	—	—	+7
Bestand am 1. Dez. 1895	21	16	15	14	23	21	22	23	21	20	29	28	31	34	35	34	29	30	**446**
bis 10. März: Abgang	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	—3
bis 10. März: Aufnahme	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+1
Bestand*) am 10. März 1896	21	16	15	14	23	21	22	24	21	20	28	28	29	34	35	34	29	30	**444**

Die 70 zu Ostern 1895 abgegangenen sind:

a) die mit dem Reifezeugnis entlassenen 41 Oberprimaner (vgl. Jahresbericht von 1895 S. XXXIV f.);

b) folgende 29 vor Vollendung des Kursus ausgeschiedene Schüler: aus IB Hugo Rath; aus IIA Gustav Röger, Martin Kuntze; aus IIB Julius Erythropel, Alfred Zweifel, Hermann Barth, Otto Döhler, Paul Gottschalk, Max Kölner, Toby Rother, Bernhard Täubert; aus IIIA Rudolf Eisfelder-Mylius, Richard Mohr, Curt Mögelin; aus IIIB Gottfried Böhm, Karl Hauck; aus IV Hermann Böhm, Johannes Hartung, Rudolf Richter; aus V Friedrich Hauck,

*) Das Schülerverzeichnis, das seit Ostern 1889 alljährlich aus den Beiträgen der Schüler zur Schülerbibliothek gedruckt wird, soll im Mai ausgegeben werden.

Kurt Germer; aus VI Erich Mirsch, Erhardt Müller, Johannes Friedlein, Johannes Queißer, Adolf Schröder, Georg Steger, Fritz Wagner, Paul Zitzmann.

Die 70 zu Ostern 1895 aufgenommenen*) sind:

in IB Richard Allendorff, Georg Weydling; in IIA Harry Müller; in IIB Paulus Rintelen (k); in IIIA Gerhard Krantz (r), Karl Rommeney; in IIIB Curt Jäger, Werner Ahlfeld, Johannes Hammer, Max Retschlag; in IV Wilhelm Dietrich, Walter Krantz (r), Martin Schubert, Karl Wallbrecht, Friedrich Hoyer; in V Paul Fritzsche, Walther Fröb, Walter Retschlag; in VI Bruno Denecke, Georg Fiedler, Karl Frankenstein, Johannes Heller, Walter Hofmann, Armin Höppner, Walter Hothorn, Hans Jericke, Paul Jope, Werner Klemm, Max Krebs, Walter Kuckelt, Wilhelm Lange, Ernst Müller, Siegmund Munk, Otto Pfeffer (r), Johannes Reinicke, Johannes Sänger, Franz Schmidt, Alfred Schröder, Hermann Schulze, Alfred Stelzner, Johannes Übel, Walther Uhlig, Friedrich Wezel, Leo Zernik (i), Arthur Arnold, Kurt Bormann, Reinhold Friedrich, Ernst Gäßner, Martin Gehlert, Hans Irmgedruth, Friedrich Klement, Walther Köhler, Hans Krethlow, Bernhard Kretschmer, Hans Leibelt, Alfred Münch, Felix Nebe, Hans Pester, Reinhard Rausch, Joseph Remelé (k), Martin Richter, Walther Rohr, Walther Schmidt, Gustav Schulze (r), Karl Steckner, Walter Triebel, Egon Voigt, Karl Windisch, Max Zitzmann, Erwin Zweifel (r).

Im Laufe des Schuljahrs gingen ab:

20 Schüler vor Vollendung des Kursus: vor Michaelis aus IIA Fritz Lüders; aus IIIA Paul Student; aus V Wolfgang Patschowsky; zu Michaelis aus IA Horst Dachsel, Friedrich Schilling (Hospitant, vgl. Jahresb. von 1895, S. XXXIV); aus IIB Oskar Knothe, Franz Köhler, Wilhelm Korn, Arthur Thränhart; aus IIIA Gerhard Krantz; aus IV Hans Meinel; aus V Walter Penzler; aus VI Armin Höppner; nach Michaelis: aus IIB Robert Hoffmann, Eugen Zimmermann; aus IIIA Karl Rommeney; aus IIIB Karl Lange; aus VI Alfred Stelzner (†); nach Weihnachten: aus IV Walter Gruhl (†), Raphael Chamizer.

Aufgenommen wurden im Laufe des Schuljahrs folgende 7: vor Michaelis in IIA Ernst Schubert; in V Paulus Pritzlaff (method.); zu Michaelis in IIA Rudolf Swiderski; in IIB Ernst Blobel, Wolfgang Wünsche; in IIIA Siegfried Wünsche; nach Weihnachten: in IIB Oskar de Beaux (r).

Zurückversetzt wurde auf Wunsch wegen längerer durch Krankheit veranlaßter Schulversäumnis 1 Schüler aus IIIA nach IIIB, der in den Ziffern — 18 und + 7 der obigen Tabelle beidemal mitgerechnet ist.

Von den vor Vollendung des Schulkursus abgegangenen 49 sind 4 auf hiesige, 6 auf auswärtige Gymnasien, 3 auf hiesige Realschulen, 1 auf die Thierarzneischule, 2 auf die Handelsschule, 1 auf die Bürgerschule, 1 auf ein Progymnasium, 10 auf Privatschulen und in Privatunterricht, 10 in einen praktischen Beruf (6 Kaufmann, 2 Maschinentechniker, 1 Architekt, 1 Landwirt) übergegangen; 1 schied wegen Krankheit und 2 durch Tod aus. Über die übrigen 8 fehlen bestimmte Angaben.

Die 8 Schüler, die nach Erwerbung des Einjährig-Freiwilligen-Zeugnisses aus IIB abgegangen sind, haben sich sämtlich unmittelbar praktischen Berufen zugewendet.

*) Zu den Namen der Schüler, die nicht dem ev.-lutherischen Bekenntnisse angehören, sind je nachdem die Buchstaben k (katholisch), r (reformiert), i (israelitisch) hinzugefügt.

Die zu Ostern 1896 mit dem Reifezeugnis abgehenden 37 Oberprimaner sind folgende:

Name	Geburtsort	Alter in Jahren	Aufgenommen wann und wohin?	Gesammtcensur		Zukünftiges Studium (Beruf)
				Wissenschaften	Betragen	
A. Hölscher, Gustav	Norden	18 9/12	Ost. 1887 VI	Ib	I	Theologie
Wenck, Johannes	Leipzig	19 10/12	Ost. 1887 VI	IIa	I	Rechtswissensch.
Astor, Robert	Leipzig	19 7/12	Ost. 1887 VI	IIa	I	Buchhandel
,eskien, Friedrich	Leipzig	19 2/12	Ost. 1887 VI	II	Ib	Rechtswissensch.
Hauck, Albert	Frankenheim i. Bayern	18 6/12	Ost. 1889 IV	II	I	Theologie
Schmidt, Walther	Leipzig	19 5/12	Ost. 1887 VI	II	I	Rechtswissensch.
Meinhold, Felix	Leipzig	18 10/12	Ost. 1887 VI	II	Ib	Philologie
Dumas, Kurt	Leipzig	19 6/12	Ost. 1887 VI	IIb	I	Militär
Valentiner, Siegfried	Mannheim	19 11/12	Ost. 1886 VI	IIb	Ib	Physik
Küster, Carl	Leipzig	18 10/12	Ost. 1887 VI	IIb	II	Marine
on der Mosel, Günther	Plauen i. Vogtl.	19 7/12	Ost. 1887 VI	IIb	II	Rechtswissensch.
. Hase, Victor	Leipzig	19 11/12	Ost. 1886 VI	IIb	Ib	Buchhandel
Vagner, Eduard	Leipzig	19 11/12	Ost. 1886 VI	IIIa	Ib	Buchhandel
iebold, Johannes	Leipzig	19	Ost. 1887 VI	IIIa	Ib	Medicin
Iichael, Karl	Leipzig	20 5/12	Ost. 1886 VI	III	Ib	Architektur
chöffler, Theodor	Leipzig	19 3/12	Ost. 1887 VI	IIIa	IIa	Rechtswissensch.
mshoff, Ernst	Leipzig	21	Ost. 1885 VI	III	IIa	Veterinärkunde
ronfeld, Ernst	Gautzsch b. L.	18 10/12	Ost. 1889 IV	III	I	Rechtswissensch.
'alther, Fritz	Mittweida	20 7/12	Ost. 1886 VI	III	I	Medicin
'inter, Johannes	Freiberg i. S.	19 7/12	Ost. 1887 VI	III	Ib	Medicin
'iese, Hans	Zittau	21 4/12	Ost. 1889 IIIB	III	IIa	Theologie
. Börner, Hans	Leipzig	19 1/12	Ost. 1887 VI	Ib	I	Kunstgeschichte
eer, Karl	Leipzig	19 2/12	Ost. 1887 VI	IIa	I	Rechtswissensch.
igert, Alfred	Leipzig	20 3/12	Ost. 1887 VI	II	I	Rechtswissensch.
asselhorst, Alfred	Leipzig	18 10/12	Ost. 1887 VI	II	I	Zoll-u. Steuerfach
ühner, Hermann	Leipzig	20 8/12	Ost. 1886 VI	II	I	Medicin
ahse, Erich	Leipzig	19 8/12	Ost. 1887 VI	II	I	Theologie
entsch, Walter	Schöningen	21 6/12	Ost. 1891 IIIA	IIb	I	Ingenieurwissensch.
ergner, Felix	Leipzig	21 2/12	Ost. 1885 VI	IIb	Ib	Medicin
eld, Georg	Schandau	22 1/12	Ost. 1894 IB	IIIa	I	Rechtswissensch.
örsch, Rudolf	Leipzig	19 9/12	Ost. 1887 VI	IIb	Ib	Rechtswissensch.
erner, Arthur	Pöggstall i. N.-Öst.	22 4/12	Ost. 1890 IIIB	III	I	Rechtswissensch.
ndemann, Hugo	Leipzig	19 10/12	Ost. 1886 VI	III	IIa	Rechtswissensch.
üller, Arthur	L.-Neuschönefeld	21 6/12	Ost. 1885 VI	IIIa	I	Theologie
aibler, Friedrich	Leipzig	19 5/12	Ost. 1887 VI	III	Ib	Militär
ergner, Johannes	Leipzig	22 4/12	Ost. 1885 VI	IIb	I	Ingenieurwissensch.
ühlau, Kurt	Dorpat	20 4/12	Ost. 1892 IIB	IIIa	I	Theologie

Außerdem bestand die Ergänzungsprüfung für Realgymnasiasten der Stud. rer. nat. Arthur hauer aus Leipzig.

VI. Prämien und Stipendien.

A. Prämien.

1) **Nicolaitaner-Preise** (Geldprämien aus der Nicolaitaner- und der Schilde-Stiftung) erhielten zu Ostern 1895: Robert Astor (IB^a), Friedrich Wallbrecht (IIB^a), Hellmuth Böttcher (IIB^b), Felix Seyfferth (IIIA^a), Moritz Scheinert (IIIB^a).

2) Der Leibniz-Preis wurde am 1. Juli den Oberprimanern Hans Börner und Gustav Hölscher auf Grund der von ihnen eingereichten Arbeit zuerkannt (s. o. S. III).

3) Die Prämie der Lindner-Stiftung erhielt Hermann Mrose (IB^a), der Ramsthal-Stiftung Walther Schmidt (IA^a), der Huth-Stiftung Hermann Kühner (IA^b), Alexander Starke (IIA^b), Eduard Reusch (III A^a).

4) Bücherprämien aus städtischen Mitteln und aus denen der Nicolaitaner-Stiftung erhielten:

a. bei der Osterversetzung: Friedrich Leskien (IB^a), Hermann Kühner (IB^b), Friedrich Keller (IIA^a), Hans Müller (IIB^b), Paul Hohlfeld (IIIA^a), Walter Bobeth (IIIA^b), Franz Rohrwerder (IIIB^a), Hans Windisch (IIIB^b), Georg Beer (IV^a), Friedrich Hauck (V^a), Johannes Hartung (V^b), Otto Schlag (VI^a), Wilhelm Kranichfeld (VI^b).

b. bei der Sedanfeier α) aus städtischen Mitteln: Walther Schmidt und Felix Meinhold (IA^a), Karl Beer und Erich Lahse (IA^b), Walther Schiefer (IB^a), Karl Heussi (IB^b), Ernst Erich (IIA^a), Georg Haack (IIA^b), Felix Seyfferth (IIB^a), Felix Maier (IIB^b), Otto Engler (IIIA^a), Walter Otto (IIIA^b), Otto Fischer (IIIB^a), Fritz Krause (IIIB^b); β) außerdem als Spende eines patriotischen Bürgers: Walter Gruhl (IV^a), Richard Meister (IV^b), Kurt Biagosch (V^a), Gerhard Thieme (V^b), Wilhelm Lange (VI^a), Karl Windisch (VI^b).

B. Stipendien.

a. aus städtischen Mitteln erhielten 14 Schüler, b. aus der Riedel-Stiftung Franz Arnhold (IV^a), Erich Bobeth (IV^b), Walter Gruhl (V^a), Hans Geißler (V^b), c. aus der Schelbach-Stiftung Franz Rohrwerder (IIIA^a), d. aus der Carl-Strube-Stiftung stud. phil. Johannes Lamer, e. aus der Nobbe-Stiftung Johannes Liebold (IA^a).

e. Die Zinsen der Jäger-Stiftung (vgl. Jahresbericht 1891/92 S. XIV) erhielt für Ostern 1896 auf drei Jahre Georg Held (IA^b).

f. Eine Zuwendung aus den überschüssigen Zinsen der Nicolaitanerstiftung für 1895 erhielten die Abiturienten Felix Meinhold, Alfred Eigert, Alfred Hasselhorst, Hermann Kühner, Erich Lahse und der Unterprimaner Eugen Scherzer (IB^a).

Mit aufrichtigem Danke sei auch an dieser Stelle der Schenkung der Frau verw. Schilling gedacht, die der Schule eine grössere Anzahl von Schulbüchern ihres früh verstorbenen Sohnes Karl, der die Anstalt Ostern 1887 als Obersekundaner verlassen hat, zur Verfügung stellte. Die Bücher haben zweckentsprechende Verwendung gefunden.

Die Hälfte der Jahreszinsen der Wilhelm-Wachsmuth-Stiftung wurde, wie alljährlich, mit zum Ankauf von Turnpreisen und Ehrenzeichen für das Sedan-Schulfest verwendet.

VII. Feierliche Entlassung der Abiturienten

Freitag, den 20. März 1896, Vormittag 9 Uhr.

1. Gesang: „Lobe den Herrn, meine Seele", Motette von M. Hauptmann.
2. Lateinische Rede des Abiturienten Hans Börner:
   De ludis gladiatoriis.
   Französische Rede des Abiturienten Victor v. Hase:
   Un témoin parisien du siège de Paris en 1870.
   Deutsche Rede des Abiturienten Gustav Hölscher:
   Warum hat das Geschick großer Männer so oft etwas Tragisches?
   Abschiedsgedicht des Abiturienten Felix Meinhold.
   Abschiedsgedicht des Unterprimaners Julius Petersen.
3. Gesang: „So seid mit Gott gegrüßet", ged. von E. Dohmke, komp. von R. Müller.
4. Entlassungsrede des Rektors: Schule und Politik.
5. Gesang: „Nun stoßet das Schifflein vom Lande", ged. von E. Dohmke, komp. von R. Müller.

VIII. Ordnung der öffentlichen Klassenprüfungen

Mittwoch, den 25. März 1896.

Vormittag				Nachmittag			
8^{30}	IIIA^a	Religion	Steuer.	3	VI^b	Religion	Scholze.
9^{5}	IIB^b	Physik	Riedel.	3^{35}	IV^a	Deutsch	Leidenroth.
9^{40}	IIB^a	Geschichte	Glafey.	4^{10}	IV^b	Französisch	Raab.
0^{15}	IIIA^b	Mathematik	Trautscholdt.	4^{45}	V^a	Erdkunde	Großschupf.
0^{50}	IIIB^a	Latein	Voigt.	5^{20}	V^b	Deutsch	Eichler.
1^{25}	IIIB^b	Griechisch	Bischoff.	5^{55}	VI^a	Latein	Franke.
2	IIIB^b	Turnen	Schütz.				

Zu geneigter Teilnahme an diesen Veranstaltungen werden die geehrten Mitglieder des Rates nd der Gemeindevertretung der Stadt Leipzig, die Kaiserlichen und Königlichen Behörden, die Anehörigen der Schüler sowie alle Gönner und Freunde der Anstalt im Namen des Lehrerkollegiums ierdurch ergebenst eingeladen.

Die Aufnahmeprüfung für die Klassen von Quinta an aufwärts, sowie die Nachprüfung für exta findet Montag den 13. April, Vormittag von 8 Uhr ab, statt.

Das neue Schuljahr beginnt Dienstag den 14. April, Vormittag 7 Uhr.

Leipzig, den 14. März 1896.

Prof. Dr. Otto Kaemmel,
Rektor.

d.

Allgemeine Mitteilungen

über Leistungen an die Schulkasse, Aufnahme und Abgang von Schülern und über die Ferienzeiten.

I. Leistungen an die Schulkasse:

1. Schulgeld jährlich für Einheimische 120 *M*, für Auswärtige 150 *M*, vierteljährlich vorauszubezahlen; die Schulgeldrechnungen werden alljährlich bald nach Beginn des Schuljahres an die Schüler verteilt.
2. Bibliotheksgebühr jährlich 2 *M*, zahlbar mit dem ersten fälligen Schulgelde.
3. Aufnahmegebühr 15 *M*, zahlbar mit dem ersten fälligen Schulgelde.
4. Abgangsgebühr:
   a) beim Abgange ohne Reifezeugnis 9 *M*,
   b) beim Abgange mit Reifezeugnis 15 *M*.

Alle diese Beträge werden erhoben von der Ratsschulgeldeinnahme Katharinenstr. 1 I (Alte Wage); nur die unter 4[b] genannte Abgangsgebühr hat der Rektor vor Beginn der Reifeprüfung für die Schulkasse einzuziehen.

II. Aufnahme von Schülern.

Die regelmäßige Aufnahme von Schülern findet zu Ostern statt. Im Laufe des Schuljahres können Schüler nur ausnahmsweise in die Schule eintreten.

Die vorgeschriebene Aufnahmeprüfung wird für die Klassen V—IA in der Regel am Montag nach Ostern, für VI schon einige Wochen vor Ostern abgehalten. Die Tage werden öffentlich bekannt gemacht.

Anmeldungen werden zwar jederzeit angenommen, doch werden, besonders für VI, alljährlich n der Regel in den ersten Januarwochen mehrere Tage eigens dazu anberaumt. Später eingehende Anmeldungen können nur dann Berücksichtigung finden, wenn in den betreffendeu Klassen noch Plätze verfügbar sind.

III. Abgang von Schülern.

Schüler, die die Anstalt vor Vollendung des Schulkursus verlassen sollen, sind von den Eltern oder ihren Stellvertretern durch mündliche oder schriftliche Anzeige beim Rektor abzumelden, und zwar, wo möglich, wenigstens eine Woche vor dem Abgange, damit das Abgangszeugnis inzwischen angefertigt werden kann. Verabfolgt wird dieses Zeugnis nur gegen Einreichung

a) einer Quittung der Schulkasse über den Empfang der Abgangsgebühr (s. I 4[a]) und
b) einer Bescheinigung des Bibliothekars, daß der Schüler etwa aus der Schülerbibliothek entliehene Bücher zurückgegeben habe.

IV. Ferien.

Im Schuljahr 1896/97 dauern die Osterferien vom 28. März bis mit 13. April, die Pfingstferien vom 23. bis 31. Mai, die Sommerferien vom 18. Juli bis 16. August, die Michaelisferien vom 6. September bis 5. Oktober und die Weihnachtsferien vom 24. Dezember 1896 bis 6. Januar 1897.

Verzeichnis
der am Nicolaigymnasium eingeführten Lehrbücher.

(Schuljahr 1896/97.)

Sexta.

1. Gesangbuch (VI—I).
2. Bibl. Memorierstoff f. d. sächs. Schulen (VI—IIIA).
3. Zuck, Bibl. Gesch., Ausgabe A. (VI—IV.)
4. Hiecke, Deutsches Lesebuch für Sexta (VI—IV).
5. Ellendt-Seyffert, Lat. Schulgrammatik (VI—I).
6. Busch, Lat. Übungsbuch für Sexta, Ausgabe für Sachsen.
7. Schmidt u. Enderlein, Erzählungen aus der Sage und Geschichte des Altertums (VI—IIIB).
8. Särchinger u. Estel, Aufgabensammlung f. d. Rechenunterricht, 1. Heft: Sexta.
9. Traumüller und Krieger, Grundriß der Botanik (VI—IIIB).
10. Krieger, Grundriß der Zoologie (VI—IIIB).
11. Gäbler, Pläne u. Übersichtskarten etc. d. Stadt Leipzig.
12. Daniel-Volz, Leitfaden der Geographie (VI—IIIB).
13. Müller, 113 dreistimmige Choräle (VI—IIIB).
14. Linge, Elementargesangschule (VI—IV).
15. Müller, Liederbuch für höhere Schulen (VI—IIIA).
16. Debes, Schul-Atlas f. d. mittleren Unterrichtsstufen (VI—IV).

Quinta.

1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 10. 12—16; außerdem:

17. Hiecke, Deutsches Lesebuch für Quinta (V. IV).
18. Busch, Lat. Übungsbuch für Quinta.
19. Ulbricht, Erzählungen aus der Geschichte und Sage des Mittelalters (V—IIIB).
20. Särchinger u. Estel, Aufgabensammlung, 2. u. 3. Heft: Quinta u. Quarta (V. IV).

Quarta.

1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 10. 12—17. 19. 20; außerdem:

21. Bibel (IV—I).
22. Hiecke, Deutsches Lesebuch für Quarta.
23. Busch, Lat. Übungsbuch für Quarta.
24. Ein lateinisches Schulwörterbuch (IV—I).
25. Plötz-Kares, Elementarbuch von Dr. Gustav Plötz, Ausgabe A.
26. Schmidt, Erzählungen aus der Geschichte der neueren Zeit (IV. IIIB).

Unter-Tertia.

1. 2. 5. 7. 9. 10. 12. 13. 15. 19. 21. 24. 26; außerdem:

27. Hiecke, Deutsches Lesebuch für Unter-Tertia.
28. Warschauer-Dietrich, Lateinisches Übungsbuch I mit dem nach den Übungsstücken geordneten Wörterverzeichnis.
29. Gaupp, Lateinische Anthologie für Anfänger.
30. Gerth, Kurzgef. Gr. Schulgrammatik (IIIB—I).
31. Gerth, Griech. Übungsbuch, 1. Teil (IIIB. IIIA).
32. Plötz-Kares, Sprachlehre d. Französischen (IIIB—IB).
33. Plötz-Kares, Übungsbuch, Heft 1.
34. Plötz, Lectures choisies (IIIB. IIIA).
35. Ein franz. Wörterbuch (IIIB—I).
36. Mehler, Elementarmathematik (IIIB—I).
37. Heis, Sammlung von Beispielen aus der Arithmetik und Algebra (IIIB—I).
38. Schul-Atlas (IIIB—I).

Ober-Tertia.

1. 2. 5. 15. 21. 24. 26. 30. 31. 32. 34. 35. 36. 37. 38 außerdem:

39. Kahnis, Bibelkunde (IIIA—I).
40. Hiecke, Deutsches Lesebuch für Ober-Tertia.
41. Schmidt, Lieder der Deutschen aus den Zeiten der Freiheitskriege.
42. Gerth, Griechisches Übungsbuch, 2. Teil.
43. Plötz-Kares, Übungsbuch, Heft 1 u. 2.
44. Schäfer, Geschichtstabellen (IIIA—I).
45. Atlas antiquus oder Historischer Atlas (IIIA—I).
46. Kaemmel-Ulbricht, Grundzüge der Geschichte, 1. Teil (IIIA—I).
47. Traumüller, Leitfaden der Chemie und Mineralogie.

Unter-Sekunda.

1. 5. 21. 24. 30. 32. 35. 36. 37. 38. 39. 44—46; außerdem:

48. Echtermeyer, Auswahl deutscher Gedichte.
49. Ein griech. Schulwörterbuch (IIB—I).
50. Plötz, Manuel de la litt. française (IIB. IIA).
51. Plötz-Kares, Übungsbuch, Heft 2 u. 3.
52. Jochmann, Grundriß der Experimentalphysik (IIB—I).

Ober-Sekunda.

1. 5. 21. 24. 30. 32. 35. 36. 37. 38. 39. 44—46. 49. 50. 52; außerdem:

53. Novum testamentum Graece (IIA—I).
54. Klee, Grundzüge der deutschen Litteraturgeschichte (IIA—I).
55. Plötz-Kares, Übungsbuch, Heft 3.
56. Kaemmel-Ulbricht, Grundzüge, 2. Teil (IIA—I).
57. Schlömilch, Logar. Tafeln (IIA—I).

[58. Petersen, Lehr- und Lesebuch für den engl. Unterricht (IIA—I).]

[59. Baltzer, Hebr. Schulgrammatik (IIA—I).]

[60. Baltzer, Übungsbuch zu der Hebr. Schulgrammatik (IIA—I).]

Unter- und Ober-Prima.

1. 5. 21. 24. 30. 32 (für IB). 35. 36. 37. 38. 39. 44—46. 49. 52. 53. 54. 56. 57. [58—60]; außerdem:

61. Knebel-Probst, Französische Schulgrammatik (für IA).
62. Probst, Übungsbuch II.
63. Kaemmel-Ulbricht, Grundzüge, 3. Teil.

[64. Herrig, the British classical authors.]

[65. Ein englisches Wörterbuch.]

Nicht eingeführt, aber einzelnen Klassen zur Anschaffung **empfohlen:**

G. Steffen, Stichworte zu dem Unterrichte in der Geschichte, 1. Heft. — Kirchhoff u. Lehmann, Zeichenatlas.

Bezüglich der **Wörterbücher** empfiehlt es sich, vor dem Ankauf den Rat der betreffenden Fachlehrer einzuholen.